Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Кореновский, Лемма Рисса “о восходящем солнце”
для многих переменных и неравенство Джона–Ниренберга,
Матем. заметки, 2005, том 77, выпуск 1, 53–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2469>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 13:10:51

УДК 517.5

ЛЕММА РИССА “О ВОСХОДЯЩЕМ СОЛНЦЕ” ДЛЯ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ И НЕРАВЕНСТВО ДЖОНА–НИРЕНБЕРГА

А. А. Кореновский

Получен многомерный аналог известной леммы Ф. Рисса “о восходящем солнце”. Для размерности пространства $d = 2$ доказан более точный вариант. С помощью этих лемм установлен анизотропный аналог неравенства Джона–Ниренберга для функции с ограниченным средним колебанием с точной постоянной в показателе экспоненты. Ранее эта точная постоянная была известна в одномерном случае.

Библиография: 12 названий.

1. Формулировка основных результатов. В ряде вопросов анализа, в частности, для оценок функций распределения и равноизмеримых перестановок, часто оказывается полезной следующая лемма Кальдерона–Зигмунда.

ЛЕММА А (см. [1], [2, с. 232]). Пусть функция f суммируема на кубе¹ $Q_0 \subset \mathbb{R}^d$ и число

$$\alpha \geq \frac{1}{|Q_0|} \int_{Q_0} |f(x)| dx.$$

Тогда найдется не более, чем счетный набор кубов $Q_j \subset Q_0$, $j = 1, 2, \dots$, с попарно не пересекающимися внутренностями, таких, что

$$\alpha < \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |f(x)| dx \leq 2^d \alpha, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (1.1)$$

$$|f(x)| \leq \alpha \quad \text{для почти всех } x \in Q_0 \setminus \left(\bigcup_{j \geq 1} Q_j \right).$$

В одномерном случае уточненным вариантом леммы Кальдерона–Зигмунда может служить такой вариант леммы Ф. Рисса “о восходящем солнце”.

Работа выполнена при частичной поддержке ДФФД, грант № Ф7/329-2001, и совместной украинско-французской программы научного сотрудничества “ДНПРО”.

¹Всюду в работе рассматриваются только такие кубы и параллелепипеды, стороны у которых параллельны координатным осям.

ЛЕММА В (см. [3], [4, с. 352], [5]). Пусть функция f суммируема на отрезке $I_0 \equiv [a_0, b_0] \subset \mathbb{R}$ и число

$$\alpha \geq \frac{1}{b_0 - a_0} \int_{a_0}^{b_0} f(x) dx.$$

Тогда найдется не более, чем счетный набор попарно не пересекающихся интервалов $I_j \subset I_0$, $j = 1, 2, \dots$, таких, что

$$\frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f(x) dx = \alpha, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (1.2)$$

$$f(x) \leq \alpha \quad \text{для почти всех } x \in I_0 \setminus \left(\bigcup_{j \geq 1} I_j \right). \quad (1.3)$$

Равенство (1.2), в отличие от оценки (1.1), делает лемму “о восходящем солнце” более предпочтительной по сравнению с леммой Кальдерона–Зигмунда; как правило, это сказывается на точности оценок, получаемых с помощью этих лемм. С другой стороны, лемма В справедлива лишь при $d = 1$ и ее доказательства в [3]–[5] не могут быть перенесены на многомерный случай. Это связано с тем, что эти доказательства основаны на применении канонического разложения открытого множества на действительной прямой. Следующий простой пример показывает, что в лемме А вместо неравенства (1.1) нельзя гарантировать выполнение равенства (1.2).

ПРИМЕР. Положим $f(x) = 1 - \chi_{[1/2, 1] \times [1/2, 1]}(x)$, где $x \equiv (x_1, x_2) \in Q_0 \equiv [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$, а χ_E – характеристическая функция множества E . Тогда

$$\frac{1}{|Q_0|} \int_{Q_0} f(x) dx = \frac{3}{4}.$$

Пусть $\alpha = 7/8 > 3/4$. Для того, чтобы точки из окрестности начала координат были покрыты кубом $Q_1 \subset Q_0$ таким, что

$$\frac{1}{|Q_1|} \int_{Q_1} f(x) dx = \alpha,$$

необходимо, чтобы куб Q_1 имел вид $Q_1 = [0, \gamma]^2$, где число $\gamma \in (1/2, 1)$ определяется равенством

$$\frac{7}{8} = \alpha = \frac{1}{|Q_1|} \int_{Q_1} f(x) dx = \frac{1}{\gamma^2} \left(\gamma - \frac{1}{4} \right),$$

