Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Глушак, Задача типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробными производными, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 1, 28–41

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2466>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 15:11:04

УДК 517.983

ЗАДАЧА ТИПА КОШИ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

А. В. Глушак

Доказывается равномерная корректность задачи типа Коши с двумя дробными производными и ограниченным оператором A . Для неограниченного оператора A приводится критерий равномерной корректности рассматриваемой задачи, который “стыкуется” с критерием равномерной корректности задачи Коши для уравнения второго порядка.

Библиография: 13 названий.

Пусть $M_k^{\alpha, \beta}$ – дифференциальный оператор вида $M_k^{\alpha, \beta} = D^\alpha (t^k D^\beta)$, содержащий левосторонние дробные производные Римана–Лиувилля порядка $\beta \in (0, 1)$ и $\alpha \in (0, 1)$ (см. [1, с. 84])

$$D^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} u(s) ds, \quad t \in (0, \infty),$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера.

В банаховом пространстве X рассмотрим следующую задачу типа Коши с линейным замкнутым оператором A :

$$M_k^{\alpha, \beta} u(t) = t^\gamma A u(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} D^{\beta-1} u(t) = u_0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} D^{\alpha-1} (t^k D^\beta u(t)) = 0, \quad (2)$$

где

$$D^{\beta-1} u(t) = I^{1-\beta} u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t (t-s)^{-\beta} u(s) ds$$

– левосторонний дробный интеграл Римана–Лиувилля порядка $1 - \beta$.

Специфика постановки начальных условий (2) состоит в том, что суммарный порядок производных, по сравнению с уравнением (1), уменьшается сначала на 1 в одном условии, а потом еще на α в другом.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 04-01-00141.

Под *решением задачи* (1), (2) понимается сильно непрерывная при $t > 0$ функция $u(t)$ такая, что $I^{1-\beta}u(t)$ и $I^{1-\alpha}(t^k D^\beta u(t))$ представляют собой сильно непрерывно дифференцируемые при $t > 0$ функции; функция $u(t)$ принимает значения из $D(A)$ и удовлетворяет (1), (2).

Среди работ, посвященных изучению дифференциальных уравнений с дробной производной порядка α , отметим работу [2], в которой изучается ослабленная задача Коши с регуляризованной дробной производной, и работы [3], [4], содержащие критерий равномерной корректности задачи типа Коши.

Неоднородное дифференциальное уравнение порядка $1 + \alpha$ с регуляризованной дробной производной и позитивным оператором A было исследовано в [5] методом сумм Да Прато и Гривара.

В настоящей работе изучается задача типа Коши для дифференциального уравнения, содержащего две различные дробные производные. Доказывается равномерная корректность задачи (1), (2) с ограниченным оператором и приводится критерий равномерной корректности для задачи с неограниченным оператором в случае $k = \gamma = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Задача (1), (2) называется *равномерно корректной*, если существует заданная на X , коммутирующая с A операторная функция $\Phi_{\gamma,k}^{\alpha,\beta}(t)$ и числа $M \geq 1$, $\omega \geq 0$ такие, что для любого $u_0 \in D(A)$ функция $\Phi_{\gamma,k}^{\alpha,\beta}(t)u_0$ является ее единственным решением и при этом

$$\|\Gamma(\beta)t^{1-\beta}\Phi_{\gamma,k}^{\alpha,\beta}(t)u_0 - u_0\| = O(t^{\alpha+\beta+\gamma-k})\|Au_0\|, \quad t \rightarrow 0, \quad (3)$$

$$\|\Phi_{\gamma,k}^{\alpha,\beta}(t)\| \leq Mt^{\beta-1}e^{\omega t}. \quad (4)$$

Согласно определению 1 задача (1), (2) равномерно корректна, если решение этой задачи существует, единственно и, как следует из (4), непрерывно зависит от начальных данных равномерно по t из любого компакта в $(0, \infty)$. Помимо этих обычных требований определение 1 содержит дополнительную информацию о порядке стремления решения к начальному элементу (соотношение (3)) и о его поведении при $t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$ (неравенство (4)). Эти дополнительные свойства решения удастся установить в рассматриваемых далее случаях.

Отметим, что если оператор A ограничен, то задача (1), (2) всегда равномерно корректна и операторная функция $\Phi_{\gamma,k}^{\alpha,\beta}(t)$ выписывается в теореме 1 в виде ряда. Если же оператор A неограничен и $k = \gamma = 0$, то рассматриваемая задача будет равномерно корректной только в случае, когда резольвента оператора A удовлетворяет определенным оценкам. В этом случае операторная функция $\Phi_{0,0}^{\alpha,\beta}(t)$ выражается в теореме 3 через резольвенту оператора A с помощью интеграла Меллина.

Будем считать в дальнейшем, что $B(X, X_1)$ – пространство линейных ограниченных операторов, действующих из X в X_1 , и $B(X) = B(X, X)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $A \in B(X)$ и параметры задачи (1), (2) удовлетворяют неравенствам $\beta + \gamma > 0$, $\alpha + \beta + \gamma - k > 0$, $\gamma \leq k$. Тогда задача (1), (2) равномерно корректна и при этом

$$\Phi_{\gamma,k}^{\alpha,\beta}(t)u_0 = \frac{t^{\beta-1}u_0}{\Gamma(\beta)} + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{i-1} \frac{\Gamma(\beta + \gamma + pj)\Gamma(p + pj)}{\Gamma(k + p + pj)\Gamma(\beta + p + pj)} \right) t^{p_i+\beta-1} A^i u_0, \quad (5)$$

