Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Н. Григорьев, М. В. Карасёв, Динамическое уравнение для квантового произведения в афинных координатах на симплектическом пространстве, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 1, 42–52

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2467>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 14:50:59

УДК 517.958+530.145+512

ДИНАМИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ КВАНТОВОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ В АФИННЫХ КООРДИНАТАХ НА СИМПЛЕКТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

О. Н. Григорьев, М. В. Карасев

Выводится динамическая система, описывающая ассоциативное некоммутативное произведение функций на симплектическом пространстве. Она явно решается в квазиклассическом приближении.

Библиография: 16 названий.

1. Введение. Как известно, описание квантовых систем основано на алгебрах операторов, действующих в гильбертовом пространстве. Очень продуктивной является идея представить алгебру операторов с помощью функций, определенных на некотором многообразии, т.е. построить отображение $\text{Op}(f) \rightarrow f$ из пространства операторов в пространство функций (символов). При этом композиции операторов $\text{Op}(f)\text{Op}(g)$ будет соответствовать символ $f * g$, который называется *квантовым произведением символов f и g* . Это произведение некоммутативно, так как соответствующие операторы не перестановочны друг с другом. Кроме того, поскольку композиция операторов ассоциативна, условие ассоциативности переносится и на квантовое произведение (см. [1]–[4]).

Мы рассмотрим в данной заметке процедуру построения квантового произведения, используя уравнения внутренней динамики фазового многообразия. В качестве многообразия возьмем пространство $\mathfrak{X} \approx \mathbb{R}^{2n}$, наделенное симплектической формой ω и симплектической связностью (без кручения) Γ .

Следуя подходу деформационного квантования [1], мы рассматриваем квантовое произведение $*$ над $\mathfrak{X}$, которое зависит от параметра деформации $\hbar > 0$ так, что

$$f * g = fg - \frac{i\hbar}{2} f \nabla_{\leftarrow} \Psi \nabla_{\rightarrow} g - \frac{\hbar^2}{8} f (\nabla_{\leftarrow} \Psi \nabla_{\rightarrow})^2 g + O(\hbar^3); \quad (1.1)$$

здесь $\Psi = \omega^{-1}$ – пуассонов тензор, соответствующий форме ω , ковариантные производные ∇ задаются связностью Γ , а нижние стрелки указывают влево или вправо действует ковариантная производная.

Асимптотика (1.1) (и ее продолжение до любой точности $O(\hbar^N)$) слабая, т.е. она имеется только на гладких $\hbar$ -независимых функциях f, g . В то же время, интерес представляют более общие формулы для $*$, например, в виде интеграла

$$(f * g)(u) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{2n}} \int K_{x,y}^{\hbar}(u) f(x) g(y) dx dy \quad (1.2)$$

относительно стандартной меры на $\mathfrak{X}$. Здесь интегральное ядро $K^{\hbar}$ сингулярно при $\hbar \rightarrow 0$ так, что в слабом смысле (1.2) переходит в (1.1); в частности, имеется слабый предел

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi\hbar)^{2n}} K_{x,y}^{\hbar} = \delta_x \delta_y.$$

Но, главное, формула типа (1.2) может быть применена и к $\hbar$ -зависимым функциям, например, к быстро осциллирующим вида $f(x) \sim e^{\frac{i}{\hbar} S(x)} \varphi(x)$, что делает возможным использование произведения (1.2) в квантово-динамических задачах с фазовым пространством $\mathfrak{X}$.

Возникает проблема вычисления ядра $K^{\hbar}$. На решение этой проблемы в квазиклассическом приближении направлена теория асимптотического квантования, инициированная в [3].

Известно, что для произвольного пуассонова многообразия $\mathfrak{X}$ функции $K^{\hbar}$ соответствует лагранжево подмногообразие в некотором симплектическом пространстве $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ над конфигурационным пространством $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$. Это лагранжево подмногообразие – график операции умножения симплектического группоида $\mathcal{E}$ над $\mathfrak{X}$ [4]–[6]. Поэтому квазиклассическую асимптотику ядра $K^{\hbar}$ в общем пуассоновом случае можно вычислять с помощью модификации теории канонического оператора Маслова на случай общих симплектических многообразий [3], [4].

