Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Марченков, О полиномиальной вычислимости некоторых рудиментарных предикатов, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 1, 69–75

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm246>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 13:46:01

УДК 519.712

О ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ВЫЧИСЛИМОСТИ НЕКОТОРЫХ РУДИМЕНТАРНЫХ ПРЕДИКАТОВ

С. С. Марченков

Класс рудиментарных предикатов определяется как наименьший класс числовых предикатов, который содержит предикаты равенства и конкатенации и замкнут относительно операций логики высказываний, явных преобразований и навешивания ограниченных кванторов. Рассматриваются два класса рудиментарных предикатов. Первый класс состоит из предикатов, которые имеют в предваренной нормальной форме специального вида кванторную приставку типа $\exists\forall$. У предикатов второго класса кванторная приставка может быть произвольной, но ограничения налагаются на скулемовские разрешающие функции. Доказывается, что любой предикат каждого из этих классов можно вычислить подходящим детерминированным алгоритмом за полиномиальное время.

Библиография: 8 названий.

Одной из распространенных форм представления числовых предикатов, часто встречающейся в теории алгоритмов, алгебре и теории чисел, является форма

$$(Q_1 y_1)_{y_1 \leq z_1} \dots (Q_n y_n)_{y_n \leq z_n} \rho(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n), \quad (1)$$

где $Q_1, \dots, Q_n$ – кванторы $\exists$ или $\forall$, а предикат ρ получается из арифметических предикатов $x + y = z$ и $x \cdot y = z$ с помощью операций логики высказываний и явных преобразований (перестановка и отождествление аргументов, введение фиктивных аргументов, подстановка констант). Класс предикатов, представимых в форме (1), с небольшими техническими отличиями был определен А. В. Кузнецовым [1], как класс ограниченно-арифметических предикатов, и Р. Смальяном [2], как класс конструктивно-арифметических предикатов. В книге [2] введено также понятие рудиментарного предиката. Совпадение классов ограниченно-арифметических, конструктивно-арифметических и рудиментарных предикатов установлено в [2]–[5].

При определении рудиментарных предикатов предполагается, что натуральные числа кодируются взаимно-однозначным образом словами в алфавите $\{1, 2\}$: слову $a_l a_{l-1} \dots a_1$, составленному из символов 1 и 2, сопоставляется натуральное число

$$\sum_{i=1}^l a_i \cdot 2^{i-1}. \quad (2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00351.

Слово $a_l a_{l-1} \dots a_1$ называется *диадическим представлением* числа (2).

В качестве исходных рудиментарных предикатов рассматриваются предикаты равенства $x = y$ и конкатенации $xy = z$ (конкатенация диадических представлений чисел x и y есть диадическое представление числа z). Класс рудиментарных предикатов определяется как наименьший класс числовых предикатов, который содержит предикаты равенства и конкатенации и который замкнут относительно операций логики высказываний, явных преобразований и навешивания ограниченных кванторов $(\exists y)_{y \leq z}$ и $(\forall y)_{y \leq z}$.

В книге [6] установлено (см. раздел III, гл. 1, § 6, теоремы 10, 11), что класс рудиментарных предикатов совпадает с классом всех предикатов, представимых в форме

$$(Q_1 y_1)_{y_1 \leq z_1} \dots (Q_n y_n)_{y_n \leq z_n} (T = U), \quad (3)$$

а также с классом всех предикатов, представимых в форме

$$(Q_1 y_1)_{|y_1| \leq |z_1|} \dots (Q_n y_n)_{|y_n| \leq |z_n|} (T = U), \quad (4)$$

где $Q_1, \dots, Q_n$ – кванторы $\exists$ или $\forall$, T и U – словарные термы, составленные из символов переменных и слов в алфавите $\{1, 2\}$, а $|y|$ обозначает длину диадического представления числа y .

Попытки вычисления рудиментарных предикатов непосредственно по формулам (3) или (4) в общем случае приводят к экспоненциальному (относительно длин диадических представлений аргументов) времени вычисления. В работе [7] обнаружено, что рудиментарные $\exists$ - и $\forall$ -предикаты (предикаты, в предваренной нормальной форме которых все кванторы совпадают) можно вычислить детерминированно за полиномиальное время. Дальнейшее развитие идеи, предложенной в [7], позволяет выделить еще два класса рудиментарных предикатов, которые обладают этим свойством. Первый класс состоит из предикатов, имеющих в представлениях (3) или (4) кванторную приставку типа $\exists\forall$ (класс рудиментарных $\exists\forall$ -предикатов). Во втором классе число перемен кванторов в кванторных приставках в целом не ограничено, однако ограничения накладываются на скелетовские разрешающие функции (см. определения ниже). Предикаты второго класса названы в работе компактными рудиментарными предикатами.

