Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Климкин, Т. А. Срибная, Равномерная непрерывность семейства слабо регулярных функций множества в топологическом пространстве, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 1, 60–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm245>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 13:49:46

УДК 517

РАВНОМЕРНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ СЕМЕЙСТВА СЛАБО РЕГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ МНОЖЕСТВА В ТОПОЛОГИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. М. Климкин, Т. А. Срибная

В работе доказаны условия, при выполнении которых семейство слабо регулярных функций множества, заданных на алгебре Σ , $\Sigma \supset \eta$, подмножеств некоторого σ -топологического пространства (T, η) и принимающих значения в произвольном топологическом пространстве, является равномерно непрерывным.

Библиография: 8 названий.

В работе [1] А. Гротендик доказал, что для равномерной непрерывности семейства ограниченных аддитивных регулярных функций множества, заданных на борелевских множествах локально компактного хаусдорфова топологического пространства, достаточно равномерной непрерывности этого семейства на открытых множествах.

Д. Штейн [2] распространил этот результат на семейство ограниченных аддитивных слабо регулярных функций множества, заданных на борелевских множествах регулярного хаусдорфова топологического пространства.

В данной работе теорема Гротендика доказана для случая, когда функции множества слабо регулярны, неаддитивны, заданы на некоторой алгебре множеств, содержащей класс открытых множеств некоторого σ -топологического пространства (T, η) , и принимают значения в произвольном топологическом пространстве. В случае, когда (T, η) – хаусдорфово регулярное топологическое пространство, найден ряд условий, эквивалентных условию равномерной непрерывности семейства $\Phi = \{\varphi\}$ на алгебре Σ , содержащей класс открытых множеств η .

Пусть T – некоторое множество, η – класс подмножеств множества T , замкнутый относительно счетных объединений и конечных пересечений, $\emptyset \in \eta$, $T \in \eta$.

Следуя А. Д. Александрову [3], пространство (T, η) будем называть σ -топологическим, множества из η – *открытыми*, а их дополнения – *замкнутыми*.

Пусть $\Sigma \supset \eta$ некоторая алгебра подмножеств множества T ; (X, τ) – произвольное топологическое пространство; $\Phi = \{\varphi\}$, $\varphi: \Sigma \rightarrow X$, $\varphi(\emptyset) = e$, $e \in X$, – некоторое семейство функций множества; пусть $\mathcal{H}$ – фундаментальная система окрестностей точки $e \in X$.

Для любой функции $\varphi \in \Phi$ и для любого множества $E \in \Sigma$ положим $\tilde{\varphi}(E) = \{\varphi(F), F \subset E, F \in \Sigma\}$.

Множество $E \in \Sigma$ назовем *внешне регулярным* [4, с. 218] по отношению к семейству функций множества $\Phi = \{\varphi\}$, если для любой окрестности $u \in \mathcal{H}$ существует такое

открытое множество U , что

$$E \subset U \text{ и } \tilde{\varphi}(U \setminus E) \subset u$$

для любой функции $\varphi \in \Phi$.

Пусть $\mathcal{F}$ – некоторый класс замкнутых множеств. Будем говорить, что функция множества $\varphi \in \Phi$ слабо $\mathcal{F}$ -регулярная, если для любого множества $E \in \Sigma$ и для любой окрестности $u \in \mathcal{H}$ существует такое множество $F \in \mathcal{F}$, $F \subset E$, что $\varphi(E \setminus F) \in u$.

Всюду в дальнейшем последовательность попарно непересекающихся множеств будем называть *спектром*, а убывающую последовательность множеств с пустым пересечением – *локализатором*.