т.е. $\gamma = (4 + \sqrt{2})/7$. Но тогда ясно, что точки $x = (x_1, x_2) \in Q_0$, где $\gamma < x_1 < 1$, $0 < x_2 < \epsilon$, при достаточно малом $\epsilon > 0$ не могут быть покрыты каким-либо кубом $Q_2 \subset Q_0$ так, чтобы внутренности кубов Q_1 и Q_2 не пересекались, и было выполнено равенство

$$\frac{1}{|Q_2|} \int_{Q_2} f(y) dy = \alpha.$$

При доказательстве леммы А используется метод деления и отбора кубов, который называют иногда “техникой моментов остановки” (см. [2, с. 233]). Один из результатов данной статьи состоит в модификации этого метода для того, чтобы получить новое, простое доказательство леммы В “о восходящем солнце”. Это доказательство содержится в п. 2.

Как видно из приведенного выше примера, аналог леммы В в многомерном случае не имеет места, если роль одномерных интервалов будут играть многомерные кубы. Иначе обстоит дело, если вместо кубов рассматривать многомерные параллелепипеды. Основной результат этой работы заключается в следующей лемме.

ЛЕММА 1. Пусть $d \geq 2$, параллелепипед $R_0 \subset \mathbb{R}^d$, функция f суммируема на R_0 и число

$$\alpha \geq \frac{1}{|R_0|} \int_{R_0} f(x) dx.$$

Тогда найдется не более, чем счетный набор параллелепипедов $R_j \subset R_0$, $j = 1, 2, \dots$, с попарно не пересекающимися внутренностями, таких, что

а) для $j = 1, 2, \dots$ справедливо равенство

$$\frac{1}{|R_j|} \int_{R_j} f(x) dx = \alpha;$$

б) для почти каждой точки $x \in R_0 \setminus (\bigcup_{j \geq 1} R_j)$ существует последовательность стягивающихся к точке x вложенных друг в друга параллелепипедов $J_s(x)$, $s = 1, 2, \dots$, таких, что

$$\frac{1}{|J_s(x)|} \int_{J_s(x)} f(y) dy \leq \alpha.$$

Доказательство этой леммы содержится в п. 2. По существу, оно является естественной модификацией доказательства леммы В из этого же пункта для многомерного случая. В силу известной теоремы Йессена–Марцинкевича–Зигмунда (см. [6], [7, с. 51]) из леммы 1 мгновенно получаем полезное для приложений

СЛЕДСТВИЕ 1. Если в условии леммы 1 дополнительно предположить, что

$$\int_{R_0} |f(x)| \log^{d-1}(2 + |f(x)|) dx < \infty, \quad (1.4)$$

то для полученных параллелепипедов $R_j \subset R_0$ будут выполнены следующие соотношения:

$$\frac{1}{|R_j|} \int_{R_j} f(x) dx = \alpha, \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$f(x) \leq \alpha \quad \text{для почти всех } x \in R_0 \setminus \left(\bigcup_{j \geq 1} R_j \right).$$

При $d = 1$ это следствие совпадает с леммой В. Уточняя доказательство леммы 1, в п. 2 мы показываем, что и при $d = 2$ условие (1.4) в следствии 1 можно не предполагать выполненным. Именно, справедлива

ЛЕММА 2. Пусть функция f суммируема на параллелепипеде $R_0 \subset \mathbb{R}^2$ и число

$$\alpha \geq \frac{1}{|R_0|} \int_{R_0} f(x) dx.$$

Тогда найдется не более, чем счетный набор параллелепипедов $R_j \subset R_0$, $j = 1, 2, \dots$, внутренности которых попарно не пересекаются, таких, что

$$\frac{1}{|R_j|} \int_{R_j} f(x) dx = \alpha, \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$f(x) \leq \alpha \quad \text{для почти всех } x \in R_0 \setminus \left(\bigcup_{j \geq 1} R_j \right).$$

Автор глубоко признателен В. И. Коляде и Я. Гилевичу за постоянное внимание к работе и поддержку.