Хотя все формулируемые ниже результаты имеют место как при использовании представлений (3), так и при использовании представлений (4), по техническим причинам нам будет удобнее в дальнейшем иметь дело лишь с представлениями (4).

Что касается вопроса о возможном обобщении полученных в работе результатов на более широкие классы рудиментарных предикатов, то здесь необходимо сделать следующее замечание. Как установлено в работах [5], [7], средствами рудиментарных предикатов возможно моделирование недетерминированных и альтернирующих вычислений на машинах Тьюринга со входом, работающих с полиномиальным временем и с зоной, ограниченной функцией вида l^γ , где $0 < \gamma < 1$. Поэтому, например, возможность вычисления произвольных рудиментарных предикатов детерминированно за полиномиальное время представляется маловероятной.

Переходя к определениям, будем говорить, что рудиментарный предикат ρ принадлежит классу $\exists\forall$ (или является $\exists\forall$ -предикатом), если ρ представим в форме (4), где в кванторной приставке $Q_1 \dots Q_n$ все кванторы существования предшествуют всем кванторам общности.

Ниже в теоремах 1, 2 речь идет о детерминированных алгоритмах с полиномиальным временем работы. Мы описываем эти алгоритмы содержательным образом, имея в виду, что выбран достаточно широкий класс абстрактных вычислительных устройств, и оба алгоритма реализуются вычислительными устройствами этого класса. Возникающие при этом формулы, кодируются “естественным образом” словами некоторого конечного алфавита. Все оценки времени вычисления выражаются через длины диадических представлений аргументов.

ТЕОРЕМА 1. *Любой рудиментарный предикат класса $\exists\forall$ можно вычислить подходящим детерминированным алгоритмом за полиномиальное время.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть рудиментарный $\exists\forall$ -предикат $\rho(x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_n)$ представим в форме

$$(\exists y_1)_{|y_1| \leq |z_1|} \dots (\exists y_p)_{|y_p| \leq |z_p|} (\forall y_{p+1})_{|y_{p+1}| \leq |z_{p+1}|} \dots (\forall y_n)_{|y_n| \leq |z_n|} (T = U), \quad (5)$$

где словарные термы T, U составлены из символов переменных $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$ и слов в алфавите $\{1, 2\}$. Введем обозначения

$$k_1 = |x_1|, \dots, k_m = |x_m|, \quad l_1 = |z_1|, \dots, l_n = |z_n|. \quad (6)$$

Очевидно, что формула (5) эквивалентна формуле

$$\begin{aligned} & \bigvee_{1 \leq i_1 \leq l_1, \dots, 1 \leq i_p \leq l_p} (\exists y_1)_{|y_1| = i_1} \\ & \dots (\exists y_p)_{|y_p| = i_p} \left(\bigwedge_{1 \leq i_{p+1} \leq l_{p+1}, \dots, 1 \leq i_n \leq l_n} (\forall y_{p+1})_{|y_{p+1}| = i_{p+1}} \right. \\ & \left. \dots (\forall y_n)_{|y_n| = i_n} (T = U) \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Для каждой из переменных x_s, y_t ($1 \leq s \leq m, 1 \leq t \leq n$) введем множества двоичных переменных $x_1^s, \dots, x_{k_s}^s$ и $y_1^t, \dots, y_{l_t}^t$, значениями которых служат символы 1 и 2. В формуле (7) произведем замену каждой переменной x_s ($1 \leq s \leq m$) блоком переменных $x_1^s \dots x_{k_s}^s$ и каждой переменной y_t ($1 \leq t \leq n$) блоком переменных $y_1^t \dots y_{l_t}^t$. Тогда формула (7) будет эквивалентна формуле

$$\begin{aligned} & \bigvee_{1 \leq i_1 \leq l_1, \dots, 1 \leq i_p \leq l_p} (\exists y_1^1) \dots (\exists y_{i_1}^1) \dots (\exists y_1^p) \dots (\exists y_{i_p}^p) \left(\bigwedge_{1 \leq i_{p+1} \leq l_{p+1}, \dots, 1 \leq i_n \leq l_n} \right. \\ & \left. (\forall y_1^{p+1}) \dots (\forall y_{i_{p+1}}^{p+1}) \dots (\forall y_1^n) \dots (\forall y_{i_n}^n) (T' = U') \right), \end{aligned} \quad (8)$$

где словарные термы T', U' получены из словарных термов T, U указанной выше заменой переменных.

