Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Г. Абдуллаев, А. А. Довгошей, Теорема Сегё, области Каратеодори и ограниченность вычисляющих функционалов, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 1, 3–15

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2464>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 16:24:45

УДК 517.53

ТЕОРЕМА СЕГЁ, ОБЛАСТИ КАРАТЕОДОРИ И ОГРАНИЧЕННОСТЬ ВЫЧИСЛЯЮЩИХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Ф. Г. Абдуллаев, А. А. Довгошей

Пусть G – ограниченная односвязная область на плоскости, с границей Γ , $z_0 \in G$, ω – гармоническая мера на Γ относительно z_0 , μ – конечная борелевская мера с носителем $\text{supp}(\mu) \subseteq \Gamma$, $\mu_a + \mu_s$ – декомпозиция μ относительно ω , t – положительное действительное число. Решается следующая задача: при какой геометрии области G условие

$$\int \ln \left(\frac{d\mu_a}{d\omega} \right) d\omega = -\infty$$

равносильно полноте полиномов в $L^t(\mu)$ или неограниченности вычисляющего функционала $p \rightarrow p(z_0)$, p – полином в $L^t(\mu)$? Исследуется взаимосвязь плотности алгебр рациональных функций в $L^t(\mu)$ и $C(\Gamma)$. При $t = 2$ для конечных борелевских мер с произвольной геометрией носителя найден достаточный признак неограниченности вычисляющего функционала.

Библиография: 22 названия.

1. Введение. Постановка задачи. Пусть K – компактное подмножество плоскости $\mathbb{C}$, $\mathcal{M}$ – семейство всех конечных положительных борелевских мер μ с компактными носителями $S_\mu \subseteq \mathbb{C}$ и $\mathcal{M}(K) := \{\mu \in \mathcal{M} : S_\mu \subseteq K\}$. Обозначим через Π множество всех полиномов от переменной z с коэффициентами из $\mathbb{C}$, а для $z_0 \in \mathbb{C}$ $\Pi_{z_0} := \{p \in \Pi : p(z_0) = 0\}$. При $t > 0$ положим $P^t(\mu)$ – замыкание множества полиномов в $L^t(\mu)$:

$$P^t(\mu) := Cl_{L^t(\mu)}(\Pi),$$

и пусть

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^t(K) &:= \{\mu \in \mathcal{M}(K) : P^t(\mu) = L^t(\mu)\}, \\ \mathcal{P}^t(K, z_0) &:= \{\mu \in \mathcal{M}(K) : P^t(\mu) = Cl_{L^t(\mu)}(\Pi_{z_0})\}. \end{aligned}$$

При $K = \mathbb{T} := \{z : |z| = 1\}$ классическая теорема Сегё–Колмогорова–Крейна утверждает, что для любой $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ и любого $t > 0$

$$\inf_{p \in \Pi_0} \left(\int |1 - p|^t d\mu \right) = \exp \left(\ln \left(\frac{d\mu_a}{d\omega} \right) d\omega \right), \quad (1)$$

Работа второго автора выполнена при поддержке The Scientific and Technical Research Council of Turkey (TUBITAK NATO PC-B) и ДФФД Украины, грант № 01.07/00241.

где ω – нормированная линейная мера Лебега на $\mathbb{T}$ (совпадающая в этом случае с гармонической мерой относительно точки $z_0 = 0$); μ_a – абсолютно непрерывная составляющая μ в декомпозиции Лебега $\mu = \mu_a + \mu_s$ относительно ω , а $d\mu_a/d\omega$ – производная Радона–Никодима μ_a относительно ω .

Из этой теоремы для любой $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ легко следует эквивалентность следующих утверждений:

- $\int \ln \left(\frac{d\mu_a}{d\omega} \right) d\omega = -\infty$;
- $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$ для любого $t > 0$;
- $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{T}, z_0)$ для любого $t > 0$ и любого z_0 из круга $\{z : |z| < 1\}$.

Пусть G – ограниченная односвязная область в $\mathbb{C}$, $z_0 \in G$, $\omega = \omega(z_0, G, \cdot)$ – гармоническая мера на $\Gamma = \partial G$ относительно z_0 . Для каждой меры $\mu \in \mathcal{M}$ имеем разложение $\mu = \mu_a + \mu_s$, где $\mu_a \ll \omega$ – мера μ_a абсолютно непрерывна относительно ω , а $\mu_s \perp \omega$ – меры μ_s и ω взаимно сингулярны. Положим

$$\mathcal{M}^-(G, z_0) := \left\{ \mu \in \mathcal{M} : \int \ln \left(\frac{d\mu_a}{d\omega} \right) d\omega = -\infty \right\}.$$

Основное содержание данной работы составляет решение следующей задачи. Какую геометрию имеет Γ – граница области G , если для некоторого $z_0 \in G$ выполняется равенство $\mathcal{M}^-(G, z_0) \cap \mathcal{M}(\Gamma) = \mathcal{P}^t(\Gamma)$ или $\mathcal{M}^-(G, z_0) \cap \mathcal{M}(\Gamma) = \mathcal{P}^t(\Gamma, z_0)$?