2. Доказательства лемм В, 1 и 2. Для суммируемой на множестве E , $0 < |E| < \infty$, функции f среднее значение будем обозначать через

$$f_E \equiv \frac{1}{|E|} \int_E f(x) dx.$$

Нам понадобится следующая

ТЕОРЕМА ЛЕБЕГА [8, с. 21]. Пусть функция f локально суммируема на $\mathbb{R}^d$. Тогда для почти всех $x \in \mathbb{R}^d$ существует предел

$$\lim_{|R| \rightarrow 0} \frac{1}{|R|} \int_R f(y) dy = f(x),$$

где параллелепипеды $R \subset \mathbb{R}^d$ стягиваются к точке x и таковы, что отношение длин их сторон ограничено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ В. Достаточно рассмотреть случай

$$\alpha > \frac{1}{|I_0|} \int_{I_0} f(x) dx.$$

Разделим I_0 пополам и получим два интервала $I^{(1)}$ и $I^{(2)}$. Если

$$\frac{1}{|I^{(k)}|} \int_{I^{(k)}} f(x) dx < \alpha, \quad k = 1, 2,$$

то переходим к следующему шагу, на котором оба интервала $I^{(k)}$ будут делиться дальше. Если же среднее значение функции f на одном из интервалов (пусть, для определенности, это будет $I^{(1)} \equiv (a_0, b)$, где $b = (a_0 + b_0)/2$) больше либо равно α , то рассмотрим функцию

$$F(x) = \frac{1}{x - a_0} \int_{a_0}^x f(y) dy, \quad b \leq x \leq b_0.$$

Ясно, что F непрерывна, $F(b) \geq \alpha$ и

$$F(b_0) = \frac{1}{|I_0|} \int_{I_0} f(y) dy < \alpha.$$

По теореме о промежуточном значении найдется такое $b_1 \in [b, b_0)$, что $F(b_1) = \alpha$. При своем интервале (a_0, b_1) очередной номер j , т.е. отнесем его к набору $\{I_j\}$, и делить его уже не будем. Ясно, что

$$\frac{1}{|I_j|} \int_{I_j} f(y) dy = F(b_1) = \alpha,$$

а поскольку

$$\frac{1}{|I_0|} \int_{I_0} f(y) dy < \alpha,$$

то для интервала $I' \equiv (a_0, b_0) \setminus (a_0, b_1]$ будем иметь

$$\frac{1}{|I'|} \int_{I'} f(y) dy < \alpha.$$

Этот интервал I' будем делить дальше на следующем шаге.

На очередном шаге с каждым интервалом, подлежащим дальнейшему делению после предыдущего шага, проделываем аналогичную описанной выше процедуру деления и отбора.

В результате такого процесса получаем счетный набор попарно не пересекающихся интервалов I_j , для которых справедливо равенство (1.2). Докажем (1.3). Пусть $x \in I_0 \setminus (\bigcup_{j \geq 1} I_j)$ и x не является концом никакого из интервалов I_j . Тогда найдется последовательность интервалов $I'_k \equiv I'_k(x)$, содержащих точку x , которые делились на каждом шаге. Заметим, что при переходе от одного шага к другому длина каждого подлежащего делению интервала уменьшалась не менее, чем в два раза. Поэтому интервалы $I'_k(x)$ стягиваются к точке x и

$$\frac{1}{|I'_k(x)|} \int_{I'_k(x)} f(y) dy < \alpha, \quad k = 1, 2, \dots$$

Но в силу теоремы Лебега для почти всех x справедливо равенство

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|I'_k(x)|} \int_{I'_k(x)} f(y) dy.$$

Отсюда следует утверждение (1.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Если $f_{R_0} = \alpha$, то утверждение леммы очевидно. Пусть $f_{R_0} < \alpha$.

На первом шаге обозначим $J^{(1,1)} = R_0$. После s -го шага получим набор параллелепипедов $J^{(s,k)}$, $k = 1, \dots, r_s$, где $r_s \leq 2^{s-1}$, обладающих следующими свойствами:

- 1) $f_{J^{(s,k)}} < \alpha$, $k = 1, \dots, r_s$;
- 2) каждый $J^{(s,k')}$ содержится в некотором $J^{(s-1,k'')}$;
- 3) при $k' \neq k''$ внутренности параллелепипедов $J^{(s,k')}$ и $J^{(s,k'')}$ не пересекаются.