где $p = \alpha + \beta + \gamma - k > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим к обеим частям уравнения (1) оператор I^α дробного интегрирования порядка α . Учитывая второе из условий (2), получим

$$D^\beta u(t) = \frac{t^{-k}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^\gamma A u(s) ds,$$

а, учитывая первое, будем иметь

$$u(t) = \frac{t^{\beta-1} u_0}{\Gamma(\beta)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \tau^{-k} d\tau \int_0^\tau (\tau-s)^{\alpha-1} s^\gamma A u(s) ds. \quad (6)$$

Дальнейшее доказательство будем осуществлять методом последовательных приближений. Пусть

$$u_0(t) = \frac{t^{\beta-1} u_0}{\Gamma(\beta)},$$

$$u_m(t) = \frac{t^{\beta-1} u_0}{\Gamma(\beta)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \tau^{-k} d\tau \int_0^\tau (\tau-s)^{\alpha-1} s^\gamma A u_{m-1}(s) ds.$$

Используя интеграл 2.2.4.8 из [6], при $m = 1, 2, \dots$ находим

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{t^{\beta-1} u_0}{\Gamma(\beta)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma^2(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \tau^{-k} d\tau \int_0^\tau (\tau-s)^{\alpha-1} s^{\beta+\gamma-1} A u_0 ds \\ &= \frac{t^{\beta-1} u_0}{\Gamma(\beta)} + \frac{\Gamma(\beta+\gamma)\Gamma(p)t^{p+\beta-1} A u_0}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta+p)\Gamma(p+k)}, \\ u_2(t) &= \frac{t^{\beta-1} u_0}{\Gamma(\beta)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \tau^{-k} d\tau \\ &\quad \times \int_0^\tau (\tau-s)^{\alpha-1} s^\gamma A \left(\frac{s^{\beta-1} u_0}{\Gamma(\beta)} + \frac{\Gamma(\beta+\gamma)\Gamma(p)s^{p+\beta-1} A u_0}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta+p)\Gamma(p+k)} \right) ds \\ &= \frac{t^{\beta-1} u_0}{\Gamma(\beta)} + \frac{\Gamma(\beta+\gamma)\Gamma(p)t^{p+\beta-1} A u_0}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta+p)\Gamma(p+k)} \\ &\quad + \frac{\Gamma(\beta+\gamma)\Gamma(\beta+\gamma+p)\Gamma(p)\Gamma(2p)s^{2p+\beta-1} A^2 u_0}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta+2p)\Gamma(\beta+p)\Gamma(p+k)\Gamma(2p+k)}, \dots, \end{aligned}$$

что в общем случае приводит к формуле

$$u_m(t) = u_{m-1}(t) + \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(\beta+\gamma+(j-1)p)\Gamma(pj)t^{mp+\beta-1} A^m u_0}{\Gamma(\beta) \prod_{j=1}^m \Gamma(p+k+(j-1)p)\Gamma(\beta+p+(j-1)p)}.$$

Отметим, что в написанных выше соотношениях для сходимости интегралов нужны условия $\beta+\gamma > 0$, $p = \alpha + \beta + \gamma - k > 0$.

Отсюда в пределе при $m \rightarrow \infty$ имеем следующее представление искомого решения задачи (1), (2):

$$\Phi_{\gamma,k}^{\alpha,\beta}(t) u_0 = \frac{t^{\beta-1} u_0}{\Gamma(\beta)} + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{i-1} \frac{\Gamma(\beta+\gamma+pj)\Gamma(p+pj)}{\Gamma(k+p+pj)\Gamma(\beta+p+pj)} \right) t^{pi+\beta-1} A^i u_0,$$

что может быть установлено непосредственной проверкой.

Докажем теперь справедливость соотношений (3) и (4). Действительно, из (5) следует, что

$$\begin{aligned} \|\Gamma(\beta)t^{1-\beta}\Phi_{\gamma,k}^{\alpha,\beta}(t)u_0 - u_0\| &= \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{i-1} \frac{\Gamma(\beta + \gamma + pj)\Gamma(p + pj)}{\Gamma(k + p + pj)\Gamma(\beta + p + pj)} \right) t^{pi} A^i u_0 \right\| \\ &= O(t^p) \|Au_0\|, \end{aligned}$$

когда $t \rightarrow 0$. Таким образом, равенство (3) установлено. Докажем далее оценку (4). Из (5) выводим неравенство

$$\|t^{1-\beta}\Phi_{\gamma,k}^{\alpha,\beta}(t)\| \leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta + \gamma)\Gamma(p) \cdots \Gamma(\beta + \gamma + p(i-1))\Gamma(pi)t^{pi}\|A\|^i}{\Gamma(\beta)\Gamma(p+k) \cdots \Gamma(\beta + p(i-1))\Gamma(pi+k)\Gamma(pi+\beta)}.$$

Покажем, что для $j = 0, 1, \dots, i-1$

$$\frac{\Gamma(\beta + \gamma + pj)\Gamma(p(j+1))}{\Gamma(\beta + pj)\Gamma(p(j+1) + k)} < 1. \quad (7)$$

Пусть $\alpha + \beta + \gamma + pj = q > 0$. Тогда неравенство (7) переписывается в виде

$$\frac{\Gamma(q - \alpha)\Gamma(q - k)}{\Gamma(q - \alpha - \gamma)\Gamma(q)} < 1. \quad (8)$$

Достаточным условием справедливости неравенства (8) является неравенство $\gamma \leq k$. Действительно, для $0 \leq \gamma \leq k$ в силу [7, с. 73, соотношение (14)]