Чтобы реализовать этот подход, необходимо иметь (псевдо-) дифференциальные уравнения для $K^{\hbar}$. Такие уравнения были найдены в [7], что дало возможность асимптотически вычислить $K^{\hbar}$ [4]. Однако в высших приближениях получающиеся формулы чрезвычайно громоздки и не “геометричны”.

В случае, когда $\mathfrak{X}$ – симплектическое многообразие, существенное упрощение дает идея, предложенная в [8]: записать для ядра $K^{\hbar}$ динамическое уравнение типа Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial y} K_{x,y}^{\hbar} = \mathcal{H}_y^{\hbar} * K_{x,y}^{\hbar} \quad (1.3)$$

с некоторым гамильтонианом $\mathcal{H}_y^{\hbar}$, зависящим от “времени” $y \in \mathfrak{X}$. Получающаяся динамическая система нелинейна, поскольку произведение $*$ в правой части (1.3) задается ядром $K^{\hbar}$ по формуле (1.2).

Гамильтониан $\mathcal{H}_y^{\hbar}$ является 1-формой на $\mathfrak{X}$, коэффициентами которой служат функции на $\mathfrak{X}$:

$$\mathcal{H}_y^{\hbar}(x) = \mathcal{H}_y^{\hbar}(x)_j dy^j, \quad x \in \mathfrak{X}.$$

Эти коэффициенты регулярно зависят от $\hbar$:

$$\mathcal{H}^{\hbar} = \mathcal{H}^{(0)} - i\hbar \mathcal{H}^{(1)} + \hbar^2 \mathcal{H}^{(2)} + \dots, \quad (1.4)$$

где $\mathcal{H}^{(1)}, \mathcal{H}^{(2)}, \dots$ – вещественные квантовые поправки к старшей части $\mathcal{H}^{(0)}$. Старшая часть $\mathcal{H}^{(0)} = \mathcal{H}_y^{(0)}(x)$ в (1.4), по крайней мере в окрестности диагонали $x = y$, задается парой ω, Γ ; см. подробнее [8].

В [8] было показано, что при дополнительном условии вещественности $\mathcal{H}^{\hbar}$ уравнение (1.3) эффективно и геометрически-инвариантно решается в квазиклассическом приближении.

В данной заметке, не предполагая вещественности, мы вычислим гамильтониан $\mathcal{H}_y^h$ (1.4) в специальных ω -аффинных координатах на $\mathfrak{X}$, и найдем главный член ВКБ-асимптотики ядра K^h , учитывающий мнимую квантовую поправку $\mathcal{H}^{(1)}$ в (1.4). В работе [9], а также в пункте 5 ниже разбираются примеры, где такая мнимая поправка действительно появляется.

2. Аффинные координаты и вейлевское произведение. Следуя [8], мы будем называть систему координат $x_1, \dots, x_m$ на $\mathfrak{X} \approx \mathbb{R}^m$ ($m = 2n$) ω -аффинной, или просто аффинной, если для любой тройки индексов j, k, l выполнено равенство

$$\mathfrak{S}_{(j,k,l)} \omega_{js} \Gamma_{kl}^s = 0; \quad (2.1)$$

здесь ω_{js} – компоненты формы ω , а Γ_{kl}^s – символы Кристофеля связности Γ в данных координатах; по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до m , а знак $\mathfrak{S}$ означает сумму по всем циклическим перестановкам данной тройки индексов.

В аффинных координатах связность Γ задается формулой

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{3} \Psi^{ks} (\partial_i \omega_{sj} + \partial_j \omega_{si}). \quad (2.2)$$

Произведение $*$ называется *вейлевским* [10] по отношению к данной ω -аффинной системе координат, если оно инвариантно относительно вейлевской симметризации, т.е.

$$x^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \langle x^\alpha \rangle \quad \forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m).$$

Здесь слева стоит обычный моном $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m}$, а справа стоит моном в $*$ -алгебре, симметризованный по Вейлю:

$$\langle x^\alpha \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^\alpha \underbrace{(ux) * \dots * (ux)}_{|\alpha|} \Big|_{u=0},$$

где обозначено $ux = u_1 x_1 + \dots + u_m x_m$. Для вейлевского произведения в [7] была указана процедура построения операторов левого и правого регулярного представления в виде:

$$x_j * \equiv L^j = \ell_h^j \left(\frac{2}{x}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad * x_j \equiv R^j = \bar{L}^j. \quad (2.3)$$