Пусть $J^{(s,k)} \equiv \prod_{i=1}^d [a_i^{(s,k)}, b_i^{(s,k)}]$ – один из этих параллелепипедов; длины его сторон $b_i^{(s,k)} - a_i^{(s,k)}$ обозначим через $l_i^{(s,k)}$. Найдем такое i_0 , $1 \leq i_0 \leq d$, что

$$l_{i_0}^{(s,k)} = \max_{1 \leq i \leq d} l_i^{(s,k)},$$

и положим $c = \frac{1}{2}(a_{i_0}^{(s,k)} + b_{i_0}^{(s,k)})$, т.е. поделим точкой c пополам наибольшую из сторон параллелепипеда $J^{(s,k)}$. В результате получаем два параллелепипеда

$$R' = [a_1^{(s,k)}, b_1^{(s,k)}] \times \cdots \times [a_{i_0-1}^{(s,k)}, b_{i_0-1}^{(s,k)}] \times [a_{i_0}^{(s,k)}, c] \times [a_{i_0+1}^{(s,k)}, b_{i_0+1}^{(s,k)}] \times \cdots \times [a_d^{(s,k)}, b_d^{(s,k)}]$$

и

$$R'' = [a_1^{(s,k)}, b_1^{(s,k)}] \times \cdots \times [a_{i_0-1}^{(s,k)}, b_{i_0-1}^{(s,k)}] \times [c, b_{i_0}^{(s,k)}] \times [a_{i_0+1}^{(s,k)}, b_{i_0+1}^{(s,k)}] \times \cdots \times [a_d^{(s,k)}, b_d^{(s,k)}].$$

Ясно, что $R' \cup R'' = J^{(s,k)}$ и внутренности параллелепипедов R' и R'' не пересекаются. Возможна одна и только одна из двух следующих ситуаций.

1. $f_{R'} < \alpha$ и $f_{R''} < \alpha$; в этом случае скажем, что параллелепипеды $J^{(s+1,k')} \equiv R'$ и $J^{(s+1,k'')} \equiv R''$ получены в результате уменьшения i_0 -й стороны параллелепипеда $J^{(s,k)}$; отнесем их к параллелепипедам $(s+1)$ -го уровня, где k' и k'' – некоторые номера. На этом деление параллелепипеда $J^{(s,k)}$ заканчивается.

2. Среднее значение функции f по одному из параллелепипедов R' или R'' больше или равно α . Заметим, что при этом среднее значение функции f по другому параллелепипеду будет меньше, чем α . Это следует из того, что $f_{J^{(s,k)}} < \alpha$. Если $f_{R'} = \alpha$, то положим $R_j \equiv R'$ (j – очередной номер), $J^{(s+1,k')} \equiv R''$, где k' – некоторый номер, и на этом закончим деление параллелепипеда $J^{(s,k)}$. Если же $f_{R'} > \alpha$, то рассмотрим непрерывную на $[c, b_{i_0}^{(s,k)}]$ функцию

$$F(t) = \left[(t - a_{i_0}^{(s,k)}) \prod_{i \neq i_0} (b_i^{(s,k)} - a_i^{(s,k)}) \right]^{-1} \\ \times \int_{a_1^{(s,k)}}^{b_1^{(s,k)}} dx_1 \cdots \int_{a_{i_0-1}^{(s,k)}}^{b_{i_0-1}^{(s,k)}} dx_{i_0-1} \int_{a_{i_0}^{(s,k)}}^t dx_{i_0} \int_{a_{i_0+1}^{(s,k)}}^{b_{i_0+1}^{(s,k)}} dx_{i_0+1} \cdots \int_{a_d^{(s,k)}}^{b_d^{(s,k)}} f(x) dx_d.$$