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(q - \alpha)\Gamma(q - k)}{\Gamma(q - \alpha - \gamma)\Gamma(q)} &\leq \frac{\Gamma(q - \alpha)\Gamma(q - \gamma)}{\Gamma(q - \alpha - \gamma)\Gamma(q)} = \frac{1}{{}_2F_1(\alpha, \gamma; q; 1)} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + n)\Gamma(\gamma + n)\Gamma(q)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)\Gamma(q + n)n!} \right)^{-1} < 1, \end{aligned}$$

а для $k - \alpha - \beta < \gamma < 0$ неравенство (8) очевидно. Следовательно, неравенство (7) установлено и поэтому

$$\|t^{1-\beta}\Phi_{\gamma,k}^{\alpha,\beta}(t)\| \leq M_1 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^{pi}\|A\|^i}{\Gamma(pi + \beta)} = M_1 E_{p,\beta}(t^p\|A\|^{1/p}) \leq M e^{\omega t}, \quad \omega > \|A\|^{1/p^2},$$

при этом мы использовали асимптотическое равенство

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\alpha} z^{(1-\beta)/\alpha} \exp(z^{1/\alpha}) + O\left(\frac{1}{|z|}\right), \quad z \rightarrow \infty, \quad |\arg z| \leq \frac{\alpha\pi}{2}, \quad (9)$$

которому удовлетворяет функция типа Миттаг-Леффлера $E_{\alpha,\beta}(z)$ (см. [8, с. 224, формула (22)]).

Таким образом, для доказательства равномерной корректности задачи (1), (2) с оператором $A \in B(X)$ осталось установить единственность решения этой задачи. Предположим, что есть два решения задачи (1), (2); тогда их разность, которую мы обозначим через $U(t)$, является решением задачи (1), (2) с двумя нулевыми начальными условиями (2), учитывая которые, после интегрирования уравнения (1) получим

$$D^\beta U(t) = \frac{t^{-k}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^\gamma AU(s) ds,$$

$$U(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \tau^{-k} d\tau \int_0^\tau (\tau-s)^{\alpha-1} s^\gamma AU(s) ds.$$

Пусть $t \in [0, \delta]$, $\delta > 0$; тогда

$$\begin{aligned} \|U(t)\| &\leq \frac{\|A\|}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \max_{[0, \delta]} \|t^{1-\beta} U(t)\| \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \tau^{-k} d\tau \int_0^\tau (\tau-s)^{\alpha-1} s^{\beta+\gamma-1} ds \\ &= \frac{\|A\|\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)\Gamma(\beta)} \max_{[0, \delta]} \|t^{1-\beta} U(t)\| \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \tau^{p-1} d\tau \\ &= \frac{\|A\|\Gamma(\beta+\gamma)\Gamma(p)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)\Gamma(\beta+p)} \max_{[0, \delta]} \|t^{1-\beta} U(t)\| t^{p+\beta-1}. \end{aligned}$$

Выбирая $\delta > 0$ достаточно малым, получим

$$\max_{[0, \delta]} \|t^{1-\beta} U(t)\| \leq \frac{1}{2} \max_{[0, \delta]} \|t^{1-\beta} U(t)\|;$$

следовательно, $U(t) = 0$ на $[0, \delta]$.

Докажем далее, что если решение уравнения (1) удовлетворяет условиям

$$D^{\beta-1}U(t)|_{t \leq a} = 0, \quad D^{\alpha-1}(t^k D^\beta U(t))|_{t \leq a} = 0 \quad (10)$$

при каком-то $a > 0$, то оно обращается в нуль и на некотором промежутке $[a, a + \delta]$, где число $\delta > 0$ будет выбрано, не зависящим от α .

Действительно, записав уравнение (1) в виде

$$D_{a+}^\alpha (t^k D_{a+}^\beta U(t)) = t^\gamma AU(t),$$

где

$$D_{a+}^\alpha U(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} U(s) ds, \quad t \in (0, \infty),$$

после интегрирования получим

$$D_{a+}^\beta U(t) = \frac{t^{-k}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} s^\gamma AU(s) ds,$$

$$U(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-\tau)^{\beta-1} \tau^{-k} d\tau \int_a^\tau (\tau-s)^{\alpha-1} s^\gamma AU(s) ds,$$

при этом мы учли нулевые начальные условия (10).

Пусть $t \in [a, a + \delta]$; тогда

$$\max_{[a, a+\delta]} \|U(t)\| \leq \frac{\|A\| \max_{[a, a+\delta]} \|U(t)\|}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-\tau)^{\beta-1} \tau^{-k} d\tau \int_a^\tau (\tau-s)^{\alpha-1} s^\gamma ds. \quad (11)$$

Используя формулу 2.2.6.1 из [6] и формулы 7.2.1.7, 2.21.1.20 из [9], вычислим интеграл