Будем говорить, что функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ обладают на классе множеств $\mathcal{P} \subset \Sigma$ свойством:

– *равномерной исчерпываемости*, если для любого спектра $\{E_n\} \subset \mathcal{P}$ соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(E_n) = e \quad (1)$$

выполняется равномерно относительно $\varphi \in \Phi$;

– *равномерной слабой непрерывности* (и писать $(\Phi, PCH)_{\mathcal{P}}$), если для любого локализатора $\{E_n\} \subset \mathcal{P}$ соотношение (1) выполняется равномерно относительно $\varphi \in \Phi$;

– *равномерной непрерывности* (и писать $(\Phi, PH)_{\mathcal{P}}$), если для любой последовательности $\{E_n\} \subset \mathcal{P}$, $E_n \rightarrow \emptyset$, соотношение (1) выполняется равномерно относительно $\varphi \in \Phi$;

– *равномерной квазитреугольности*, если для любой окрестности $u \in \mathcal{H}$ существует окрестность $v = v(u)$, $v \in \mathcal{H}$, такая, что для любой функции $\varphi \in \Phi$ и для любых непересекающихся множеств $A, B \in \mathcal{P}$, $A \cup B \in \mathcal{P}$, выполняются условия:

если $\varphi(A) \in v$, $\varphi(B) \in v$, то $\varphi(A \cup B) \in u$;

если $\varphi(A) \in v$, $\varphi(A \cup B) \in v$, то $\varphi(B) \in u$.

Если функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ равномерно квазитреугольные на Σ и $u \in \mathcal{H}$ – некоторая окрестность точки $e \in X$, то всюду в дальнейшем через $\{u_n\} \subset \mathcal{H}$ будем обозначать такую последовательность окрестностей, что

$$u_0 = u \cap v(u), \quad u_n = u_{n-1} \cap v(u_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots$$

Примерами семейств функций множества, обладающих свойством равномерной квазитреугольности, являются: семейство k -внешних мер [5, с. 913] и, тем более, семейство аддитивных функций множества со значениями в топологической абелевой группе, семейство квазилиппицевых функций множества [6, с. 26], семейство квазиаддитивных многозначных соответствий [7, с. 38].

ТЕОРЕМА 1. Пусть (T, η) – σ -топологическое пространство, Σ – некоторая алгебра подмножеств множества T , причем $\Sigma \supset \eta$; пусть $\mathcal{F}$ – некоторый класс замкнутых множеств, и пусть $\Phi = \{\varphi\}$ – семейство слабо $\mathcal{F}$ -регулярных, равномерно квазитреугольных функций множества, заданных на алгебре $\Sigma \supset \eta$ и принимающих значения в топологическом пространстве X . Если каждое замкнутое множество пространства (T, η) является внешне регулярным по отношению к семейству функций множества Φ , то справедлива импликация

$$(\Phi, PCH)_{\Sigma} \Rightarrow (\Phi, PH)_{\Sigma}.$$

Доказательство теоремы 1 опирается на следующие леммы, которые формулируются в предположении, что выполнены условия теоремы.

ЛЕММА 1. *Функции множества семейства Φ равномерно исчерпывающие на классе множеств $\mathcal{F}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{A_n\}$ – некоторый спектр из $\mathcal{F}$. Так как любое замкнутое множество внешне регулярно по отношению к семейству Φ , существует такое открытое множество $B_1 \in \eta$, что $A_1 \subset B_1$ и $\tilde{\varphi}(B_1 \setminus A_1) \subset u_1$ для любой функции $\varphi \in \Phi$.

Положим $C_2 = A_2 \setminus B_1$. Так как множество C_2 замкнутое, существует такое открытое множество $B_2 \in \eta$, что $C_2 \subset B_2$ и $\tilde{\varphi}(B_2 \setminus C_2) \subset u_2$ для любой функции $\varphi \in \Phi$.

Продолжив процесс, по индукции построим последовательность замкнутых множеств $\{C_n\}$ и последовательность открытых множеств $\{B_n\}$ таких, что

$$\begin{aligned} C_1 &= A_1, & C_n &= A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k, & n &= 2, 3, \dots, \\ C_n &\subset B_n, & \tilde{\varphi}(B_n \setminus C_n) &\subset u_n, & n &\in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (2)$$

для любой функции $\varphi \in \Phi$.