Формула (1) была установлена Г. Сегё в [1] для абсолютно непрерывных мер. В общем случае это доказано А. Н. Колмогоровым [2] и М. Г. Крейном [3]. Для любого компакта $K \subseteq \mathbb{C}$ условие $\mu \notin \mathcal{P}^t(K, z_0)$ эквивалентно неравенству

$$\sup \{ |p(z_0)| : p \in \Pi, \|p\|_{L^t(\mu)} \leq 1 \} < \infty, \quad (2)$$

т.е. ограниченности вычисляющего функционала

$$F: \Pi \rightarrow \mathbb{C}, \quad F(p) = p(z_0),$$

по норме пространства $L^t(\mu)$ (см., например, лемму 7 настоящей работы).

Точка z_0 называется ВРЕ¹ *точкой* для полиномов в $L^t(\mu)$, если выполнено неравенство (2). С результатами исследований множества ВРЕ точек, связанных с полиномиальной аппроксимацией в $L^t(\mu)$, и обобщениями теоремы Сегё, можно познакомиться по работам Д. Томсона [4], [5], Д. Акеройда [6], [7], Д. Акеройда и Э. Салиби [8], [9]. Например, в [8], [9] исследуется зависимость множества ВРЕ от t . Случай $t = 2$ изложен в монографии Д. Конвея [10]. Из более ранних работ этого направления отметим статьи А. Вольберга [11] и Т. Трента [12]. В настоящей работе используется вариант теоремы Сегё для алгебр Дирихле (см., например, [13]), восходящей к Г. Хельсону и Д. Лауденслегеру [14].

¹ВРЕ – сокращение английского термина bounded point evaluation.

2. Формулировка основных результатов. Пусть G – односвязная ограниченная область с границей Γ . Всюду далее $\{G_i : i \in I\}$ – множество ограниченных компонент связности открытого множества $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, а $\{z_i : i \in I\}$ – множество точек такое, что $z_i \in G_i$ при любом $i \in I$. Напомним, что область G называется *областью Каратеодори*, если $\Gamma = \partial G_\infty$, где G_∞ – неограниченная компонента связности множества $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если G – область Каратеодори, то используя равенства (3), (4) из теоремы 1, сформулированной ниже, можно показать, что

$$\mathcal{P}^t(\Gamma) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{P}^{t_i}(\Gamma, z_i),$$

где $t_i > 0$ при $i \in I$.

Под *гармонической мерой* $\omega(z_0, G, \cdot)$ в дальнейшем понимается представляющая мера непрерывного функционала

$$\varphi_{z_0} : C(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi_{z_0}(f) = \tilde{f}(z_0),$$

где $C(\Gamma)$ – алгебра непрерывных комплексно-значных функций на Γ с нормой

$$\|f\| = \sup\{|f(z)| : z \in \Gamma\},$$

а для любой $f \in C(\Gamma)$ $\tilde{f}$ – гармоническая в G и непрерывная в $\overline{G}$ функция, для которой $\tilde{f}|_\Gamma = f$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – произвольная ограниченная односвязная область, $z_0 \in G$ и $0 < t < \infty$. Тогда выполнены следующие утверждения.

(а) Если G – область Каратеодори, то имеют место равенства

$$\mathcal{M}(\Gamma) \cap \mathcal{M}^-(G, z_0) = \mathcal{P}^t(\Gamma, z_0), \quad (3)$$

$$\mathcal{P}^t(\Gamma) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{M}^-(G_i, z_i) \cap \mathcal{M}(\Gamma). \quad (4)$$

(б) Если выполнено (3), то G – область Каратеодори.

(с) G – область Каратеодори и $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ связно тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{M}(\Gamma) \cap \mathcal{M}^-(G, z_0) = \mathcal{P}^t(\Gamma) = \mathcal{P}^t(\Gamma, z_0). \quad (5)$$

(д) Если G – не является областью Каратеодори, то

$$(\mathcal{M}(\Gamma) \cap \mathcal{M}^-(G, z_0)) \setminus \mathcal{P}^t(\Gamma, z_0) \neq \emptyset. \quad (6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Так как $\mathcal{P}^t(\Gamma) \subseteq \mathcal{P}^t(\Gamma, z_0)$, то для односвязных ограниченных областей G , не являющихся областями Каратеодори,

$$(\mathcal{M}(\Gamma) \cap \mathcal{M}^-(G, z_0)) \setminus \mathcal{P}^t(\Gamma) \neq \emptyset.$$

Пусть K – компактное подмножество комплексной плоскости. Рассмотрим семейство $\mathfrak{U}_r(K)$ всех подалгебр A алгебры $C(K)$ таких, что

- любой полином $p \in A$;
- любой элемент $r \in A$ есть рациональная функция с полюсами вне K .

Если $\mu \in \mathcal{M}(K)$ достаточно “массивна”, то можно ожидать, что из плотности A в $L^t(\mu)$ следует плотность A в $C(K)$. Каков критерий этой массивности? Для односвязной области G с границей Γ рассмотрим подмножество $\mathcal{M}_*^t(\Gamma) \subseteq \mathcal{M}(\Gamma)$ мер таких, что $\forall A \in \mathfrak{U}_r(\Gamma)$ из плотности A в $L^t(\mu)$ следует плотность A в $C(\Gamma)$. Положим

$$\mathcal{M}^+(\Gamma, z_0) := \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}^-(G, z_0) = \left\{ \mu \in \mathcal{M} : \int \ln \left(\frac{d\mu_a}{d\omega} \right) d\omega > -\infty \right\}.$$

В следующей теореме использованы обозначения теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. Пусть G – односвязная ограниченная область, $0 < t < \infty$. Тогда если G – область Каратеодори, то

$$\mathcal{M}_*^t(\Gamma) = \bigcap_{i \in I} (\mathcal{M}^+(G_i, z_i) \cap \mathcal{M}(\Gamma)), \quad (7)$$

а если G – произвольная односвязная область и $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ связно, то равенство

$$\mathcal{M}_*^t(\Gamma) = \mathcal{M}^+(G, z_0) \cap \mathcal{M}(\Gamma) \quad (8)$$

выполняется тогда и только тогда, когда G – область Каратеодори.