Асимптотика символов ℓ_h явно вычисляется во всех порядках по $\hbar$:

$$\ell_h(x, p) = \ell(x, p) + i\hbar \mu(x, p) + \dots \quad (2.4)$$

Здесь главная часть символов дается формулами [11], [8]

$$\ell_j(x, p) = \Lambda \left(p \Psi(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) x_j, \quad (2.5)$$

где $\Lambda(\xi) = \xi / (e^\xi - 1)$. Вектор-функции $\ell(x, p)$ и $r(x, p) = \ell(x, -p)$ задают пуассоново бирасслоение $\ell \times r: \mathcal{E} \rightarrow \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}^{(-)}$ фазового пространства (симплектического группоида) над $\mathfrak{X}$ в прямое произведение двух копий $\mathfrak{X}$, наделенное разностью скобок Пуассона на сомножителях (см. детали в [4], [5]). Первая квантовая поправка в (2.4) имеет вид

$$\mu_j(x, p) = \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{P}_p^k}{\partial p_s} (\ell(x, p)) \frac{\partial^2 \ell_j(x, p)}{\partial x_s \partial x_k}, \quad (2.6)$$

где $\tilde{P}_p^k = P_{-p}^k$, а функция $x = P_p(\xi)$ является решением неявного уравнения $\xi = r(x, p)$ относительно x .

3. Внутренняя квантовая динамика. Теперь мы выведем динамическое уравнение (1.3) для ядра вейлевского $*$ -произведения, т.е. найдем гамильтониан $\mathcal{H}^{\hbar}$ в аффинных координатах. Будем исходить из свойства ассоциативности

$$(f * g) * h = f * (g * h).$$

Используя регулярное представление, в силу (2.3) для всех $j = 1, \dots, 2n$ имеем

$$f * x_j * g = f * (x_j * g) = f * L^j(g).$$

С другой стороны, в силу ассоциативности это же выражение записывается в виде

$$f * x_j * g = (f * x_j) * g = R^j(f) * g.$$

Используя теперь интегральную формулу (1.2), получим следующее интегральное равенство:

$$\int K_{x,y}^{\hbar}(u) R^j(f)(x) g(y) dx dy = \int K_{x,y}^{\hbar}(u) f(x) L^j(g)(y) dx dy.$$

Перебрасывая операторы регулярного представления на ядро, получим

$$\int (R_x^{*j} K_{x,y}^{\hbar})(u) f(x) g(y) dx dy = \int (L_y^{*j} K_{x,y}^{\hbar})(u) f(x) g(y) dx dy.$$

Нижний индекс y операторов означает переменную, по которой они действуют. Поскольку f и g – произвольные функции, получаем отсюда следующие уравнения на интегральное ядро K :

$$(L_y^{*j} K_{x,y}^{\hbar}) = (R_x^{*j} K_{x,y}^{\hbar}).$$

Действуя на обе части последнего равенства операторами левого регулярного представления, будем иметь (операторы L и R действуют по разным переменным, а потому коммутируют)

$$L_y^{i*} (L_y^{j*} K_{x,y}^{\hbar}) = L_y^{i*} (R_x^{j*} K_{x,y}^{\hbar}) = R_x^{j*} (L_y^{i*} K_{x,y}^{\hbar}) = R_x^{i*} (R_x^{j*} K_{x,y}^{\hbar}).$$

Отсюда по индукции для любого полинома $\mathcal{P}$ можно записать следующее соотношение:

$$\mathcal{P}(L_y^*) K_{x,y}^{\hbar} = \mathcal{P}(R_x^*) K_{x,y}^{\hbar}.$$

Однако можно считать, что коэффициенты полинома $\mathcal{P}$ – это функции от переменной y , если задать порядок действия операторов (как в [12]). Тогда получаем

$$\mathcal{P}(y, L_y^{*1}) K_{x,y}^{\hbar} = \mathcal{P}(y, R_x^*) K_{x,y}^{\hbar}.$$

Поскольку множество полиномов всюду плотно в пространстве гладких функций, получаем следующее соотношение:

$$\alpha_k^{\hbar}(y, L_y^{*1}) K_{x,y}^{\hbar} = \alpha_k^{\hbar}(y, R_x^*) K_{x,y}^{\hbar}, \quad (3.1)$$