Считая фиксированными значения $k_1, \dots, k_m, i_1, \dots, i_n$, проведем дальнейшие преобразования формулы $T' = U'$. Если $|T'| \neq |U'|$, то соответствующие конъюнктивный сомножитель и дизъюнктивное слагаемое формулы (8) будут ложными. Предположим, что $|T'| = |U'|$. Сравним тогда в термах T' и U' символы, стоящие на одинаковых позициях. Это сравнение даст систему равенств W , состоящую из равенств вида

$$x_q^s = x_r^t, \quad x_q^s = y_r^t, \quad x_q^s = a, \quad y_q^s = y_r^t, \quad y_q^s = a, \quad a = b, \quad (9)$$

где $a, b \in \{1, 2\}$. Очевидно, что система равенств W эквивалентна равенству $T' = U'$. Образует далее транзитивное замыкание системы равенств W . Возможно, что при этом возникнут противоречивые равенства. В этом случае соответствующие конъюнктивный сомножитель и дизъюнктивное слагаемое формулы (8) будут, разумеется, ложными. Если же противоречивых равенств в транзитивном замыкании не образовалось, то формула $T' = U'$ будет эквивалентна конъюнкции K_1 равенств вида

$$v_1 = \dots = v_d \quad \text{или} \quad v_1 = \dots = v_d = a, \quad (10)$$

где $v_1, \dots, v_d$ – переменные типов $x_q^s, y_r^t, a \in \{1, 2\}$ и различные формулы конъюнкции K_1 не имеют общих переменных.

Таким образом, после исключения случаев тождественно ложных формул мы приходим к тому, что подформула

$$(\forall y_1^{p+1}) \dots (\forall y_{i_{p+1}}^{p+1}) \dots (\forall y_1^n) \dots (\forall y_{i_n}^n)(T' = U') \quad (11)$$

формулы (8) эквивалентна формуле

$$(\forall y_1^{p+1}) \dots (\forall y_{i_{p+1}}^{p+1}) \dots (\forall y_1^n) \dots (\forall y_{i_n}^n) K_1. \quad (12)$$

Согласно известным логическим правилам элиминируем в формуле (12) кванторы общности. Именно, если переменная y_r^t в конъюнкции K_1 входит в равенство (10), которое помимо переменной y_r^t содержит еще хотя бы одну переменную либо константу, то формула (12) ложна. В остальных случаях квантор $\forall y_r^t$ в формуле (12) можно опустить (заметим, что при получении системы равенств W могут появиться истинные равенства вида $y_r^t = y_r^t$, которые мы в дальнейшем не учитываем).

Итак, всякая подформула (11) формулы (8) либо тождественно ложна, либо эквивалентна бескванторной формуле, представляющей собой конъюнкцию формул вида (10), где $v_1, \dots, v_d$ – переменные типов $x_q^s, y_r^t, 1 \leq t \leq p$ (сюда же мы относим частный случай, когда формула (11) тождественно истинна). Поэтому аналогичное утверждение будет справедливо и для подформулы

$$\&_{1 \leq i_{p+1} \leq l_{p+1}, \dots, 1 \leq i_n \leq l_n} (\forall y_1^{p+1}) \dots (\forall y_{i_{p+1}}^{p+1}) \dots (\forall y_1^n) \dots (\forall y_{i_n}^n)(T' = U') \quad (13)$$

формулы (8).

Считая значения $k_1, \dots, k_m, i_1, \dots, i_p$ фиксированными, а формулу (13) отличной от тождественно ложной и тождественно истинной формулы, обозначим через K_2 конъюнкцию равенств вида (10), которая по доказанному соответствует формуле (13). Элиминируем теперь в формуле

$$(\exists y_1^1) \dots (\exists y_{i_1}^1) \dots (\exists y_1^p) \dots (\exists y_{i_p}^p) K_2 \quad (14)$$