Если носитель меры μ не лежит на границе полиномиально-выпуклого компакта, то достаточно полный аналог теоремы Сегё не найден, хотя получен ряд интересных результатов (см. работы [4]–[12]). В этом случае определенный интерес представляют условия, достаточные для $P^t(\mu) = Cl_{L^t(\mu)}(\Pi_{z_0})$. Одно из таких условий сформулировано ниже для $t = 2$.

Пусть μ – произвольная конечная борелевская мера с компактным носителем S_μ , $\text{card}(S_\mu) = \infty$. Обозначим через $\alpha_n = \alpha_n(\mu)$ старший положительный коэффициент n -го ортонормированного полинома $p_n(\mu; \cdot)$, соответствующего мере μ ,

$$\begin{aligned} \int p_n(\mu; \cdot) \overline{p_m(\mu; \cdot)} d\mu &= \begin{cases} 1, & \text{при } n = m, \\ 0, & \text{при } n \neq m, \end{cases} \\ \deg(p_n(\mu; \cdot)) &= n, \quad p_n(\mu; z) = \alpha_n z^n + \dots \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\alpha_n} \right)^{1/n} < \text{cap}(\text{Int } \hat{S}_\mu), \quad (9)$$

где $\hat{S}_\mu$ – полиномиально выпуклая оболочка S_μ , $\text{Int } \hat{S}_\mu$ – множество внутренних точек $\hat{S}_\mu$, а $\text{cap}(\text{Int } \hat{S}_\mu)$ – логарифмическая емкость $\text{Int } \hat{S}_\mu$. Тогда существует точка $z_0 \in \text{Int } \hat{S}_\mu$ такая, что

$$1 \in Cl_{L^2(\mu)}(\Pi_{z_0}). \quad (10)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Предположим, что*

$$\text{cap}(S_\mu) = \text{cap}(\text{Int } \hat{S}_\mu). \quad (11)$$

Тогда если мера μ не является регулярной, то найдется точка $z_0 \in \text{Int } \hat{S}_\mu$, для которой выполняется (10).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Регулярность меры μ в следствии 1 понимается в соответствии с [15] как регулярность асимптотического поведения $\frac{1}{n} \ln |p_n(\mu; z)|$ при $n \rightarrow \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Знак “ $<$ ” в (9) нельзя заменить знаком “ $\leq$ ”. Тривиальный контрпример дает двумерная мера Лебега m_2 на единичном круге $\mathbb{D} := \{z : |z| < 1\}$. Регулярность в этом случае очевидна,

$$\text{cap}(\mathbb{D}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap} \left\{ z : |z| \leq 1 - \frac{1}{n} \right\} = 1 = \text{cap}(\overline{\mathbb{D}}),$$

но любая точка $\lambda \in \mathbb{D}$ является ВРЕ точкой.

3. Доказательства и леммы. Пусть B – алгебра Дирихле на компакте $K \subset \mathbb{C}$, $\mu \in \mathcal{M}(K)$, ν – представляющая мера мультипликативного линейного функционала $\varphi: B \rightarrow \mathbb{C}$, $B_0 := \{f \in B : \varphi(f) = 0\}$ – ядро функционала φ . Формула (1) в этом случае имеет вид (см., например, [13, гл. IV, теорема 4.3.3])

$$\inf_{f \in B_0} \int |1 - f|^t d\mu = \exp \int \ln \left(\frac{d\mu_a}{d\nu} \right) d\nu, \quad (12)$$

где μ_a – абсолютно непрерывная составляющая μ относительно ν , а t – произвольное положительное число.

Для того, чтобы использовать (12) при доказательстве теоремы 1, рассмотрим на Γ алгебры $C(\Gamma)$, $P(\Gamma)$ и $C_R(\Gamma)$, где $P(\Gamma)$ – замыкание множества полиномов Π в $C(\Gamma)$ и $C_R(\Gamma)$ – вещественно-значные непрерывные функции на Γ .

ЛЕММА 1. *Пусть G – произвольная область Каратеодори с границей Γ . Тогда*

- (i) $P(\Gamma)$ – алгебра Дирихле на Γ , т.е. $\text{Re}(P(\Gamma))$ всюду плотно в $C_R(\Gamma)$;
- (ii) функционал $\varphi_{z_0}: P(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi_{z_0}(f) = \tilde{f}(z_0)$, мультипликативен на $P(\Gamma)$;
- (iii) ядро функционала φ_{z_0} является замыканием множества Π_{z_0} в $C(\Gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) следует из определения области Каратеодори и теоремы Уолша–Лебега (см., например, [16, гл. II, теорема 3.3]).

(iii) есть частный случай теоремы Уолша о равномерной аппроксимации при наличии интерполяционных ограничений [17, гл. VI, теорема 6.5.1].