где $\alpha_k^{\hbar}(y, z)$ – “произвольные” действительные гладкие функции, $k = 1, \dots, 2n$. Будем строить эти функции так, чтобы уравнения (3.1) превратились в уравнения типа Шрёдингера вида (1.3) (роль времени будет играть переменная y). То есть будем искать функции $\alpha_k^{\hbar}(y, z)$ из следующих соотношений:

$$\alpha_k^{\hbar}({}^2y, L_y^*) = i\hbar \frac{\partial}{\partial y_k}.$$

Сопрягая эти соотношения относительно евклидовой меры, получим

$$\alpha_k^{\hbar}({}^1y, L_y) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y_k}. \quad (3.2)$$

Разложим левую часть этого равенства в асимптотический ряд по степеням параметра $\hbar$. Для этого разложим операторы регулярного представления в соответствии с формулой (2.4) и используя формулы некоммутативного анализа [4], [12]. Получим

$$\begin{aligned} \alpha_k^{\hbar}\left({}^1y, \ell_{\hbar}\left({}^3y, -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}\right)\right) &= \alpha_k^{\hbar}\left({}^2y, \ell_{\hbar}\left({}^2y, -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}\right)\right) \\ &\quad - i\hbar \frac{\partial^2 \alpha_k^{\hbar}}{\partial y_s \partial p_s} \left({}^2y, \ell\left({}^1y', -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}\right)\right) \Big|_{y'=y} + \dots \end{aligned}$$

Будем искать функции $\alpha^{\hbar}(y, z)$ в виде асимптотического ряда

$$\alpha^{\hbar}(y, z) = \alpha^{(0)}(y, z) + \hbar \alpha^{(1)}(y, z) + \dots \quad (3.3)$$

Учитывая все сказанное, уравнения (3.2) можно переписать в виде асимптотического разложения

$$\begin{aligned} \alpha_k^{(0)}(y, \ell(y, p)) - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial^2 \alpha_k^{(0)}}{\partial \ell_j \partial \ell_m}(y, \ell(y, p)) \frac{\partial \ell_j}{\partial y_s} \frac{\partial \ell_m}{\partial p_s} - i\hbar \frac{\partial^2 \alpha_k^{(0)}}{\partial y_s \partial p_s}(y, \ell(y', p)) \Big|_{y'=y} \\ + i\hbar \mu_j(y, p) \frac{\partial \alpha_k^{(0)}}{\partial \ell_j}(y, \ell(y, p)) + \hbar \alpha_k^{(1)}(y, \ell(y, p)) + O(\hbar^2) = p_k. \end{aligned}$$

Приравнявая в этом соотношении коэффициенты при различных степенях параметра $\hbar$, получаем выражения для коэффициентов асимптотического разложения (3.3)

$$\begin{aligned} \alpha_k^{(0)}(y, \ell(y, p)) &= p_k, \\ \alpha_k^{(1)}(y, \ell(y, p)) &= \frac{i}{2} \frac{\partial^2 \alpha_k^{(0)}}{\partial \ell_j \partial \ell_m}(y, \ell(y, p)) \frac{\partial \ell_j}{\partial y_s} \frac{\partial \ell_m}{\partial p_s} - i \frac{\partial^2 \alpha_k^{(0)}}{\partial y_s \partial p_s}(y, \ell(y', p)) \Big|_{y'=y} \\ &\quad - i\mu_j(y, p) \frac{\partial \alpha_k^{(0)}}{\partial \ell_j}(y, \ell(y, p)). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Отсюда получаем выражения для коэффициентов α_1

$$\begin{aligned} \alpha^{(1)}(y, \ell) = & \frac{i}{2} \frac{\partial^2 \alpha^{(0)}}{\partial \ell_j \partial \ell_m}(y, \ell) \frac{\partial \ell_j}{\partial y_s}(y, \alpha^{(0)}(y, \ell)) \frac{\partial \ell_m}{\partial p_s}(y, \alpha^{(0)}(y, \ell)) \\ & + i \frac{\partial^2 \alpha^{(0)}}{\partial y_s \partial \ell_j}(y, \ell) \frac{\partial \ell_j}{\partial p_s}(y, \alpha^{(0)}(y, \ell)) - i \mu_j(y, \alpha^{(0)}(y, \ell)) \frac{\partial^2 \alpha^{(0)}}{\partial \ell_j}(y, \ell). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Аналогично, для операторов R^* можно выписать разложение

$$R_x^* = \ell \left(\overset{\omega}{x}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial^2 \ell}{\partial x \partial p} \left(\overset{\omega}{x}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) + i\hbar \mu \left(\overset{\omega}{x}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) + \dots$$