кванторы существования. Для этого воспользуемся хорошо известными эквивалентностями:

$$\begin{aligned} (\exists v_1)(v_1 = \dots = v_d) &\equiv \begin{cases} \text{И,} & \text{если } d = 2, \\ v_2 = \dots = v_d, & \text{если } d > 2, \end{cases} \\ (\exists v_1)(v_1 = \dots = v_d = a) &\equiv \begin{cases} \text{И,} & \text{если } d = 1, \\ v_2 = \dots = v_d = a, & \text{если } d > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

В результате получим, что каждая формула вида (14) либо тождественно истинна, либо эквивалентна бескванторной формуле, представляющей собой конъюнкцию формул вида (10), где $v_1, \dots, v_d$ – переменные типа x_q^s . Остается для заданных $x_1, \dots, x_m$ проверить истинность каждой из таких формул и в соответствии со строением формулы (8) вычислить дизъюнкцию полученных $l_1 \cdot \dots \cdot l_p$ истинностных значений.

Сквозной просмотр описанного выше алгоритма показывает, что полиномиальное возрастание длин обрабатываемых формул и соответственно полиномиальные затраты на время вычисления происходят дважды (см. структуру формулы (8)): при переходе от формул (12) к формулам (13) и при переходе от формул (14) к исходной формуле (8). Теорема доказана.

Перейдем к рассмотрению рудиментарных предикатов с произвольной кванторной приставкой. Пусть предикат $\rho(x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_n)$ определяется формулой (4). Для всякой переменной y_j , для которой формула (4) содержит квантор существования по y_j , введем функцию

$$f_j(x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_n, y_{j1}, \dots, y_{jr_j}), \quad (15)$$

где $y_{j1}, \dots, y_{jr_j}$ – все переменные из множества $\{y_1, \dots, y_n\}$, которые в формуле (4) связаны кванторами общности, предшествующими квантору $\exists y_j$. Функции (15) носят название *скулемовских разрешающих функций* (см., например, [8]); переменные $x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_n$ в формулах (15) у нас играют роль параметров.

Функции (15) по определению обладают следующим свойством. Если при выбранных значениях $x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_n$ значение $\rho(x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_n)$ истинно, то для любых значений переменных y_k , стоящих в формуле (4) под кванторами общности, функции (15) дают такие значения переменных y_j , которые выполняют формулу $T = U$. При этом, разумеется, как значения переменных y_k , так и значения функций (15) подчиняются ограничениям на длины диадических представлений, имеющихся в формуле (4). Отметим еще, что функции (15), рассматриваемые от всех переменных $x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_n, y_{j1}, \dots, y_{jr_j}$, являются, вообще говоря, частичными: мы не требуем определения их значений в том случае, когда значение $\rho(x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_n)$ ложно.

Рудиментарный предикат $\rho(x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_n)$, представимый в форме (4), назовем *компактным*, если для него возможен выбор таких скулемовских функций (15), которые обладают следующим свойством: если наборы

$$(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_{r_j}), \quad (a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n, c'_1, \dots, c'_{r_j})$$

входят в область определения функции (15) и

$$|c_1| = |c'_1|, \dots, |c_{r_j}| = |c'_{r_j}|,$$

то

$$|f_j(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_{r_j})| = |f_j(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n, c'_1, \dots, c'_{r_j})|.$$

ТЕОРЕМА 2. *Любой компактный рудиментарный предикат можно вычислить подходящим детерминированным алгоритмом за полиномиальное время.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть рудиментарный предикат $\rho(x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_n)$ представим формулой (4) и для него существуют скелемовские разрешающие функции (15), которые удовлетворяют сформулированному выше условию компактности. Как и в теореме 1, будем пользоваться обозначениями (6). Зафиксируем значения $k_1, \dots, k_m, l_1, \dots, l_n, i_1, \dots, i_n$, где $1 \leq i_1 \leq l_1, \dots, 1 \leq i_n \leq l_n$. Попытаемся выяснить, может ли при заданных значениях $x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_n$, удовлетворяющих соотношениям (6), выполняться часть формулы (4), когда переменные y_d , стоящие в формуле (4) под кванторами общности, принимают значения из множеств $\{y_d: |y_d| = i_d\}$, а значения переменных y_j , даваемые функциями (15), принадлежат множествам $\{y_j: |y_j| = i_j\}$. Для этого так же, как и в теореме 1, введем двоичные переменные

$$x_1^s, \dots, x_{k_s}^s, y_1^t, \dots, y_{i_t}^t, \quad 1 \leq s \leq m, \quad 1 \leq t \leq n,$$

заменяем в термах T, U переменные x_s, y_t блоками $x_1^s \dots x_{k_s}^s$ и $y_1^t \dots y_{i_t}^t$ и обозначим полученные после этой замены термы через T' и U' . Если $|T'| = |U'|$, то сравним далее в термах T', U' символы, стоящие на одинаковых позициях, образуем систему равенств W вида (9) и затем транзитивное замыкание системы равенств W . Если транзитивное замыкание не содержит противоречивых равенств, то приходим к конъюнкции K_1 равенств вида (10), которая эквивалентна формуле $T' = U'$.