Проверим (ii). Если $f_1, f_2 \in P(\Gamma)$, то найдутся Φ_1, Φ_2 , голоморфные в G и непрерывные в $\overline{G}$, причем

$$\Phi_i|_{\Gamma} = f_i, \quad i = 1, 2, \quad \text{и} \quad \Phi_1 \cdot \Phi_2|_{\Gamma} = f_1 \cdot f_2.$$

В силу единственности решения задачи Дирихле

$$\varphi_{z_0}(f_i) = \Phi_i(z_0), \quad i = 1, 2 \quad \text{и} \quad \varphi_{z_0}(f_1 \cdot f_2) = \Phi_1(z_0) \cdot \Phi_2(z_0).$$

Следовательно, $\varphi_{z_0}(f_1 \cdot f_2) = \varphi_{z_0}(f_1) \cdot \varphi_{z_0}(f_2)$.

Следующие леммы достаточно хорошо известны.

ЛЕММА 2. Пусть G – произвольная область Каратеодори с границей Γ , $\{G_i : i \in I\}$ – множество ограниченных компонент связности открытого множества $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. Тогда каждая из областей G_i , $i \in I$, есть область Каратеодори.

ЛЕММА 3. Пусть G – ограниченная односвязная область с границей Γ , $z_0 \in G$, $\omega = \omega(z_0, G, \cdot)$. Тогда $\text{supp}(\omega) = \Gamma$.

ЛЕММА 4. Пусть G – область Каратеодори, $\overline{G}$ разбивает плоскость, $\omega_1 = \omega(G_1, z_1, \cdot)$ и $\omega_2 = \omega(G_2, z_2, \cdot)$ – гармонические меры, соответствующие различным ограниченным компонентам связности $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. Тогда $\omega_1 \perp \omega_2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Из леммы 2 следует, что заменив в лемме 1 z_0 на произвольное $z_i \in G_i$, $i \in I$, получим (i)–(iii) для $\varphi_{z_i} : P(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi_{z_i}(f) = \tilde{f}(z_i)$, где $\tilde{f}$ – гармоническое продолжение $f|_{\partial G_i}$ в $\overline{G_i}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. а) Пусть G – область Каратеодори и $\mu \in \mathcal{M}(\Gamma)$. Заменяя в (12) ν на $\omega = \omega(z_0, G, \cdot)$ и учитывая, что в силу пункта (iii) леммы 1

$$\inf_{f \in B_0} \int |1 - f|^t d\mu = \inf_{p \in \Pi_{z_0}} \int |1 - p|^t d\mu, \quad (13)$$

видим, что выполнено (13).

Проверим (4). Пусть $\mu \in \mathcal{P}^t(\Gamma)$. Тогда при любом $i \in I$ функция $(z - z_i)^{-1}$ принадлежит $P^t(\mu)$. Пусть $\{p_n\}$ – последовательность полиномов, сходящаяся к $(z - z_i)^{-1}$ в $L^t(\mu)$. Так как для любого $p \in \Pi$

$$\begin{aligned} (d_{1i})^{-t} \int |1 - (z - z_i)p(z)|^t d\mu(z) &\leq \int \left| \frac{1}{z - z_i} - p(z) \right|^t d\mu(z) \\ &\leq (d_{2i})^{-t} \int |1 - (z - z_i)p(z)|^t d\mu(z), \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$d_{1i} = \max\{|z - z_i| : z \in \Gamma\}, \quad d_{2i} = \min\{|z - z_i| : z \in \Gamma\},$$

то $(z - z_i)p_n(z) \rightarrow 1$ в $L^t(\mu)$. Следовательно, из леммы 2 и равенства 3

$$(\mu \in \mathcal{P}^t(\Gamma)) \implies \left(\mu \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{M}^-(G_i, z_i) \right).$$

Пусть $S_\mu \subseteq \Gamma$ и $\mu \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{M}^-(G_i, z_i)$. Так как $C(\Gamma)$ плотно в $L^t(\mu)$, а из теоремы Витушкина следует, что любая $f \in C(\Gamma)$ равномерно приближается на Γ рациональными функциями (см., например, [18, гл. II, § 5, теорема 2]), достаточно показать, что любая рациональная $r(z)$ с полюсами вне Γ аппроксимируется в $L^t(\mu)$ полиномами. Легко видеть, что произвольная рациональная функция с полюсами вне Γ равномерно аппроксимируется на Γ рациональными функциями с простыми полюсами. Пусть

$$r(z) = (z - b)^{-1}, \quad b \notin \Gamma.$$

Если $b \in G_\infty$, то по теореме Мергеляна $r(z)$ равномерно аппроксимируется полиномами на $\mathbb{C} \setminus G_\infty$, а следовательно, и на Γ . В противном случае $b \in G_i$ при некотором $i \in I$. Заменяя в (14) z_i на b , видим, что достаточно установить $1 \in Cl_{L^t(\mu)}(\Pi_b)$. По лемме 2 G_i – область Каратеодори, а из замечания 5 и формулы (12)

$$(1 \in Cl_{L^t(\mu)}(\Pi_b)) \iff \left(\int \left(\frac{d\mu_a^b}{d\omega^b} \right) d\omega^b = -\infty \right),$$