$$\begin{aligned} & \int_a^t (t-\tau)^{\beta-1} \tau^{-k} d\tau \int_a^\tau (\tau-s)^{\alpha-1} s^\gamma ds \\ &= \frac{a^\gamma}{\alpha} \int_a^t (t-\tau)^{\beta-1} \tau^{-k} (\tau-a)^\alpha {}_2F_1\left(1, -\gamma; \alpha+1; \frac{a-\tau}{a}\right) d\tau \\ &= \frac{a^{\gamma+1}}{\alpha} \int_a^{1-a/t} \left(t - \frac{a}{1-z}\right)^{\beta-1} \left(\frac{a}{1-z}\right)^{-k} \left(\frac{a}{1-z} - a\right)^\alpha \\ & \quad \times {}_2F_1\left(1, -\gamma; \alpha+1; \frac{z}{z-1}\right) \frac{dz}{(1-z)^2} \\ &= \frac{a^{\alpha+\gamma-k+1} t^{\beta-1}}{\alpha} \int_0^{1-a/t} \left(\frac{t-a}{t} - z\right)^{\beta-1} (1-z)^{k-\alpha-\beta} z^\alpha \\ & \quad \times {}_2F_1(1, \alpha+\gamma+1; \alpha+1; z) dz \\ &= \frac{a^{1-\beta+\gamma} B(\alpha+1, \beta)(t-a)^{\alpha+\beta}}{\alpha t^{k+1-\beta}} \\ & \quad \times F_3\left(\alpha+\beta-k, 1, \beta, 1+\alpha+\gamma; 1+\alpha+\beta; 1-\frac{t}{a}, 1-\frac{a}{t}\right), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$F_3(a, a', b, b'; c; \omega, z) = \sum_{j,l=0}^{\infty} \frac{(a)_j (a')_l (b)_j (b')_l}{(c)_{j+l}} \cdot \frac{\omega^j z^l}{j! l!}.$$

Если $\gamma \leq k$, то из (11), (12) следует неравенство

$$\max_{[a, a+\delta]} \|U(t)\| \leq M_0 \delta^{\alpha+\beta} \max_{[a, a+\delta]} \|U(t)\|, \quad (13)$$

где постоянная $M_0 > 0$ не зависит от a , так как $|1-t/a| \leq \delta/a \leq 1/2$, если $\delta \leq a/2$, и при этом $|1-a/t| \leq 1-a/(a+\delta) = \delta/(a+\delta) \leq 1/3$.

Выбирая в (13) $\delta > 0$ достаточно малым, не зависящим от a , мы убеждаемся в том, что $U(t) = 0$ на $[a, a + \delta]$. Тем самым, мы доказали единственность решения на любом конечном промежутке. Теорема доказана.

Отметим ряд частных представлений для решения задачи (1), (2) (включая предельные представления, когда $\alpha = 1$ или $\beta = 1$). Справедливы следующие равенства:

$$1) \Phi_{k,k}^{1,\beta}(t)u_0 = \frac{\Gamma((\beta+k)/(\beta+1))t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta/(\beta+1))} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(i+\beta/(\beta+1))(t^{1+\beta}A)^i u_0}{\Gamma(\beta+i(\beta+1))\Gamma(i+(\beta+k)/(\beta+1))},$$

что совпадает с представлением, полученным в [10]; в частности,

$$\Phi_{1+\beta,1+\beta}^{1,\beta}(t)u_0 = \beta t^{\beta-1} E_{1+\beta,1+\beta}(t^{1+\beta}A)u_0, \quad \Phi_{0,0}^{1,\beta}(t)u_0 = t^{\beta-1} E_{1+\beta,\beta}(t^{1+\beta}A)u_0;$$

$$2) \Phi_{k-1,k}^{1,\beta}(t)u_0 = \frac{t^{\beta-1}u_0}{\Gamma(\beta)} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{i-1} \Gamma(k-1+\beta(j+1)) \right)^{-1} \frac{t^{\beta(i+1)-1}A^i u_0}{\Gamma(\beta(i+1))}, \text{ что}$$

совпадает с представлением, полученным в [11]; в частности,

$$\Phi_{\beta,1+\beta}^{1,\beta}(t)u_0 = \beta t^{\beta-1} \varphi\left(\beta, \beta+1; \frac{t^\beta A}{\beta}\right)u_0,$$

где $\varphi(\cdot, \cdot; \cdot)$ – функция Райта [8, с. 225];

$$3) \Phi_{0,0}^{\alpha,\beta}(t)u_0 = t^{\beta-1}E_{\alpha+\beta,\beta}(t^{\alpha+\beta}A)u_0;$$

$$4) \Phi_{0,0}^{\alpha,1}(t)u_0 = E_{\alpha+1,1}(t^{\alpha+1}A)u_0.$$

Переходим теперь к изучению задачи

$$D^\alpha D^\beta u(t) = Au(t), \quad t > 0, \quad (14)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} D^{\beta-1}u(t) = u_0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} D^{\alpha-1}D^\beta u(t) = 0, \quad (15)$$

которая получается из (1), (2) при $k = \gamma = 0$, но теперь уже будем считать, что A – линейный замкнутый оператор в X с плотной в X областью определения $D(A)$, $u_0 \in D(A)$.

Операторную функцию $\Phi_{0,0}^{\alpha,\beta}(t)$ в дальнейшем будем обозначать $\Phi(t)$. Установим в начале необходимое условие равномерной корректности задачи (14), (15). Пусть $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ – резольвента оператора A .