Чтобы теперь дать ответ на поставленный выше вопрос, необходимо проверить, могут ли (при фиксированных значениях переменных $x_1, \dots, x_m$) переменные $y_1^j, \dots, y_{i_j}^j$, выражающие значения функции (15), быть в конъюнкции K_1 функциями от переменных $y_1^c, \dots, y_{i_c}^c$, где $y_c \in \{y_{j1}, \dots, y_{jr_j}\}$. Считая, что при заданных значениях переменных $x_1^1, \dots, x_{k_1}^1, \dots, x_1^m, \dots, x_{k_m}^m$ в конъюнкции K_1 противоречивых равенств не образуется, замечаем, что сформулированное требование будет выполняться, если любое равенство конъюнкции K_1 , в которое входит переменная типа y_q^j , где переменная y_j связана в формуле (4) квантором существования, не содержит:

- 1) переменной типа x_p^s и переменной типа y_r^t , где переменная y_t связана в формуле (4) квантором общности;
- 2) константы 1 или 2 и переменной типа y_r^t , где переменная y_t связана в формуле (4) квантором общности;
- 3) двух различных переменных типа y_r^t , где переменная y_t связана в формуле (4) квантором общности;
- 4) переменной типа y_r^t , где переменная y_t связана в формуле (4) квантором общности, следующим в кванторной приставке за квантором $\exists y_j$.

Таким образом, чтобы выяснить, может ли при заданных значениях $x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_n$, удовлетворяющих соотношениям (6), выполняться часть формулы (4), когда переменные y_d , связанные в формуле (4) кванторами общности, принимают значения из множеств $\{y_d: |y_d| = i_d\}$, необходимо провести описанную выше проверку “на функциональность”, задавая переменным y_j , которые связаны в формуле (4) кванторами существования, всевозможные области изменения $\{y_j: |y_j| = i_j\}$, $1 \leq i_j \leq l_j$. Очевидно, на этом этапе будет затрачено полиномиальное (относительно длин диадических представлений $x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_n$) время. Полностью процесс вычисления значения $\rho(x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_n)$ состоит в выполнении предыдущего этапа при всевозможном выборе областей изменения $\{y_d: |y_d| = i_d\}$, $1 \leq i_d \leq l_d$, для переменных y_d , связанных в формуле (4) кванторами общности. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Хотя теорема 2 имеет вид положительного утверждения, ее значение имеет скорее отрицательную направленность. Как показывают результаты работ [5], [7], маловероятно, чтобы любой рудиментарный предикат можно было вычислить детерминированным алгоритмом за полиномиальное время. Поэтому теореме 2 можно рассматривать как довод в пользу того, что не все рудиментарные предикаты являются компактными.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кузнецов А. В. К теореме о канонической форме для ординальнорекурсивных функций // Гудстейн Р. Л. Математическая логика. М.: ИЛ, 1961. С. 149–154.
- [2] Смальян Р. Теория формальных систем. М.: Наука, 1981.
- [3] Непомнящий В. А. Рудиментарные предикаты и тьюринговы вычисления // Докл. АН СССР. 1970. Т. 195. № 2. С. 282–284.
- [4] Непомнящий В. А. Рудиментарная интерпретация двуленточных тьюринговых вычислений // Кибернетика. 1970. № 2. С. 29–35.
- [5] Непомнящий В. А. Рудиментарное моделирование недетерминированных тьюринговых вычислений // Кибернетика. 1973. № 2. С. 23–29.
- [6] Косовский Н. К. Элементы математической логики и ее приложения к теории субрекурсивных алгоритмов. Ленинград: Из-во Ленинградского ун-та, 1981.
- [7] Марченков С. С. О сложности вычисления рудиментарных предикатов // Дискретная матем. 2000. Т. 12. № 4. С. 83–98.
- [8] Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. М.: Наука, 1979.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
17.01.2001