Так как

$$A_n \subset C_n \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} (B_k \setminus C_k) \right), \quad n = 2, 3, \dots,$$

каждое множество A_n , $n = 2, 3, \dots$, можно представить в виде

$$A_n = C_n \cup \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \dots \cup \mathcal{D}_{n-1}, \quad (3)$$

где $\mathcal{D}_1 = (B_1 \setminus C_1) \cap A_n$,

$$\mathcal{D}_k = ((B_k \setminus C_k) \cap A_n) \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} \mathcal{D}_i, \quad k = 2, 3, \dots, n-1. \quad (4)$$

Из (2) и (4) следует для каждого номера $n = 2, 3, \dots$

$$\tilde{\varphi}(\mathcal{D}_k) \subset u_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

для любой функции $\varphi \in \Phi$.

Так как множества $\mathcal{D}_k$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, попарно не пересекаются, из последнего условия в силу свойства равномерной квазитреугольности функций множества семейства Φ и выбора последовательности $\{u_n\} \subset \mathcal{H}$ следует

$$\tilde{\varphi}\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} \mathcal{D}_k\right) \subset u_0, \quad n = 2, 3, \dots, \quad (5)$$

для любой функции $\varphi \in \Phi$.

Положим

$$H_1 = B_1, \quad H_n = B_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k, \quad n = 2, 3, \dots$$

Так как

$$C_n \subset H_n \text{ и } H_n \setminus C_n \subset B_n \setminus C_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

учитывая (2) и свойства последовательности $\{u_n\} \subset \mathcal{H}$, получим при $n = 1, 2, \dots$

$$\tilde{\varphi}(H_n \setminus C_n) \subset u_1 \quad (6)$$

для любой функции $\varphi \in \Phi$.

Положим

$$F_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} H_k, \quad n = 1, 2, \dots$$

Очевидно, что

$$F_n = H_n \cup F_{n+1} \text{ и } H_n \cap F_{n+1} = \emptyset, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Так как функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ обладают свойством PCH на Σ , а последовательность множеств F_n , $n = 1, 2, \dots$, образует локализатор из Σ , существует такой номер n_0 , что для всех номеров $n > n_0$ справедливо

$$\varphi(F_n) \in u_2 \quad (8)$$

для любой функции $\varphi \in \Phi$.

Так как функции множества семейства Φ равномерно квазитреугольные, из (7) и (8) следует, что для всех $n > n_0$

$$\varphi(H_n) \in u_1 \quad (9)$$

для любой функции $\varphi \in \Phi$.

Аналогично, из (6), (9) и соотношения

$$H_n = (H_n \setminus C_n) \cup C_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

получим, что для всех номеров $n > n_0$ справедливо

$$\varphi(C_n) \in u_0$$

для любой функции $\varphi \in \Phi$. Отсюда в силу (3), (5) и выбора окрестности $u_0 \in \mathcal{H}$ получим, что для всех номеров $n > n_0$

$$\varphi(A_n) \in u$$

для любой функции $\varphi \in \Phi$. Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. *Функции множества семейства Φ равномерно исчерпывающие на алгебре Σ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда существуют спектр $\{E_n\} \subset \Sigma$, окрестность $u \in \mathcal{H}$ и последовательность функций $\{\varphi_n\} \subset \Phi$, для которых

$$\varphi_n(E_n) \notin u, \quad n = 1, 2, \dots$$

Так как каждая функция φ_n слабо $\mathcal{F}$ -регулярная, существуют множества $F_n \in \mathcal{F}$ такие, что

$$F_n \subset E_n \text{ и } \varphi_n(E_n \setminus F_n) \in u_0, \quad n = 1, 2, \dots$$

По лемме 1 существует номер n_0 такой, что

$$\varphi_n(F_n) \in u_0 \quad \text{при всех } n > n_0.$$

Так как

$$E_n = F_n \cup (E_n \setminus F_n),$$

то

$$\varphi_n(E_n) \in u, \quad n > n_0.$$

Получили противоречие. Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Для любой окрестности $u \in \mathcal{H}$ и для любого локализатора $\{E_n\} \subset \Sigma$ существует номер n_0 такой, что для любого номера $n > n_0$ соотношение