Имеем $F(c) = f_{R'} > \alpha$, $F(b_{i_0}^{(s,k)}) = f_{J^{(s,k)}} < \alpha$. Поэтому в силу непрерывности функции F найдется такое δ , $0 < \delta < \frac{1}{2}l_{i_0}^{(s,k)}$, что $F(b_{i_0}^{(s,k)} - \delta) = \alpha$. Положим

$$\delta' = \sup \{ \delta : F(b_{i_0}^{(s,k)} - \delta) = \alpha \}, \quad c' = b_{i_0}^{(s,k)} - \delta', \\ R_j = [a_1^{(s,k)}, b_1^{(s,k)}] \times \cdots \times [a_{i_0-1}^{(s,k)}, b_{i_0-1}^{(s,k)}] \\ \times [a_{i_0}^{(s,k)}, c'] \times [a_{i_0+1}^{(s,k)}, b_{i_0+1}^{(s,k)}] \times \cdots \times [a_d^{(s,k)}, b_d^{(s,k)}],$$

где j – очередной номер,

$$J^{(s+1,k')} = [a_1^{(s,k)}, b_1^{(s,k)}] \times \cdots \times [a_{i_0-1}^{(s,k)}, b_{i_0-1}^{(s,k)}] \\ \times [c', b_{i_0}^{(s,k)}] \times [a_{i_0+1}^{(s,k)}, b_{i_0+1}^{(s,k)}] \times \cdots \times [a_d^{(s,k)}, b_d^{(s,k)}],$$

где k' – некоторый номер. Ясно, что $f_{R_j} = F(c') = \alpha$, где

$$\frac{1}{2}(a_{i_0}^{(s,k)} + b_{i_0}^{(s,k)}) < c' < b_k^{(s,k)} \quad \text{и} \quad f_{J^{(s+1,k')}} < \alpha.$$

Скажем, что параллелепипед $J^{(s+1,k')} \subset J^{(s,k)}$ получен в результате уменьшения i_0 -й стороны параллелепипеда $J^{(s,k)}$.

Случай $f_{R''} \geq \alpha$ исчерпывается аналогичным образом.

Этим завершается рассмотрение второй ситуации.

Прделав такую процедуру для всех $k = 1, \dots, r_s$, переходим к следующему, $(s+1)$ -у шагу. В результате этого процесса получим счетный набор параллелепипедов R_j таких, что $f_{R_j} = \alpha$, $j = 1, 2, \dots$, причем из самого построения ясно, что внутренности параллелепипедов R_j попарно не пересекаются.

Пусть $x \in R_0 \setminus (\bigcup_{j \geq 1} R_j)$ и x не лежит на стороне никакого из параллелепипедов $J^{(s,k)}$. Тогда для каждого s найдется параллелепипед $J_s(x) \equiv J^{(s,k_s)}$, содержащий точку x . Поскольку $f_{J^{(s,k)}} < \alpha$ при любых s, k , то и $f_{J_s(x)} < \alpha$. Кроме того, поскольку при переходе от $J^{(s,k_s)}$ к $J^{(s+1,k_{s+1})} \subset J^{(s,k_s)}$ наибольшая сторона параллелепипеда $J^{(s,k_s)}$ уменьшается не менее, чем в два раза, то для отношения их диаметров получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\text{diam } J^{(s+1,k_{s+1})}}{\text{diam } J^{(s,k_s)}} \right)^2 &= \frac{\sum_{i=1}^d [b_i^{(s+1,k_{s+1})} - a_i^{(s+1,k_{s+1})}]^2}{\sum_{i=1}^d [b_i^{(s,k_s)} - a_i^{(s,k_s)}]^2} \\ &\leq \frac{\sum_{i=1}^d [b_i^{(s,k_s)} - a_i^{(s,k_s)}]^2 - \frac{3}{4} \max_{1 \leq i \leq d} [b_i^{(s,k_s)} - a_i^{(s,k_s)}]^2}{\sum_{i=1}^d [b_i^{(s,k_s)} - a_i^{(s,k_s)}]^2} \\ &\leq 1 - \frac{3}{4d}. \end{aligned}$$

Это означает, что $\text{diam } J_s(x) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$. Таким образом, параллелепипеды $J_s(x)$ содержатся один в одном и стягиваются к точке x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Будем использовать обозначения, принятые при доказательстве леммы 1. В силу теоремы Лебега достаточно для почти каждой точки $x \in R_0 \setminus (\bigcup_{j \geq 1} R_j)$ построить последовательность параллелепипедов $Q_m \equiv Q_m(x)$, $m = 1, 2, \dots$, стягивающихся к точке x , таких, что отношение длин сторон этих параллелепипедов ограничено, и $f_{Q_m(x)} \leq \alpha$.