Поэтому для оператора $\alpha^{\hbar}(x, R_y^*)$ имеем

$$\begin{aligned} \alpha^{\hbar}(x, R_y^*) = & \alpha^{\hbar} \left(y, \ell \left(\overset{\omega}{x}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) \\ & + i\hbar \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \ell_j}{\partial x \partial p} \left(\overset{\omega}{x}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) - \mu_j \left(\overset{\omega}{x}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial \alpha^{\hbar}}{\partial \ell_j} \left(y, \ell \left(\overset{\omega}{x}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) + \dots \end{aligned}$$

Используя теперь асимптотическое разложение для функции $\alpha^{\hbar}$, получим

$$\begin{aligned} \alpha^{\hbar}(x, R_y^*) = & \alpha^{(0)} \left(y, \ell \left(\overset{\omega}{x}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) + \hbar \alpha^{(1)} \left(y, \ell \left(\overset{\omega}{x}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) \\ & + i\hbar \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \ell_j}{\partial x \partial p} \left(\overset{\omega}{x}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) - \mu_j \left(\overset{\omega}{x}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial \alpha^{(0)}}{\partial \ell_j} \left(y, \ell \left(\overset{\omega}{x}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) + \dots \end{aligned}$$

Теперь из (3.1) следует

ТЕОРЕМА 3.1. *Интегральное ядро $K = K_{x,y}^{\hbar}(u)$ ассоциативного некоммутативного $\ast$ -произведения функций на симплектическом пространстве удовлетворяет следующей системе уравнений в частных производных типа Шрёдингера ($k = 1, \dots, 2n$):*

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial y_k} K_{x,y}^{\hbar} = \left[H_{y_k}^{(0)} \left(\overset{\omega}{x}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) + \hbar H_{y_k}^{(1)} \left(\overset{\omega}{x}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) + \dots \right] K_{x,y}^{\hbar}, \quad (3.6)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} H_y^{(0)}(x, p) &= \alpha^{(0)}(y, \ell(x, p)), \\ H_y^{(1)}(x, p) &= \alpha^{(1)}(y, \ell(x, p)) + i \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \ell_j}{\partial x \partial p}(x, p) - \mu_j(x, p) \right] \frac{\partial \alpha^{(0)}}{\partial \ell_j}(y, \ell(x, p)), \end{aligned} \quad (3.7)$$

а функции $\alpha^{(0)}$ и $\alpha^{(1)}$ определены в (3.4) и (3.5).

СЛЕДСТВИЕ. Разложение $*$ -произведения (1.2) с ядром $K_{\hbar}$, определенным в (3.6), по степеням параметра $\hbar$ имеет вид (1.1).

4. ВКБ-приближение для вейлевского произведения. Итак, мы получили систему уравнений (3.6) для интегрального ядра $K^{\hbar}$. Построим приближенное решение полученных уравнений в ВКБ-форме

$$K^{\hbar} = \exp\left(\frac{i}{\hbar}S\right)(\varphi + O(\hbar)). \quad (4.1)$$

Для фазы S интегрального ядра и главного слагаемого асимптотического разложения амплитуды φ получаются соответственно система уравнений Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial y_k} + H_{yk}^{(0)}\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0 \quad (4.2)$$

и система уравнений переноса

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_k} + \left[\frac{1}{2} \operatorname{tr} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H_{yk}^{(0)}}{\partial p} \left(x, \frac{\partial S}{\partial x} \right) \right) + \operatorname{tr} \left(\frac{\partial H_{yk}^{(0)}}{\partial p} \left(x, \frac{\partial S}{\partial x} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x} + i H_{yk}^{(1)} \left(x, \frac{\partial S}{\partial x} \right) \right] \varphi = 0. \quad (4.3)$$

Начальные условия для этих систем выберем таким образом, чтобы для ядра K были выполнены следующие соотношения:

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^{2n}} \int K_{x,y}^{\hbar}(u) dx = \delta(u - y), \quad (4.4)$$