где $\omega^b = \omega(b, G_i, \cdot)$, μ_a^b – абсолютно непрерывная составляющая μ относительно ω^b . Хорошо известно, что меры ω^b и $\omega = \omega(z_i, G_i, \cdot)$ взаимно абсолютно непрерывны, и для некоторой положительной постоянной $c = c(b, z_i, G_i)$

$$\frac{1}{c} \leq \frac{d\omega^b}{d\omega}(z) \leq c \quad (15)$$

для почти всех $z \in \partial G_i$. Взаимная абсолютная непрерывность ω и ω^b даст равенство $\mu_a^b = \mu_a$, а (15) и правила вычисления производной Радона–Никодима приводят к эквивалентности

$$(\mu \in \mathcal{M}^-(G_i, z_i)) \iff (\mu \in \mathcal{M}^-(G_i, b)).$$

д) Предположим, что G не является областью Каратеодори. Пусть $\hat{G}$ – полиномиально-выпуклая оболочка множества $\overline{G}$. Обозначим через Ω компоненту связности множества $\text{Int } \hat{G}$, содержащую z_0 . Тогда $\Omega \supset G$, $\partial\Omega \subset \Gamma$ и Ω является областью Каратеодори. Пусть $\hat{\omega} := \omega(z_0, \Omega, \cdot)$ – гармоническая мера на $\partial\Omega$ относительно z_0 . Достаточно показать, что $\hat{\omega} \in \mathcal{M}^-(G, z_0) \setminus \mathcal{P}^t(\Gamma, z_0)$. В силу леммы 3 $\text{supp}(\hat{\omega}) = \partial\Omega$; следовательно, ω п.в. на $\Gamma \setminus \partial\Omega$

$$\frac{d\hat{\omega}_a}{d\omega}(z) = 0.$$

Кроме того, по условию G не является областью Каратеодори; следовательно, $\Gamma \setminus \partial\Omega \neq \emptyset$. По определению носителя меры и в силу леммы 3 $\omega(\Gamma \setminus \partial\Omega) > 0$. Следовательно,

$$\int_{\Gamma} \ln \left(\frac{d\hat{\omega}_a}{d\omega} \right) d\omega = \int_{\Gamma \setminus \partial\Omega} \ln \left(\frac{d\hat{\omega}_a}{d\omega} \right) d\omega + \int_{\partial\Omega} \ln \left(\frac{d\hat{\omega}_a}{d\omega} \right) d\omega = -\infty, \quad (16)$$

т.е. $\hat{\omega} \in \mathcal{M}^-(G, z_0)$. Покажем, что $\hat{\omega} \notin \mathcal{P}^t(\Gamma, z_0)$. Так как $\text{supp}(\hat{\omega}) = \partial\Omega \subseteq \Gamma$, достаточно проверить $\hat{\omega} \notin \mathcal{P}^t(\partial\Omega, z_0)$. Так как Ω – область Каратеодори, из (3) имеем

$$(\hat{\omega} \notin \mathcal{P}^t(\partial\Omega, z_0)) \iff (\hat{\omega} \notin \mathcal{M}^-(\Omega, z_0) \vee \hat{\omega} \notin \mathcal{M}(\partial\Omega)).$$

Так как

$$\int \ln \left(\frac{d\hat{\omega}}{d\omega} \right) d\hat{\omega} = 0 \neq -\infty,$$

очевидно, $\hat{\omega} \notin \mathcal{M}^-(\Omega, z_0)$.

б) Утверждения (а) и (д) показывают, что (3) выполнено тогда и только тогда, когда G – область Каратеодори.

с) Если G – область Каратеодори и $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ связно, то (5) следует из утверждения (а). Обратно, пусть выполнено (5). Тогда, используя (б), видим, что G – область Каратеодори и нужно показать, что $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ связно. В силу (4) из (5) получаем, что

$$\forall i \in I: \mathcal{M}^-(G, z_0) \cap \mathcal{M}(\Gamma) \subseteq \mathcal{M}^-(G_i, z_i) \cap \mathcal{M}(\Gamma). \quad (17)$$

Если при некотором $i \in I$ имеем $G_i \neq G$, то $\omega(G_i, z_i, \cdot) \notin \mathcal{M}^-(G_i, z_i)$, но, в силу (13) и лемм 4, 3 $\omega(G_i, z_i, \cdot) \in \mathcal{M}^-(G_i, z_i) \cap \mathcal{M}(\Gamma)$, что противоречит (17). Теорема 1 доказана полностью.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Рассуждения, использованные при доказательстве части а) теоремы 1, стандартны. Плотность $C(\Gamma)$ в $L^t(\mu)$ обычно доказывается для регулярных μ и $1 \leq t < \infty$. Требование регулярности μ не включено в определение $\mathcal{M}$, так как любая конечная мера, определенная на борелевских подмножествах из $\mathbb{R}^n$, регулярна [19, гл. I, утверждение 1.5]. Плотность $C(\Gamma)$ в $L^t(\mu)$ при $0 < t < 1$ легко установить, используя неравенство Гёльдера.

Перейдем к подготовке доказательства теоремы 2. Для каждой рациональной функции r через $\text{Pol}(r)$ будем обозначать множество полюсов этой функции.

Пусть K – произвольный компакт из $\mathbb{C}$ (может быть пустой). Сопоставим каждой алгебре $A \in \mathfrak{U}_r(K)$ подмножество

$$\text{Pol}(A) := \bigcup_{r \in A} \text{Pol}(r); \quad (18)$$

очевидно, $\text{Pol}(A) \subseteq \mathbb{C} \setminus K$. Пусть $\mathcal{B}(\mathbb{C} \setminus K)$ – множество всех подмножеств $\mathbb{C} \setminus K$.