ТЕОРЕМА 2. *Если задача (14), (15) равномерно корректна и $\operatorname{Re} \lambda > \omega$, то $\lambda^{\alpha+\beta}$ принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A и для любого $x \in X$ справедливо представление*

$$R(\lambda^{\alpha+\beta})x = \lambda^{-\alpha} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \Phi(t)x dt, \quad (16)$$

причем для всех целых $n \geq 0$

$$\left\| \frac{d^n (\lambda^\alpha R(\lambda^{\alpha+\beta}))}{d\lambda^n} \right\| \leq \frac{M\Gamma(n+\beta)}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^{n+\beta}}. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим, что оператор $R(\lambda^{\alpha+\beta})$, определяемый равенством (16), удовлетворяет соотношению

$$(\lambda^{\alpha+\beta}I - A)R(\lambda^{\alpha+\beta}) = R(\lambda^{\alpha+\beta})(\lambda^{\alpha+\beta}I - A) = I.$$

Пусть $x \in D(A)$ и $\operatorname{Re} \lambda > \omega$. Тогда, учитывая условия (15), неравенство (4) и интеграл 2.3.4.1 из [6], получим

$$\begin{aligned} & (\lambda^{\alpha+\beta}I - A)R(\lambda^{\alpha+\beta})x \\ &= \lambda^\beta \int_0^\infty e^{-\lambda t} \Phi(t)x dt - \lambda^{-\alpha} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{d}{dt} I^{1-\alpha} D^\beta \Phi(t)x dt \\ &= \lambda^\beta \int_0^\infty e^{-\lambda t} \Phi(t)x dt - \lambda^{-\alpha} e^{-\lambda t} D^{\alpha-1} D^\beta \Phi(t)x \Big|_0^\infty \\ & \quad - \lambda^{1-\alpha} \int_0^\infty e^{-\lambda t} I^{1-\alpha} D^\beta \Phi(t)x dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda^\beta \int_0^\infty e^{-\lambda t} \Phi(t)x \, dt - \frac{\lambda^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty D^\beta \Phi(s)x \, ds \int_s^\infty e^{-\lambda t} (t-s)^{-\alpha} \, dt \\
&= \lambda^\beta \int_0^\infty e^{-\lambda t} \Phi(t)x \, dt - \int_0^\infty e^{-\lambda s} \frac{d}{ds} I^{1-\beta} \Phi(s)x \, ds \\
&= \lambda^\beta \int_0^\infty e^{-\lambda t} \Phi(t)x \, dt - e^{-\lambda s} D^{\beta-1} \Phi(s)x \Big|_0^\infty - \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda s} I^{1-\beta} \Phi(s)x \, ds \\
&= \lambda^\beta \int_0^\infty e^{-\lambda t} \Phi(t)x \, dt + x - \frac{\lambda}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^\infty e^{-\lambda s} \, ds \int_0^s (s-t)^{-\beta} \Phi(t)x \, dt \\
&= \lambda^\beta \int_0^\infty e^{-\lambda t} \Phi(t)x \, dt + x - \frac{\lambda}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^\infty \Phi(t)x \, dt \int_t^\infty e^{-\lambda s} (s-t)^{-\beta} \, ds \\
&= \lambda^\beta \int_0^\infty e^{-\lambda t} \Phi(t)x \, dt + x - \lambda^\beta \int_0^\infty e^{-\lambda t} \Phi(t)x \, dt = x.
\end{aligned} \tag{18}$$

Поскольку операторы A и $\Phi(t)$ коммутируют, то A и $R(\lambda^{\alpha+\beta})$ также коммутируют, поэтому выполняется и равенство

$$R(\lambda^{\alpha+\beta})(\lambda^{\alpha+\beta}I - A)x = x, \quad x \in D(A).$$

Таким образом, нам осталось установить справедливость оценки (17). Продифференцировав n раз равенство (16) по λ , получим

$$\frac{d^n(\lambda^\alpha R(\lambda^{\alpha+\beta})x)}{d\lambda^n} = \int_0^\infty (-t)^n e^{-\lambda t} \Phi(t)x \, dt. \tag{19}$$

Неравенство (17) легко следует из (19) после применения неравенства (4). Теорема доказана.

Следует отметить, что оператор A , для которого равномерно корректна задача (14), (15) при $\alpha + \beta < 2$, вообще говоря, не является генератором операторной косинус-функции, так как его резольвентное множество не содержит множества, в которое отображается правая полуплоскость при помощи функции $z \rightarrow z^2$, а в силу критерия равномерной корректности задачи

$$u''(t) = Au(t), \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = 0,$$

оно должно его содержать. Кроме того, при $\alpha + \beta < 1$ оператор A не является и генератором C_0 -полугруппы, так как в этом случае его резольвентное множество не содержит правой полуплоскости.

При доказательстве достаточности будут использованы следующие леммы.

ЛЕММА 1 (см. [4]). Пусть $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ и резольвента $R(\lambda^{\alpha+\beta})$ удовлетворяет неравенству (17). Тогда функция $\tilde{R}(\lambda) = \lambda^{\alpha+\beta-1} R(\lambda^{\alpha+\beta})$ удовлетворяет неравенству

$$\left\| \frac{d^n \tilde{R}(\lambda)}{d\lambda^n} \right\| \leq \frac{M\Gamma(\beta)n!}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^{n+1}} \tag{20}$$

для любого целого $n \geq 0$.

ЛЕММА 2. Если область определения $D(A)$ оператора A плотна в X и если при $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ оператор A имеет резольвенту $R(\lambda^{\alpha+\beta})$, которая удовлетворяет неравенству (17), то область определения любой степени оператора A также плотна в X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in X, j \in N, \mu > \omega, \lambda = M^{\alpha+\beta}$. Введем в рассмотрение последовательность $x_\lambda = \lambda^j R^j(\lambda)x$ элементов из $D(A^j)$.