Пусть $d = 2$, $x \in R_0 \setminus (\bigcup_{j \geq 1} R_j)$ и x не лежит на стороне никакого из параллелепипедов $J^{(s,k)}$, где R_j и $J^{(s,k)}$ – параллелепипеды, построенные при доказательстве леммы 1. Обозначим $J_s \equiv J_s(x)$ и пусть $l_1^{(s)}$ и $l_2^{(s)}$ – длины сторон параллелепипеда J_s . Тогда $l_1^{(s)} > 0$, $l_2^{(s)} > 0$, $s = 1, 2, \dots$,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} l_1^{(s)} = \lim_{s \rightarrow \infty} l_2^{(s)} = 0$$

и при каждом s из двух пар чисел $(l_1^{(s)}, l_2^{(s)})$ и $(l_1^{(s+1)}, l_2^{(s+1)})$ меньший элемент первой пары равен соответствующему элементу второй пары, а больший элемент первой пары больше соответствующего элемента второй пары не менее, чем в два раза. Отсюда следует, что найдется такая последовательность номеров s_m , $m = 1, 2, \dots$, что

$$l_2^{(s_m+1)} < l_1^{(s_m+1)} = l_1^{(s_m)} \leq l_2^{(s_m)}.$$

Будем различать такие три случая.

1. Если $l_2^{(s_m+1)} \geq \frac{1}{2}l_1^{(s_m+1)}$, то положим $Q_m = J_{s_m+1}$. Тогда из неравенства

$$\frac{1}{2} \leq \frac{l_2^{(s_m+1)}}{l_1^{(s_m+1)}} \leq 1$$

следует, что отношение длин сторон параллелепипеда Q_m не превосходит 2. Кроме того, $f_{Q_m} = f_{J_{s_m+1}} < \alpha$.

2. Если $l_2^{(s_m)} \leq 2l_1^{(s_m)}$, то положим $Q_m = J_{s_m}$. Тогда $f_{Q_m} < \alpha$, а из неравенства

$$1 \leq \frac{l_2^{(s_m)}}{l_1^{(s_m)}} \leq 2$$

получаем, что отношение длин сторон параллелепипеда Q_m снова не превосходит 2.

3. Осталось рассмотреть случай, когда

$$l_2^{(s_m+1)} < \frac{1}{2}l_1^{(s_m+1)}, \quad l_2^{(s_m)} > 2l_1^{(s_m)}. \quad (2.1)$$

В этом случае параллелепипед $J^{(s_m+1, \cdot)} \equiv J_{s_m+1}$ получен из $J^{(s_m, \cdot)} \equiv J_{s_m}$ путем уменьшения второй стороны параллелепипеда $J^{(s_m, \cdot)}$ более, чем в два раза, т.е. имела место вторая из рассмотренных при доказательстве леммы 1 ситуаций². Заметим, что при этом ни одно из равенств $f_{R'} = \alpha$ или $f_{R''} = \alpha$ невозможно, ибо согласно построению параллелепипедов $J^{(s, k)}$ любое из этих равенств противоречит условию (2.1).

Пусть, например, $f_{R'} > \alpha$. Тогда построенная при доказательстве леммы 1 функция F обладает на $[c, b_2^{(s_m, \cdot)}]$ следующими свойствами:

$$F(c) > \alpha, \quad F(b_2^{(s_m, \cdot)}) < \alpha, \quad F(b_2^{(s_m, \cdot)} - l_2^{(s_m+1)}) = \alpha,$$

а из определения $\delta' = l_2^{(s_m+1)}$ следует, что для любого l , $l_2^{(s_m+1)} < l \leq \frac{1}{2}l_2^{(s_m)}$, справедливо неравенство

$$F(b_2^{(s_m, \cdot)} - l) > \alpha.$$

Из (2.1) имеем

$$l_2^{(s_m+1)} < l_1^{(s_m)} \leq \frac{1}{2}l_2^{(s_m)},$$

так что

$$F(b_2^{(s_m, \cdot)} - l_1^{(s_m)}) > \alpha. \quad (2.2)$$

Положим

$$Q_m = [a_1^{(s_m, \cdot)}, b_1^{(s_m, \cdot)}] \times [b_2^{(s_m, \cdot)} - l_1^{(s_m)}, b_2^{(s_m, \cdot)}].$$

Тогда Q_m — квадрат, $J_{s_m+1} \subset Q_m \subset J_{s_m}$, а из неравенства $f_{J_{s_m}} < \alpha$ и из (2.2) следует, что $f_{Q_m} < \alpha$.