ЛЕММА 5. *Отображение $\text{Pol}: \mathfrak{U}_r(K) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{C} \setminus K)$, определяемое правилом (18), является биективным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B \subseteq \mathbb{C} \setminus K$. Легко видеть, что множество $A(B)$ рациональных функций r , для которых $\text{Pol}(r) \subseteq B$, не пусто (если $B = \emptyset$, то $A(B) = \Pi$), $A(B)$ – алгебра из $\mathfrak{U}_r(K)$ и $\text{Pol}(A(B)) = B$. Следовательно, отображение Pol – сюръекция. Проверим инъективность. Если для некоторого $A \in \mathfrak{U}_r(K)$ имеем $\text{Pol}(A) = B$, то, очевидно, $A \subseteq A(B)$. Докажем, что $A(B) \subseteq A$. Так как алгебра $A(B)$ порождается функциями вида $(z - b)^{-1}$, где $b \in B$, достаточно проверить, что

$$\forall b \in B: (z - b)^{-1} \in A.$$

Выберем $r \in A$ так, что $b \in \text{Pol}(r)$. Используя теорему о разложении рациональной функции на простейшие дроби, легко построить такие полиномы p_1 и p_2 , для которых

$$\frac{1}{(z-b)} = p_1(z)r(z) + p_2(z).$$

Следовательно, $(z-b)^{-1} \in A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть G – область Каратеодори. Проверим (7). Предположим, что при некотором $i_0 \in I$ найдется мера

$$\mu_0 \in \mathcal{M}_*^t(\Gamma) \setminus \mathcal{M}^+(G_{i_0}, z_{i_0}).$$

Рассмотрим алгебру

$$A_{i_0} := \text{Pol}^{-1}\left(\bigcup_{\substack{\rightarrow \\ i \in I \\ i \neq i_0}} G_i\right),$$

где Pol^{-1} – отображение, обратное к Pol . Мера $\mu_0 \in \mathcal{M}^-(G_{i_0}, z_{i_0}) \cap \mathcal{M}(\Gamma)$ и, рассуждая так же, как при доказательстве части а) теоремы 1, видим, что

$$\forall b \in G_{i_0} : (z-b)^{-1} \in L^t(\mu_0).$$

Следовательно, A_{i_0} плотна в $L^t(\mu_0)$. Однако A_{i_0} не плотна в $C(\Gamma)$. Действительно, так как $\Gamma_{i_0} := \partial G_{i_0} \subseteq \partial G = \Gamma$, из плотности A_{i_0} в $C(\Gamma)$ следует плотность A_{i_0} в $C(\Gamma_{i_0})$. В частности, найдется последовательность $\{r_n\}$, $r_n \in A_{i_0}$, для которой $r_n(z) \rightrightarrows (z-z_{i_0})^{-1}$ равномерно на Γ_{i_0} ; следовательно, $(z-z_{i_0})r_n(z) \rightrightarrows 1$ равномерно на Γ_{i_0} . Тогда

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_{i_0}} (z-z_{i_0})r_n(z) d\omega(z_{i_0}, G_{i_0}, z) = \int_{\Gamma_{i_0}} 1 d\omega(z_{i_0}, G_{i_0}, z) = 1. \quad (19)$$

Полученное противоречие показывает, что

$$\mathcal{M}_*^+(\Gamma) \subseteq \left(\bigcap_{i \in I} \mathcal{M}^+(G_i, z_i)\right) \cap \mathcal{M}(\Gamma).$$

Докажем обратное включение. Предположим, что

$$\mu \in \left(\bigcap_{i \in I} \mathcal{M}^+(G_i, z_i)\right) \cap \mathcal{M}(\Gamma) \quad (20)$$

и A_1 – произвольная алгебра, принадлежащая $\mathfrak{U}_r(\Gamma)$ и плотная в $L^t(\mu)$, $t > 0$. Достаточно убедиться в том, что A_1 плотна в $C(\Gamma)$. Пусть $A_1 = \text{Pol}^{-1}(B_1)$, где $B_1 \subseteq \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Для полноты A_1 в $C(\Gamma)$ достаточно (и необходимо), чтобы

$$\forall i \in I : G_i \cap B_1 \neq \emptyset. \quad (21)$$

Если последнее ложно, то найдется i_0 такое, что $(z - z_{i_0})^{-1}$ (где $z_{i_0} \in G_{i_0}$) приближается в $L^t(\mu)$ последовательностью $\{r_n\}$, r_n – рациональные функции с полюсами вне $\overline{G}_{i_0}$. Тогда $r_n(z)(z - z_{i_0}) \rightarrow 1$ в $L^t(\mu)$. С другой стороны, так как G_{i_0} – область Каратеодори, используя (20) и (12), при $\nu = \omega(z_{i_0}, G_{i_0}, \cdot)$ видим, что

$$\int |1 - r_n(z)(z - z_{i_0})|^t d\mu(z) \geq c > 0,$$

где $c > 0$ не зависит от n . Получили противоречие. Равенство (7) доказано.