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^{2n}} \int K_{x,y}^{\hbar}(u) dy = \delta(u - x). \quad (4.5)$$

(При наличии этих соотношений единичная функция будет двусторонней единицей в $*$ -алгебре). Соотношения (4.4) и (4.5) будут выполнены с точностью $O(\hbar)$ для ядра (4.1), если

$$S(u, x, y)|_{y=u} = 0, \quad (4.6)$$

$$\varphi(u, x, y)|_{y=u} = \left| \det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} \right) \right|_{y=u}. \quad (4.7)$$

Систему уравнений (4.2), (4.3) с начальными условиями (4.6), (4.7) будем теперь решать методом характеристик. Характеристиками для этой системы являются решения уравнений

$$\frac{dP_j}{dy_k} = -\frac{\partial H_{yk}^{(0)}}{\partial x_j}(X, P), \quad \frac{dX_j}{dy_k} = \frac{\partial H_{yk}^{(0)}}{\partial p_j}(X, P) \quad (4.8)$$

с начальными условиями

$$X_j|_{y=u} = x_{0j}, \quad P_j|_{y=u} = 0. \quad (4.9)$$

Пусть решение системы Гамильтона (4.8), (4.9) найдено. Тогда решение уравнения Гамильтона–Якоби (4.2) дается обычной формулой.

ЛЕММА 4.1. *Решение уравнения Гамильтона–Якоби (4.2) ($k = 1, 2$) с начальным условием (4.6) дается формулой*

$$\begin{aligned} S(u, x, y) = & \int_u^y dy_1 \left\langle P(y, x_0), \frac{\partial X(y, x_0)}{\partial y_1} \right\rangle - H_{y_1}^{(0)}(X(y, x_0), P(y, x_0)) \\ & + \int_u^y dy_2 \left\langle P(u_1, y_2, x_0), \frac{\partial X(u_1, y_2, x_0)}{\partial y_2} \right\rangle - H_{y_2}^{(0)}(X(u_1, y_2, x_0), P(u_1, y_2, x_0)), \end{aligned} \quad (4.10)$$

где после интегрирования следует подставить $x_0 = x_0(x, y)$ – решение уравнения $x = X(x_0, y)$ относительно x_0 .

Конечно, здесь и в следующей лемме 4.2 предполагается гладкая разрешимость уравнения $x = X(x_0, y)$ относительно x_0 . Функция S (4.10) корректно определена только в соответствующей подобласти пространства $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ (см. подробнее [8]).

Оказывается, что эта конструкция фазы S интегрального ядра $K^{\hbar}$ имеет простой геометрический смысл: она выражается через площадь треугольника в пространстве $\mathfrak{X}$. В [8] показано, что фаза интегрального ядра ассоциативного некоммутативного $*$ -произведения символов, определенная формулой (4.10), совпадает с площадью мембраны, образованной тремя “эфирными” геодезическими со средними точками u, x, y , что реализует общую гипотезу [13], [14].

Система уравнений переноса (4.3) также легко решается.

ЛЕММА 4.2. *Решение системы уравнений переноса (4.3) ($k = 1, 2$) с начальным условием (4.7) дается формулой*

$$\begin{aligned} \varphi(u, x, y) = & \frac{|\det(\partial^2 S / \partial x \partial y)|_{y=u}}{\sqrt{|\det(\partial X / \partial x_0)|}} \exp \left(-i \int_u^y dy_1 H_{y_1}^{(1)}(X(y, x_0), P(y, x_0)) \right) \\ & \times \exp \left(-i \int_u^y dy_2 H_{y_2}^{(1)}(X(u_1, y_2, x_0), P(u_1, y_2, x_0)) \right), \end{aligned} \quad (4.11)$$

где после интегрирования следует подставить $x_0 = x_0(x, y)$ как в (4.10).

Эта формула для главного члена асимптотики амплитуды ядра $K^{\hbar}$ отличается от найденной в [8] множителями, содержащими первую квантовую поправку $H^{(1)}$, заданную в (3.7), (3.5). При этом гамильтониан $\mathcal{H}^{\hbar}$ в основном динамическом уравнении (1.3) уже не предполагается, в отличие от [8], вещественным в младших членах по $\hbar$.

Можно выписать также уравнения для следующих поправок к главному слагаемому асимптотического разложения амплитуды φ , и таким образом построить решение системы (3.6) с любой степенью точности по $\hbar$ вне зон фокусировки.