$$\tilde{\varphi}(E_n) \subset u$$

выполняется для любой функции $\varphi \in \Phi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда существуют локализатор $\{E_n\} \subset \Sigma$, окрестность $u \in \mathcal{H}$ и последовательность функций $\{\varphi_n\} \subset \Phi$ такие, что

$$\tilde{\varphi}_n(E_n) \notin u, \quad n = 1, 2, \dots$$

Отсюда следует, что существует множество $A_1 \in \Sigma$ такое, что

$$A_1 \subset E_1, \quad \varphi_1(A_1) \notin u. \quad (10)$$

Так как $\{A_1 E_n\}$ – локализатор из Σ , а функции множества семейства Φ обладают свойством PSH на Σ , существует номер n_1 такой, что

$$\varphi_1(A_1 E_{n_1}) \in u_0.$$

Отсюда в силу (10) и выбора окрестности $u_0 \in \mathcal{H}$ получаем

$$\varphi_1(A_1 \setminus (A_1 E_{n_1})) \notin u_0.$$

Аналогично, найдем множество $A_{n_1} \in \Sigma$ и номер $n_2 > n_0$ такие, что

$$A_{n_1} \subset E_{n_1}, \quad \varphi_{n_1}(A_{n_1}) \notin u, \quad \varphi_{n_1}(A_{n_1} E_{n_2}) \in u_0.$$

Тогда

$$\varphi_{n_1}(A_{n_1} \setminus A_{n_1} E_{n_2}) \notin u_0.$$

Продолжив процесс, по индукции построим подпоследовательность номеров $\{n_k\}$ и последовательности множеств $\{A_{n_k}\}$ и $\{E_{n_k}\}$ из Σ такие, что $A_{n_k} \subset E_{n_k}$ и

$$\varphi_{n_k}(A_{n_k} \setminus A_{n_k} E_{n_{k+1}}) \notin u_0.$$

Так как множества $\{A_{n_k} \setminus A_{n_k} E_{n_{k+1}}\}$ образуют спектр из Σ , последнее соотношение противоречит свойству равномерной исчерпываемости на Σ функций множества семейства Φ . Лемма 3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Предположим, что функции множества семейства Φ не обладают свойством $(PH)_\Sigma$. Тогда существуют последовательность $\{E_n\} \subset \Sigma$, $E_n \rightarrow \emptyset$, окрестность $u \in \mathcal{H}$ и последовательность $\{\varphi_n\} \subset \Phi$ такие, что

$$\tilde{\varphi}_n(E_n) \notin u. \quad (11)$$

Так как функции множества семейства Φ равномерно исчерпывающие на Σ , существует номер n_1 такой, что для всех номеров $n > n_1$ и для всех функций множества $\varphi \in \Phi$ справедливо

$$\tilde{\varphi}\left(E_n \setminus \bigcup_{k=1}^n (E_k)\right) \subset u_1.$$

Положим

$$B_1 = \bigcup_{k=1}^{n_1} E_k.$$

Аналогично, для последовательности $\{E_n B_1\}_{n > n_1}$ найдем номер n_2 такой, что для всех $n > n_2$ и для всех функций $\varphi \in \Phi$ справедливо

$$\tilde{\varphi}(E_n B_1 \setminus B_2) \subset u_2, \quad \text{где } B_2 = \bigcup_{k=n_1+1}^{n_2} E_k B_1.$$

Продолжив процесс, по индукции построим последовательность номеров $\{n_k\}$ и локализатор $\{B_k\} \subset \Sigma$ такие, что

$$B_0 = T, \quad B_k = \bigcup_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} E_i B_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \tilde{\varphi}(E_n B_{k-1} \setminus B_k) \subset u_k$$

для всех $n > n_k$ и для всех функций $\varphi \in \Phi$.

Отсюда в силу построения последовательности $\{u_k\} \subset \mathcal{H}$ получим

$$\tilde{\varphi}\left(\bigcup_{i=1}^k (E_n B_{i-1} \setminus B_i)\right) \subset u_0 \quad (12)$$

для любого номера $k = 1, 2, \dots$ и для любой функции $\varphi \in \Phi$.