Пусть G – ограниченная односвязная область и $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ связно. Если G – область Каратеодори, то (7) $\Rightarrow$ (8). Если G не является областью Каратеодори, то, как и при доказательстве пункта d) теоремы 1, перейдем к области Ω . Мера $\hat{\omega} = \omega(z_0, \Omega, \cdot)$ не принадлежит $\mathcal{M}^+(G, z_0) \cap \mathcal{M}(\Gamma)$ (см. формулу (16)). Проверим, что $\hat{\omega} \in \mathcal{M}_*^t(\Gamma)$. Пусть при некотором $B_1 \subseteq \mathbb{C} \setminus \Gamma$ алгебра $A_1 := \text{Pol}^{-1}(B_1)$ плотна в $L^t(\hat{\omega})$, $t > 0$. Повторяя рассуждения, приведенные в первой части настоящей теоремы после (21) (заменив z_{i_0} на z_0 , G_{i_0} на Ω , а обе меры μ и $\omega(z_{i_0}, G_{i_0}, \cdot)$ на $\hat{\omega}$), убеждаемся в том, что $G \cap B_1 \neq \emptyset$. Следовательно, A_1 плотна в $C(\Gamma)$, т.е. из (8) следует, что G – область Каратеодори.

Перед доказательством теоремы 3 напомним необходимые сведения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Следуя [15], будем говорить, что мера $\mu \in \mathcal{M}$, $\text{card } S_\mu = \infty$, является регулярной, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n)^{1/n} = \frac{1}{\text{cap } S_\mu}, \quad (22)$$

где $\alpha_n > 0$ – старший коэффициент $p_n(\mu, \cdot)$, а $\text{cap } S_\mu$ – логарифмическая емкость S_μ .

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Логарифмическая емкость любого ограниченного борелевского множества B понимается как его внутренняя емкость

$$\text{cap } B := \sup\{\text{cap } K : K \text{ – компакт, } K \subseteq B\}.$$

При доказательстве теоремы 3 используем следующее свойство логарифмической емкости (см. [20]). Пусть K_n – компакты, $n \in \mathbb{N}$, $K_n \subseteq K_{n+1} \subseteq B$ – ограниченное борелевское множество; тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap}(K_n) = \text{cap}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right). \quad (23)$$

Положим при $n \in \mathbb{N}$ $\Pi_n := \{p \in \Pi : \deg p \leq n\}$.

ЛЕММА 6. Пусть $\mu \in \mathcal{M}$ и $\text{card}(S_\mu) = \infty$. Тогда для любых $n \in \mathbb{N}$, $p \in \Pi_n$, $\lambda \in \mathbb{C}$ имеет место неравенство

$$|p(\lambda)| \leq \left(\sum_{j=0}^n |p_j(\mu; \lambda)|^2 \right)^{1/2} \|p\|_{L^2(\mu)}. \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция

$$Q_n(\lambda; w) = \sum_{k=0}^n \overline{p_k(\mu; \lambda)} p_k(\mu; w)$$

– воспроизводящее ядро пространства $(\Pi_n, \|\cdot\|_{L^2(\mu)})$ и

$$\|Q_n(\lambda, \cdot)\|_{L^2(\mu)} = \left(\sum_{j=0}^n |p_j(\mu; \lambda)|^2 \right)^{1/2}. \quad (25)$$

Применив неравенство Шварца к правой части формулы $p(\lambda) = \langle p, Q(\lambda, \cdot) \rangle$, получаем (24).

ЛЕММА 7. Для любой меры $\mu \in \mathcal{M}$, точки $z_0 \in \mathbb{C}$ и $t > 0$ следующие утверждения эквивалентны:

- (i) точка z_0 является ВРЕ точкой для полиномов в $L^t(\mu)$, т.е. выполнено (2);
- (ii) $1 \notin Cl_{L^t(\mu)}(\Pi_{z_0})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (ii) не выполнено тогда и только тогда, когда Π_{z_0} – ядро вычисляющего функционала

$$F: \Pi \rightarrow \mathbb{C}, \quad F(p) = p(z_0),$$

будет плотным подмножеством пространства $(\Pi, \|\cdot\|_{L^t(\mu)})$. Как известно [21, гл. 1, теорема 1.18], для любого линейного топологического пространства ядро линейного функционала плотно тогда и только тогда, когда этот функционал не ограничен.

ЛЕММА 8. Пусть выполнены условия леммы 7, $\text{card}(S_\mu) = \infty$ и $t = 2$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) z_0 – ВРЕ точка для полиномов в $L^2(\mu)$,
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n |p_i(\mu; z_0)|^2 < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как следует из (25), норма линейного функционала

$$F: (\Pi_n, \|\cdot\|_{L^2(\mu)}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad F(p) = p(z_0),$$

равна

$$\left(\sum_{i=0}^n |p_i(\mu; z_0)|^2 \right)^{1/2}.$$

При $n \rightarrow \infty$ видим, что (ii) эквивалентно ограниченности вычисляющего функционала для полиномов в $L^2(\mu)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Достаточно проверить, что

$$(\forall \lambda \in \text{Int } \widehat{S}_\mu : \lambda - \text{ВРЕ для } \mu) \implies \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\alpha_n} \right)^n \geq \text{cap}(\text{Int } \widehat{S}_\mu) \right). \quad (26)$$