Итак, построенная последовательность Q_m , $m = 1, 2, \dots$, обладает нужными свойствами.

²В записи $J^{(s, \cdot)}$ точкой обозначается какой-либо номер.

3. Неравенство Джона–Ниренберга. В качестве одного из приложений лемм 1 и 2 рассмотрим оценку перестановки функции с ограниченным средним колебанием и неравенство Джона–Ниренберга. Сначала напомним определения и некоторые известные результаты.

Для измеримой на множестве $E \subset \mathbb{R}^d$ функции f *невозрастающей равноизмеримой перестановкой* называется функция

$$f^*(t) = \sup_{e \subset E, |e|=t} \inf_{x \in e} |f(x)|, \quad 0 < t \leq |E|.$$

Средним колебанием суммируемой на множестве $E \subset \mathbb{R}^d$, $0 < |E| < \infty$, функции f называется величина

$$\Omega(f; E) = \frac{1}{|E|} \int_E |f(x) - f_E| dx.$$

Говорят, что суммируемая на кубе $Q_0 \subset \mathbb{R}^d$ функция f *имеет ограниченное среднее колебание* ($f \in \text{ВМО}(Q_0)$), если

$$\|f\|_* \equiv \sup_{Q \subset Q_0} \Omega(f; Q) < \infty,$$

где верхняя грань берется по всем кубам $Q \subset Q_0$. Фундаментальное свойство функции $f \in \text{ВМО}(Q_0)$ содержится в следующей теореме.

ТЕОРЕМА ДЖОНА–НИРЕНБЕРГА [9]. *Существуют положительные постоянные B и b , зависящие лишь от размерности пространства d , такие, что для любой функции $f \in \text{ВМО}(Q_0)$ справедливо неравенство*

$$|\{x \in Q_0 : |f(x) - f_{Q_0}| > \lambda\}| \leq B|Q_0| \cdot \exp\left(-\frac{b}{\|f\|_*} \lambda\right), \quad \lambda > 0. \quad (3.1)$$

Неравенство (3.1) называется *неравенством Джона–Ниренберга*. Оно имеет много приложений в различных вопросах теории функций. Ясно, что оценка скорости убывания функции распределения – левой части в (3.1) – для $f \in \text{ВМО}(Q_0)$ в первую очередь определяется значением постоянной b в показателе экспоненты справа в (3.1). При $d \geq 2$ верхняя грань значений b , при которых (3.1) остается справедливым, нам неизвестна. В работе [10] показано, что при $d = 1$ неравенство (3.1) справедливо при $b = 2/e$ и это значение $2/e$, вообще говоря, нельзя увеличить. Доказательство неравенства (3.1) при $d = 1$ и $b = 2/e$ в [10] основано на применении следующей точной оценки равноизмеримой перестановки функции $f \in \text{ВМО}$.

ТЕОРЕМА А [10]. *Пусть функция $f \in \text{ВМО}(Q_0)$, где отрезок $Q_0 \subset \mathbb{R}$. Тогда справедливо неравенство*

$$\|f^*\|_* \leq \|f\|_*.$$

Заметим, что неравенство

$$\|f^*\|_* \leq c\|f\|_*$$

с постоянной $c > 1$, зависящей от размерности пространства d , ранее было получено в работах [11], [12]. При $d = 1$ точная оценка

$$\|f_d\|_* \leq \|f\|_*, \quad (3.2)$$

где равноизмеримая перестановка f_d на множестве E определяется равенством

$$f_d(t) = \sup_{e \subset E, |e|=t} \inf_{x \in e} f(x), \quad 0 < t \leq |E|,$$

была получена Клемесом в [5]. При доказательстве теоремы А в [10] использовалось неравенство (3.2). В свою очередь, доказательство неравенства (3.2) в [5] опирается на лемму В “о восходящем солнце”. Применение леммы 1 дает возможность установить многомерный аналог неравенства Джона–Ниренберга с точной постоянной в показателе экспоненты для функции из анизотропного класса ВМО_R . Сначала сформулируем определение.