Так как для любых номеров k и $n > n_k$ справедливо соотношение

$$E_n \subset \left(\bigcup_{i=1}^k (E_n B_{i-1})\right) \cup B_k,$$

из (11) и (12) следует, что при $n > n_k$, $k = 1, 2, \dots$,

$$\tilde{\varphi}_n(B_k) \notin u_0,$$

что противоречит лемме 3. Теорема доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathcal{L}$ – класс всех замкнутых множеств σ -топологического пространства (T, η) , $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}$. Будем говорить, что классы множеств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{L}$ η -отделимы, если для любых непересекающихся множеств $F \in \mathcal{F}$ и $L \in \mathcal{L}$ существуют такие открытые непересекающиеся множества $U, V \in \eta$, что $F \subset U$, $L \subset V$.

ПРИМЕРЫ. 1. Пусть (T, η) – регулярное топологическое пространство; пусть $\mathcal{L}$ – класс всех замкнутых множеств пространства (T, η) . Если $\mathcal{F}$ – некоторый класс замкнутых компактных множеств пространства (T, η) , то классы множеств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{L}$ η -отделимы.

2. Пусть (T, η) – регулярное хаусдорфово топологическое пространство; пусть $\mathcal{L}$ – класс всех замкнутых множеств пространства (T, η) . Если $\mathcal{F}$ – некоторый класс компактных множеств пространства (T, η) , то классы множеств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{L}$ η -отделимы.

3. Пусть (T, η) – нормальное топологическое пространство; пусть $\mathcal{L}$ – класс всех замкнутых множеств пространства (T, η) . Если $\mathcal{F}$ – некоторый класс замкнутых множеств пространства (T, η) , то классы множеств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{L}$ η -отделимы.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть (T, η) , Σ и $\mathcal{F}$ те же, что и в теореме 1. Пусть $\mathcal{L}$ – класс всех замкнутых множеств пространства (T, η) и классы множеств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{L}$ η -отделимы. Если $\Phi = \{\varphi\}$ – семейство слабо $\mathcal{F}$ -регулярных, равномерно квазитреугольных функций множества, заданных на алгебре $\Sigma \supset \eta$ и принимающих значения в топологическом пространстве X , то справедлива импликация

$$(\Phi, PCH)_{\Sigma} \Rightarrow (\Phi, PH)_{\Sigma}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если классы множеств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{L}$ η -отделимы, то каждое множество $L \in \mathcal{L}$ является внешне регулярным по отношению к семейству функций множества $\Phi = \{\varphi\}$. Осталось применить теорему 1.

ТЕОРЕМА 2. Пусть (T, η) – регулярное хаусдорфово топологическое пространство, Σ – некоторая алгебра подмножеств множества T , причем $\Sigma \supset \eta$; пусть $\mathcal{F}$ – класс компактных множеств пространства (T, η) , а $\Phi = \{\varphi\}$ – семейство слабо $\mathcal{F}$ -регулярных, равномерно квазитреугольных функций множества, заданных на алгебре $\Sigma \supset \eta$ и принимающих значения в топологическом пространстве X .

Следующие условия эквивалентны.

I. Функции множества семейства Φ равномерно исчерпывающие на классе η открытых множеств.

II. Для любого множества $E \in \Sigma$ и для любой окрестности $u \in \mathcal{H}$ существует такое компактное множество F , что $F \subset E$ и $\tilde{\varphi}(E \setminus F) \subset u$ для любой функции $\varphi \in \Phi$.

III. Функции множества семейства Φ равномерно непрерывные на Σ .

IV. Функции множества семейства Φ равномерно слабо непрерывные на классе η открытых множеств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Если функции множества семейства Φ равномерно исчерпывающие на классе η открытых множеств, то по лемме 3 работы [8, с. 106–107] для любого множества $E \in \Sigma$ и для любой окрестности $u \in \mathcal{H}$ существует такой набор попарно непересекающихся компактных множеств $F_1, \dots, F_n$, что

$$F_i \subset E, \quad i = 1, \dots, n, \quad \tilde{\varphi}\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^n F_i\right) \subset u$$

для любой функции $\varphi \in \Phi$.