При $x \in D(A)$ соотношение

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} x_\lambda = x$$

является следствием тождества

$$\lambda^j R^j(\lambda)x = x + \sum_{m=0}^{j-1} \lambda^{j-1-m} A R^{j-m}(\lambda)x \quad (21)$$

и оценки (17), в силу которой

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{j-1} \lambda^{j-1-m} A R^{j-m}(\lambda)x = 0.$$

В случае произвольного $x \in X$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется элемент $x_0 \in D(A)$ такой, что $\|x - x_0\| < \varepsilon$. Поэтому в силу тождества (21) и оценки (17)

$$\|x_\lambda - x\| = \|\lambda^j R^j(\lambda)x - x\| \leq \|\lambda^j R^j(\lambda)(x - x_0)\| + \|x - x_0\| + \|\lambda^j R^j(\lambda)x_0 - x_0\| \leq \varepsilon(M_0 + 2),$$

и лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3. Если при $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ оператор A имеет резольвенту $R(\lambda^{\alpha+\beta})$, которая удовлетворяет неравенству (17) и $u_0 \in D(A)$, то функция

$$\Phi(t)u_0 = D^{1-\beta} \frac{1}{2\pi i} \text{v. p.} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t} \lambda^{\alpha+\beta-1} R(\lambda^{\alpha+\beta})u_0 d\lambda, \quad (22)$$

где $\sigma > \max(\omega, 0)$, является решением задачи (14), (15).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя определение функции $\tilde{R}(\lambda)$ и соотношения (18), равенство (16) перепишем в виде

$$\tilde{R}(\lambda)u_0 = \lambda^{\alpha+\beta-1} R(\lambda^{\alpha+\beta})u_0 = \lambda^{\beta-1} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \Phi(t)u_0 dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} I^{1-\beta} \Phi(t)u_0 dt. \quad (23)$$

Поскольку функция $\tilde{R}(\lambda)$ в силу леммы 1 удовлетворяет неравенству (20), то, как следует из теоремы Хилле-Иосиды [12, с. 373], равенство (23) можно обратить, и мы приходим к равенству

$$I^{1-\beta} \Phi(t)u_0 = \frac{1}{2\pi i} \text{v. p.} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t} \lambda^{\alpha+\beta-1} R(\lambda^{\alpha+\beta})u_0 d\lambda, \quad (24)$$

при этом $I^{1-\beta}\Phi(t)u_0$ – сильно непрерывно дифференцируемая при $t > 0$ функция, принимающая значения из $D(A)$. Следовательно, для искомого решения $\Phi(t)u_0$ из (24) получаем представление (22).

Убедимся, что определяемая равенством (22) функция $\Phi(t)u_0$ действительно является решением задачи (14), (15).

Воспользовавшись очевидным соотношением

$$\mu R(\mu)u_0 = R(\mu)Au_0 + u_0, \quad u_0 \in D(A), \quad (25)$$

равенство (22) для $u_0 \in D(A^{n+1})$ запишем в виде

$$\Phi(t)u_0 = t^{\beta-1} \sum_{j=0}^n \frac{t^{j(\alpha+\beta)} A^j u_0}{\Gamma(j(\alpha+\beta) + \beta)} + \frac{t^{\beta-1}}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{E_{1,\beta}(\lambda t)}{\lambda^{1+n(\alpha+\beta)}} R(\lambda^{\alpha+\beta}) A^{n+1} u_0 d\lambda. \quad (26)$$

Из представления (26) при надлежащем выборе n (достаточно взять $n = 2$) вытекает непрерывная дифференцируемость при $t > 0$ функций $I^{1-\beta}\Phi(t)u_0$ и $I^{1-\alpha}D^\beta\Phi(t)u_0$, а также справедливость начальных условий (15) и соотношения (3). Кроме того, асимптотическое равенство (9) для функции $E_{1,\beta}(\lambda t)$ позволяет сделать вывод о том, что при $t \rightarrow \infty$ $\|\Phi(t)u_0\| = O(\exp(\sigma_0 t))$. Последнее замечание нужно для применения формулы обращения Поста–Уидлера (см. [13, с. 359]).

Применяя в (16) формулу обращения Поста–Уидлера, неравенство (17) и асимптотическую формулу для отношения гамма-функций, для $u_0 \in D(A^{n+1})$ получим

$$\begin{aligned} \|\Phi(t)u_0\| &= \left\| \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} \frac{d^k(\lambda^\alpha R(\lambda^{\alpha+\beta}))u_0}{d\lambda^k} \Big|_{\lambda=k/t} \right\| \\ &\leq M \|u_0\| t^{\beta-1} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(k+\beta) k^{1-\beta}}{\Gamma(k+1)(1-\omega t/k)^{k+\beta}} \\ &= M \|u_0\| t^{\beta-1} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\omega t}{k}\right)^{-k-\beta} = M \|u_0\| t^{\beta-1} e^{\omega t}, \end{aligned}$$

тем самым, нами доказано и неравенство (4).

Учитывая лемму 2, мы можем утверждать, что функция $\Phi(t)u_0$, уже для $u_0 \in D(A)$, также удовлетворяет перечисленным соотношениям.

Чтобы убедиться в справедливости равенства (14), достаточно проверить равенство

$$I^{1-\beta} D^\alpha D^\beta \Phi(t)u_0 = A I^{1-\beta} \Phi(t)u_0. \quad (27)$$