Предположим, что посылка этой импликации верна. Пусть $\beta_n^2(\lambda) := \sum_{j=0}^n |p_j(\mu; \lambda)|^2$. Тогда $\{\beta_n^2(\lambda)\}_{n=0}^\infty$ – монотонно возрастающая последовательность непрерывных функций. Следовательно, $\beta^2(\lambda) := \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n^2(\lambda)$ – функция, полунепрерывная снизу (см., например, [22, гл. 1, теорема 1.3]), и при любом $m \in \mathbb{N}$

$$E_m := \{z \in \text{Int } \widehat{S}_\mu : \beta^2(z) \leq m\}$$

– замкнутое подмножество $\text{Int } \widehat{S}_\mu$. Пусть $\{C_m\}_{m=1}^\infty$ – компактное исчерпание $\text{Int } \widehat{S}_\mu$, т.е. C_m – компакты такие, что

$$C_m \subseteq C_{m+1}, \quad \text{Int } \widehat{S}_\mu = \bigcup_{m=1}^\infty C_m.$$

Положим при $m \in \mathbb{N}$ $K_m := C_m \cap E_m$. Из леммы 8 следует, что $\{K_m\}_{m=1}^\infty$ – компактное исчерпание $\text{Int } \widehat{S}_\mu$ и, очевидно,

$$\forall z \in K_m : \beta^2(z) \leq m.$$

Из (24) следует, что

$$\forall p \in \Pi : \|p\|_{K_m} \leq \sqrt{m} \|p\|_{L^2(\mu)},$$

где

$$\|p\|_{K_m} = \sup\{|p(z)| : z \in K_m\}.$$

В частности,

$$\left\| \frac{p_n(\mu; \cdot)}{\alpha_n} \right\|_{K_m} \leq \sqrt{m} \left\| \frac{p_n(\mu; \cdot)}{\alpha_n} \right\|_{L^2(\mu)} \leq \frac{\sqrt{m}}{\alpha_n}. \quad (27)$$

С другой стороны,

$$\left\| \frac{p_n(\mu; \cdot)}{\alpha_n} \right\|_{K_m} \geq \inf_{p \in \Pi_{n-1}} \|z^n - p\|_{K_m} = t_{nK_m}, \quad (28)$$

где t_{nK_m} – постоянная Чебышева компакта K_m . Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (t_{nK_m})^{1/n} = \text{cap } K_m,$$

то (27) и (28) вместе дают оценку

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{m}}{\alpha_n} \right) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\alpha_n} \right)^{1/n} \geq \text{cap}(K_m).$$

Переходя в неравенстве

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\alpha_n} \right) \geq \text{cap}(K_m)$$

к пределу при $m \rightarrow \infty$, в силу (23) получаем заключение импликации (26).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Так как [15, глава 3, следствие 3.1.1]

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n)^{1/n} \geq \frac{1}{\text{cap } S_\mu},$$

в силу (22) из нерегулярности μ следует, что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n)^{1/n} > \frac{1}{\text{cap } S_\mu}.$$

Последнее неравенство в силу (11) эквивалентно (9).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Szegő G. Beitzöge zur Theorie der Toeplitzschen Formen I // Math. Z. 1920. V. 6. P. 167–202.
- [2] Колмогоров А. Н. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1941. Т. 5. С. 3–4.
- [3] Крейн М. Г. Об одном обобщении исследований G. Szegő, В. И. Смирнова и А. Н. Колмогорова // Докл. АН СССР. 1945. Т. 46. С. 95–98.
- [4] Thomson J. Approximation in the mean by polynomials // Ann. of Math. 1991. V. 133. P. 477–507.
- [5] Thomson J. Bounded point evaluation and polynomial approximation // Proc. Amer. Math. Soc. 1995. V. 123. P. 1757–1761.
- [6] Akeroyd J. An extension of Szegő's theorem // Indiana Univ. Math. J. 1994. V. 43. P. 1339–1347.
- [7] Akeroyd J. An extension of Szegő's theorem II // Indiana Univ. Math. J. 1996. V. 45. P. 241–252.
- [8] Akeroyd J., Saleeby E. G. On polynomials approximation in the mean // Contemporary Math. 1999. V. 232. P. 23–26.
- [9] Akeroyd J., Saleeby E. G. A class $P^t(d\mu)$ spaces whole point evaluations vary with t // Proc. Amer. Math. Soc. 1999. V. 127. P. 537–542.
- [10] Conway J. B. Subnormal Operators. Boston: Pitman, 1981.
- [11] Вольберг А. Л. Среднеквадратическая полнота многочленов за пределами теоремы Сегё // Докл. АН СССР. 1978. Т. 241. С. 521–527.
- [12] Trent T. Extension of the theorem of Szegő // Michigan Math. J. 1979. V. 26. P. 373–377.
- [13] Browder A. Introduction to function algebras. New York–Amsterdam: W. A. Benjamin, 1969.
- [14] Helson H., Lowdenslager D. Prediction theory and Fourier series in several variables // Acta Math. 1958. V. 99. P. 165–202.
- [15] Stahl H., Totik V. General Orthogonal Polynomials. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
- [16] Гамелин Т. Равномерные алгебры. М.: Мир, 1969.
- [17] Philip J. D. Interpolation and Approximation. New York–Toronto–London: Blaisdell Publ. Co., 1963.
- [18] Витушкин А. Г. Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений // УМН. 1967. Т. 22. № 6. С. 141–199.
- [19] Donald L. C. Measure Theory. Boston–Basel–Berlin: Birkhäuser, 1993.
- [20] Ullman J. L. On the regular behavior of orthogonal polynomials // Proc. London Math. Soc. 1972. V. 24. P. 119–148.
- [21] Rudin W. Functional Analysis. 2nd edition. Singapore: McGraw-Hill, 1991.
- [22] Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. Т. 1. М.: Мир, 1980.