Появление фокальных точек, где асимптотика ядра $K^{\hbar}$ уже не имеет ВКБ-вид (4.1), а должна задаваться какой-то модификацией канонического оператора Маслова [15], определяется обращением в нуль якобиана $\det(\partial X / \partial x_0)$. Появление фокальных точек над плоскостью Лобачевского было продемонстрировано в [16].

5. Пример. Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим следующий несложный пример. В качестве исходного многообразия возьмем правую полуплоскость $x_1 > 0$ двумерной плоскости (x_1, x_2) , снабженную пуассоновой структурой

$$\Psi^{12}(x) = -2x_1^{3/2}.$$

Считаем, что координаты x_1, x_2 аффинные. Соответствующая связность (2.2) здесь имеет только два отличные от нуля символа Кристоффеля:

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{1}{x_1}, \quad \Gamma_{12}^2 = -\frac{1}{2x_1}.$$

Кривизна данной связности является ковариантно постоянной, т.е. $\nabla R = 0$ и, таким образом, наше пространство симметрическое.

Система уравнений Шрёдингера (3.6) с учетом формул (2.5), (2.6), (3.5) и (3.7) будет иметь вид

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial y_1} K_{x,y}^{\hbar} &= \left[\frac{\ell_2 - y_2}{y_1 \sqrt{\ell_1}} - \frac{i\hbar}{2} \left(\frac{3}{y_1} + \frac{2\ell_1 + x_1}{y_1(\ell_1 + x_1)} \right) \right] K_{x,y}^{\hbar}, \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial y_2} K_{x,y}^{\hbar} &= \frac{y_1 - \ell_1}{y_1 \sqrt{\ell_1}} K_{x,y}^{\hbar}, \end{aligned}$$

где $\ell = \ell(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x})$, а левые отображения сокращения заданы формулами

$$\begin{aligned} \ell_1(x, p) &= x_1 + \frac{1}{2} x_1 p_2 (x_1 p_2 - \sqrt{x_1(x_1 p_2^2 + 4)}), \\ \ell_2(x, p) &= x_2 - \frac{1}{2} x_1 p_1 (x_1 p_2 - \sqrt{x_1(x_1 p_2^2 + 4)}). \end{aligned}$$

Применяя теперь к этому уравнению описанный выше метод ВКБ, т.е. решая соответствующие уравнения Гамильтона–Якоби (4.2) и переноса (4.3), получим для ядра $K_{x,y}^{\hbar}(u)$ следующее выражение:

$$K_{x,y}^{\hbar}(u) = \frac{x_1 + y_1}{2x_1^2 y_1^2} \exp \left(\frac{i}{\hbar} \frac{u_2(y_1 - x_1) + x_2(u_1 - y_1) + y_2(x_1 - u_1)}{\sqrt{x_1 y_1 u_1}} \right) + O(\hbar). \quad (5.1)$$

Покажем теперь, что в данном примере остаток $O(\hbar)$ на самом деле равен нулю.

Построим семейство самосопряженных операторов $\mathbf{S}_x$, которое задает гомоморфизм $f \rightarrow \text{Op}(f)$ алгебры символов в алгебру операторов по следующей формуле:

$$\text{Op}(f) = \int f(x) \mathbf{S}_x dx. \quad (5.2)$$

Мы строим $\mathbf{S}_x$ исходя из того, что в аффинных координатах должно быть $\text{Op}(f) = f(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, где в правой части $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ симметризованы по Вейлю и удовлетворяют соотношениям

$$[\hat{x}_1, \hat{x}_2] = -i\hbar \Psi^{12}(\hat{x}_1, \hat{x}_2).$$

Тогда семейство $\mathbf{S}_x$ может быть представлено в виде

$$\mathbf{S}_x = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(\tau_1 x_1 + \tau_2 x_2)\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar}(\tau_1 \hat{x}_1 + \tau_2 \hat{x}_2)\right) d\tau_1 d\tau_2. \quad (5.3)$$

В гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R})$ выберем следующую реализацию коммутационных соотношений:

$$\hat{x}_1 = \exp t, \quad \hat{x}_2 = -i\hbar \exp \frac{t}{2} \left(2 \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\right).$$