Найдем преобразование Лапласа левой и правой части равенства (27). После очевидных преобразований получим

$$\begin{aligned} L(I^{1-\beta} D^\alpha D^\beta \Phi(t)u_0) &= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt \int_0^t (t-s)^{-\beta} D^\alpha D^\beta \Phi(s)u_0 ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^\infty D^\alpha D^\beta \Phi(s)u_0 ds \int_s^\infty e^{-\lambda t} (t-s)^{-\beta} dt \\ &= \lambda^{\beta-1} \int_0^\infty e^{-\lambda s} D^\alpha D^\beta \Phi(s)u_0 ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lambda^{\beta-1}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty e^{-\lambda s} \frac{d}{ds} \int_0^t (s-\tau)^{-\alpha} D^\beta \Phi(\tau) u_0 d\tau ds \\
&= \frac{\lambda^\beta}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty e^{-\lambda s} ds \int_0^s (s-\tau)^{-\alpha} D^\beta \Phi(\tau) u_0 d\tau \\
&= \frac{\lambda^\beta}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty D^\beta \Phi(\tau) u_0 d\tau \int_\tau^\infty e^{-\lambda s} (s-\tau)^{-\alpha} ds \\
&= \lambda^{\alpha+\beta-1} \int_0^\infty e^{-\lambda \tau} \frac{d}{d\tau} I^{1-\beta} \Phi(\tau) u_0 d\tau \\
&= \frac{\lambda^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(1-\beta)} \left(-\Gamma(1-\beta) u_0 \right. \\
&\quad \left. + \lambda \int_0^\infty \Phi(t) u_0 dt \int_t^\infty e^{-\lambda s} (s-t)^{-\beta} ds \right) \\
&= -\lambda^{\alpha+\beta-1} u_0 + \lambda^{\alpha+2\beta-1} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \Phi(t) u_0 dt \\
&= -\lambda^{\alpha+\beta-1} u_0 + \lambda^{2\alpha+2\beta-1} R(\lambda^{\alpha+\beta}) u_0,
\end{aligned}$$

при этом мы воспользовались равенством (16).

С другой стороны, в силу (23) и (25)

$$\begin{aligned}
L(AI^{1-\beta} \Phi(t) u_0) &= \lambda^{\alpha+\beta-1} A R(\lambda^{\alpha+\beta}) u_0 = \lambda^{\alpha+\beta-1} (\lambda^{\alpha+\beta} R(\lambda^{\alpha+\beta}) u_0 - u_0) \\
&= \lambda^{2\alpha+2\beta-1} R(\lambda^{\alpha+\beta}) u_0 - \lambda^{\alpha+\beta-1} u_0;
\end{aligned}$$

следовательно, равенство (27) установлено и теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. *Для того чтобы задача типа Коши (14), (15) была равномерно корректной, необходимо и достаточно, чтобы при $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ оператор A имел резольвенту $R(\lambda^{\alpha+\beta})$, удовлетворяющую неравенству (17).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость нами уже доказана в теореме 2. Учитывая теорему 3, для доказательства достаточности осталось убедиться в единственности найденного формулой (22) решения. Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ – два решения задачи (14), (15). Рассмотрим функцию двух переменных

$$w(t, s) = f(\Phi(s)(u_1(t) - u_2(t))),$$

где f – произвольный линейный непрерывный функционал над X ($f \in X^*$), $t, s \geq 0$. Она, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$D_t^\alpha D_t^\beta w(t, s) = D_s^\alpha D_s^\beta w(t, s) \quad (28)$$

и нулевым начальным условиям

$$\lim_{t \rightarrow 0} D_t^{\beta-1} w(t, s) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} D_t^{\alpha-1} D_t^\beta w(t, s) = 0. \quad (29)$$

Заметим, что функция $\tilde{\Phi}(t)w_1 = I^\alpha \Phi(t)w_1$, $w_1 \in D(A)$, удовлетворяет уравнению (14) и начальным условиям

$$\lim_{t \rightarrow 0} D^{\beta-1} \tilde{\Phi}(t)w_1 = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} D^{\alpha-1} D^\beta \tilde{\Phi}(t)w_1 = w_1,$$

поэтому общее решение уравнения (28) имеет вид

$$w(t, s) = f(\Phi(s)\Phi(t)w_0 + \Phi(s)\tilde{\Phi}(t)w_1).$$

Отсюда, учитывая нулевые начальные условия (29) и произвольность $f \in X^*$, получаем $w_0 = w_1 = 0$ и $w(t, s) \equiv 0$, а следовательно, $u_1(t) \equiv u_2(t)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5. *Для того чтобы задача (14), (15) была равномерно корректной и*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|D^{\beta-1}\Phi(t) - I\| = 0, \quad (30)$$

необходимо и достаточно, чтобы $A \in B(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как доказано в теореме 1, задача (14), (15) с ограниченным оператором A равномерно корректна. В силу равенства (5) имеем

$$D^{\beta-1}\Phi(t) - I = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^{(\alpha+\beta)j} A^j}{\Gamma((\alpha+\beta)j+1)};$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \|D^{\beta-1}\Phi(t) - I\| &\leq t^{\alpha+\beta} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{(\alpha+\beta)j} \|A\|^{j+1}}{\Gamma((\alpha+\beta)j + \alpha + \beta + 1)} \\ &= t^{\alpha+\beta} \|A\| E_{\alpha+\beta, \alpha+\beta+1}(t^{\alpha+\beta} \|A\|) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $t \rightarrow 0$, и достаточность тем самым доказана.