Отсюда следует справедливость импликации (I) $\Rightarrow$ (II).

2. Пусть выполнено условие (II). Покажем, что в этом случае выполняются условия теоремы 1.

Пусть $u \in \mathcal{H}$, а L – некоторое замкнутое множество. По условию существует такое компактное множество F , что

$$F \subset T \setminus L \text{ и } \tilde{\varphi}((T \setminus L) \setminus F) \subset u$$

для любой функции $\varphi \in \Phi$. Положим $U = T \setminus F$; тогда

$$L \subset U \text{ и } \tilde{\varphi}(U \setminus L) \subset u$$

для любой функции $\varphi \in \Phi$.

Пусть $\{E_n\}$ – некоторый локализатор из Σ . По условию для каждого множества E_n существует такое компактное множество F_n , что

$$F_n \subset E_n, \quad \tilde{\varphi}(E_n \setminus F_n) \subset u_n \quad (13)$$

для любой функции $\varphi \in \Phi$.

Так как

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset,$$

существует номер n_0 такой, что

$$\bigcap_{n=1}^{n_0} F_n = \emptyset.$$

Из соотношений

$$E_{n_0} = E_{n_0} \setminus \bigcap_{n=1}^{n_0} F_n = \bigcup_{n=1}^{n_0} (E_{n_0} \setminus F_n) \subset \bigcup_{n=1}^{n_0} (E_n \setminus F_n)$$

в силу условия (13) и выбора последовательности $\{u_n\} \subset \mathcal{H}$ следует

$$\tilde{\varphi}(E_{n_0}) \subset u$$

для любой функции $\varphi \in \Phi$.

Таким образом, условия теоремы 1 выполнены. Следовательно, функции множества семейства Φ равномерно непрерывны на Σ и импликация (II) $\Rightarrow$ (III) доказана.

3. Справедливость импликации (III) $\Rightarrow$ (IV) следует из определений свойства равномерной непрерывности, свойства равномерной слабой непрерывности и условия $\Sigma \supset \eta$.

4. Пусть функции множества семейства Φ равномерно слабо непрерывны на классе η открытых множеств. Пусть $u \in \mathcal{H}$; $\{U_n\}$ – некоторый спектр из η . Положим

$$E_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} U_k, \quad n = 1, 2, \dots$$

Так как последовательность множеств $\{E_n\}$ является локализатором из η , существует номер n_0 такой, что для всех номеров $n > n_0$ и для любой функции $\varphi \in \Phi$ справедливо

$$\varphi(E_n) \in u_0.$$

Отсюда и из соотношения $E_n = U_n \cup E_{n+1}$ в силу выбора окрестности $u_0 \in \mathcal{H}$ следует, что для любого номера $n > n_0$ и для любой функции $\varphi \in \Phi$ справедливо

$$\varphi(U_n) \in u,$$

что означает равномерную исчерпываемость функций множества семейства Φ на классе η открытых множеств. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Grothendieck A. Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$ // Canad. J. Math. 1953. V. 51. P. 129–173.
- [2] Stein J. D. Uniform absolute continuity in spaces of set functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1975. V. 51. № 1. P. 137–140.
- [3] Александров А. Д. Аддитивные функции множества в абстрактных пространствах // Матем. сб. 1941. Т. 9(51). С. 563–628.
- [4] Халмош П. Теория меры. М.: ИЛ, 1953.
- [5] Саженов А. Н. Ограниченность векторных мер // Матем. заметки. 1979. Т. 25. № 6. С. 913–917.
- [6] Гусельников Н. С. О продолжении квазилиппицевых функций множества // Матем. заметки. 1975. Т. 17. № 1. С. 21–31.
- [7] Drewnowski L. Additive and countable additive correspondences // Roczn. Pol. Tow. Mat. Ser. I. 1976. V. 19. № 1. P. 25–54.
- [8] Климкин В. М., Срибная Т. А. Сходимость последовательности слабо регулярных функций множества // Матем. заметки. 1997. Т. 62. № 1. С. 103–110.

Самарский государственный университет

Поступило
10.07.2000