Подставляя эти операторы в формулу (5.3), легко вычислим семейство $\mathbf{S}_x$. Оно действует по формуле

$$(\mathbf{S}_x \psi)(t) = \frac{1}{x_1^{3/2}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \frac{\exp(t/2) - x_1 \exp(-t/2)}{x_1} x_2\right) \psi(-t + 2 \log x_1), \quad \psi \in L^2(\mathbb{R}).$$

Введем также “двойственное” семейство операторов $\tilde{\mathbf{S}}_x$ так, чтобы было выполнено соотношение

$$\mathrm{tr}(\tilde{\mathbf{S}}_x \mathbf{S}_y) = \delta(x - y).$$

Нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{S}}_x \psi)(t) &= \frac{1}{2x_1^{1/2}} \left(\exp \frac{t}{2} + x_1 \exp\left(\frac{-t}{2}\right) \right) \\ &\times \exp\left(\frac{i}{\hbar} \frac{\exp(t/2) - x_1 \exp(-t/2)}{x_1} x_2\right) \psi(-t + 2 \log x_1). \end{aligned}$$

Символ оператора (5.2) восстанавливается по формуле

$$f(x) = \mathrm{tr}(\tilde{\mathbf{S}}_x \mathrm{Op}(f)).$$

Отсюда получаем, что ядро квантового произведения имеет вид следа композиции

$$K_{x,y}^{\hbar}(u) = \mathrm{tr}(\tilde{\mathbf{S}}_u \mathbf{S}_x \mathbf{S}_y) = \frac{x_1 + y_1}{2x_1^2 y_1^2} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \frac{u_2(y_1 - x_1) + x_2(u_1 - y_1) + y_2(x_1 - u_1)}{\sqrt{x_1 y_1 u_1}}\right),$$

т.е. остаток в (5.1) на самом деле отсутствует.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bayen F., Flato M., Fronsdal C., Lichnerowicz A., Sternheimer D. Deformation theory and quantization // Ann. Physics. 1978. V. 111. P. 61–151.
- [2] Omori H., Maeda Y., Yoshioka A., Weyl manifolds and deformation quantization // J. Adv. Math. 1997. V. 85. P. 224–255.

- [3] Карасев М. В., Маслов В. П. Асимптотическое и геометрическое квантование // УМН. 1984. Т. 39. №6. С. 115–173.
- [4] Карасев М. В., Маслов В. П. Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование. М.: Наука, 1991.
- [5] Карасев М. В. Аналоги объектов теории групп Ли для нелинейных скобок Пуассона // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50. №3. С. 508–538.
- [6] Weinstein A. Symplectic groupoids and Poisson manifolds // Bull. Amer. Math. Soc. 1987. V. 16. P. 101–104.
- [7] Карасев М. В. Квантование нелинейных скобок Ли–Пуассона в квазиклассическом приближении // Препринт № ИТР-85-72Р. Киев: ИТФ, 1985.
- [8] Karasev M. Quantization and intrinsic dynamics // Asymptotic Methods For Wave And Quantum Equations / ed. M. Karasev et al. Advances in Math. Sci. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2003.
- [9] Григорьев О. Н., Карасев М. В. Внутренняя квантовая динамика и ее операторное представление над плоскостью с нестандартной связностью // Russ. J. Math. Phys. 2003. V. 10. №4. P. 422–435.
- [10] Karasev M. V. Advances in quantization: quantum tensors, explicit star-products, and restriction to irreducible leaves // Diff. Geometry Appl. 1998. V. 9. P. 89–134.
- [11] Karasev M. V. Maslov quantization conditions in higher cohomology and analogs of notions developed in Lie theory for canonical fiber bundles of symplectic manifolds // Deposited at VINITI (March 12, 1982, № 1092-82, 1093-82). М.: МИЭМ, 1981.
- [12] Маслов В. Операторные методы. М.: Наука, 1973.
- [13] Березин Ф. А. Квантование // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1974. Т. 38. № 5. С. 1109–1165.
- [14] Weinstein A. Traces and triangles in symmetric symplectic spaces // Contemp. Math. 1994. V. 179. P. 262–270.
- [15] Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1965.
- [16] Tuynman G., Rios P. Weyl quantization from geometric quantization // Preprint. Lille, 1999.

Московский государственный институт электроники и математики
E-mail: karasev@miem.edu.ru

Поступило
17.10.2003
Исправленный вариант
11.03.2004