Докажем обратное утверждение. Для $x \in X$, $t > 0$ введем в рассмотрение оператор

$$K(t)x = D^{\beta-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} d\tau \int_0^\tau (\tau-s)^{\alpha-1} \Phi(s)x ds \right)$$

и, учитывая равенство (6) при $k = \gamma = 0$, будем иметь

$$AK(t)x = \Gamma(\beta)(D^{\beta-1}\Phi(t)x - x). \quad (31)$$

Рассмотрим далее разность

$$\begin{aligned} K(t)x - \frac{t^{\alpha+\beta}x}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\ = D^{\beta-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} d\tau \int_0^\tau (\tau-s)^{\alpha-1} \left(\Phi(s) - \frac{s^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \right) x ds \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\xi)^{-\beta} d\xi \\
&\quad \times \int_0^\xi (\xi-\tau)^{\beta-1} d\tau \int_0^\tau (\tau-s)^{\alpha-1} (\Gamma(\beta)\Phi(s) - s^{\beta-1}) x ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\xi)^{-\beta} d\xi \\
&\quad \times \int_0^\xi (\Gamma(\beta)\Phi(s) - s^{\beta-1}) x ds \int_s^\xi (\xi-\tau)^{\beta-1} (\tau-s)^{\alpha-1} d\tau \\
&= \frac{B(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\xi)^{-\beta} d\xi \int_0^\xi (\xi-s)^{\alpha+\beta-1} (\Gamma(\beta)\Phi(s) - s^{\beta-1}) x ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(1-\beta)} \int_0^t (\Gamma(\beta)\Phi(s) - s^{\beta-1}) x ds \int_s^t (t-\xi)^{-\beta} (\xi-s)^{\alpha+\beta-1} d\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t (t-s)^\alpha (\Gamma(\beta)\Phi(s) - s^{\beta-1}) x ds, \tag{32}
\end{aligned}$$

при этом мы использовали интеграл 2.2.5.1 из [8].

Применяя формулу дробного интегрирования по частям [1, с. 51], из (32) получим

$$\begin{aligned}
K(t)x - \frac{t^{\alpha+\beta}x}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t (t-s)^\alpha D^{1-\beta} (D^{\beta-1}\Phi(s)x - x) ds \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} (D^{\beta-1}\Phi(s)x - x) ds,
\end{aligned}$$

поэтому в силу (30) справедлива оценка

$$\left\| K(t)x - \frac{t^{\alpha+\beta}x}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \right\| \leq \frac{\Gamma(\beta)t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \max_{0 \leq s \leq t} \|D^{\beta-1}\Phi(s) - I\| \cdot \|x\|$$

и, следовательно, $\|\Gamma(\alpha+\beta+1)t^{-\alpha-\beta}K(t)x - x\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$.

В частности, $\|\Gamma(\alpha+\beta+1)t^{-\alpha-\beta}K(t) - I\| \leq 1/2$ при $0 < t < \delta$ для некоторого $\delta > 0$. Поскольку

$$\Gamma(\alpha+\beta+1)t^{-\alpha-\beta}K(t) = I - (I - \Gamma(\alpha+\beta+1)t^{-\alpha-\beta}K(t)),$$

для этих t существует $K^{-1}(t) \in B(X)$.

Введем на области определения $D(A)$ норму $\|x\|_1 = \|Ax\| + \|x\|$ и превратим $D(A)$ в банахово пространство X_1 . Из равенства (31) и оценки (4) вытекает справедливость неравенства

$$\begin{aligned}
\|K(t)x\|_1 &= \|AK(t)x\| + \|K(t)x\| = \Gamma(\beta)\|D^{\beta-1}\Phi(t)x - x\| + \|K(t)x\| \\
&\leq \Gamma(\beta)\|D^{\beta-1}\Phi(t) - I\| \cdot \|x\| \\
&\quad + \frac{M\|x\|}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\beta)} \int_0^t (t-\xi)^{-\beta} d\xi \int_0^\xi (\xi-\tau)^{\beta-1} d\tau \int_0^\tau (\tau-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} e^{\omega s} ds \\
&\leq \Gamma(\beta)\|D^{\beta-1}\Phi(t) - I\| \cdot \|x\| + M_1 t^{\alpha+\beta} e^{\omega t} \|x\|. \tag{33}
\end{aligned}$$

Так как $A \in B(X_1, X)$, в силу (33) $AK(t) \in B(X)$ при $0 < t < \delta$. Зафиксируем t в этом интервале. Тогда для любого $x \in X$

$$\|Ax\| \leq \|AK(t)\| \cdot \|K^{-1}(t)\| \cdot \|x\|,$$

откуда $A \in B(X)$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
- [2] Кочубей А. Н. Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 8. С. 1359–1368.
- [3] Костин В. А. К задаче Коши для абстрактных дифференциальных уравнений с дробными производными // Докл. АН СССР. 1992. Т. 326. № 4. С. 597–600.
- [4] Глушак А. В. О задаче типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной // Вестн. Воронежского гос. ун-та. Сер. физ., матем. 2001. № 2. С. 74–77.
- [5] Clement Ph., Gripenberg G., Londen S.-O. Regularity properties of solutions of fractional evolution equation // Evolution Equations and their Applications in Physical and Life Sciences (Bad Herrenalb, 1998). Lecture Notes in Pure Appl. Math. V. 215. New York: Dekker, 2001. P. 235–246.
- [6] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1983.
- [7] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1965.
- [8] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 3. М.: Наука, 1967.
- [9] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986.
- [10] Бровкина Е. В., Глушак А. В. Уравнение типа Эйлера–Пуассона–Дарбу с дробной производной // Деп. ВИНТИ 14.07.00 № 1961-B00. Воронеж: Воронежский гос. техн. ун-т, 2000.
- [11] Бровкина Е. В., Глушак А. В. Об одном вырождающемся дифференциальном уравнении с дробной производной и ограниченным оператором // Деп. ВИНТИ 11.09.01 № 1949-B2001. Воронеж: Воронежский гос. техн. ун-т, 2001.
- [12] Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962.
- [13] Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.

Воронежский государственный технический университет
E-mail: mfkuchp@main.vsu.ru

Поступило
05.07.2002
Исправленный вариант
24.02.2004