Пусть параллелепипед $R_0 \subset \mathbb{R}^d$. Через $\text{ВМО}_R(R_0)$ обозначается класс всех функций $f \in L(R_0)$ таких, что

$$\|f\|_{*,R} \equiv \sup_{R \subset R_0} \Omega(f; R) < \infty,$$

где верхняя грань берется по всем параллелепипедам $R \subset R_0$. Ясно, что $\text{ВМО}_R(Q_0) \subset \text{ВМО}(Q_0)$, и нетрудно показать, что при $d \geq 2$ это включение строгое.

Сначала докажем многомерный аналог неравенства (3.2).

ТЕОРЕМА 1. Пусть параллелепипед $R_0 \subset \mathbb{R}^d$, функция $f \in \text{ВМО}_R(R_0)$. Тогда справедливо неравенство

$$\|f_d\|_* \leq \|f\|_{*,R}. \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если размерность пространства $d = 1$, то (3.3) совпадает с (3.2). При $d = 2$ достаточно повторить рассуждения из работы [5], в которых вместо леммы В “о восходящем солнце” воспользоваться леммой 2. Если же $d \geq 3$, то достаточно обосновать возможность применения следствия 1 из леммы 1. Для этого представим R_0 в виде конечного объединения кубов Q_i , $i = 1, \dots, n$. Тогда из включения $\text{ВМО}_R(Q_i) \subset \text{ВМО}(Q_i)$ получаем, что на каждом Q_i для функции f справедливо неравенство Джона–Ниренберга (3.1). Из этого неравенства мгновенно вытекает, что $f \in L^p(Q_i)$ при любом $p < \infty$ и $i = 1, \dots, n$. Следовательно, $f \in L^p(R_0)$, и, тем более, выполнено условие (1.4) следствия 1. Теперь уже снова остается повторить рассуждения из работы [5], которые мы приведем здесь лишь для полноты изложения.

Зафиксируем отрезок $J \subset [0, |R_0|]$ и обозначим

$$\alpha = \frac{1}{|J|} \int_J f_d(u) du.$$

Пусть

$$\alpha \geq \frac{1}{|R_0|} \int_{R_0} f(x) dx.$$

Применяя следствие 1 (при $d = 2$ достаточно применить лемму 2), построим попарно не пересекающиеся параллелепипеды $I_j \subset R_0$, $j = 1, 2, \dots$, такие, что $f_{I_j} = \alpha$, $j = 1, 2, \dots$, и $f(x) \leq \alpha$ для почти всех $x \in R_0 \setminus E$, где $E = \bigcup_{j \geq 1} I_j$. Если мы докажем неравенство

$$\frac{1}{|J|} \int_J |f_d(t) - \alpha| dt \leq \frac{1}{|E|} \int_E |f(x) - \alpha| dx, \quad (3.4)$$

то останется воспользоваться тем, что

$$\begin{aligned} f_E &= \frac{1}{|E|} \int_E f(x) dx = \frac{1}{\sum_j |I_j|} \sum_j \int_{I_j} f(x) dx = \alpha, \\ \frac{1}{|E|} \int_E |f(x) - \alpha| dx &= \frac{1}{|E|} \sum_j \int_{I_j} |f(x) - \alpha| dx \\ &= \frac{1}{|E|} \sum_j |I_j| \frac{1}{|I_j|} \int_{I_j} |f(x) - f_{I_j}| dx \\ &= \frac{1}{|E|} \sum_j |I_j| \Omega(f; I_j) \leq \|f\|_{*, R}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Для доказательства (3.4) выберем наибольшее $t \in (0, |R_0|]$ такое, что $J \subset [0, t]$ и

$$\frac{1}{t} \int_0^t f_d(u) du = \alpha.$$

Существование такого t следует из условия

$$\frac{1}{|R_0|} \int_0^{|R_0|} f_d(u) du = \frac{1}{|R_0|} \int_{R_0} f(x) dx \leq \alpha = \frac{1}{|J|} \int_J f_d(u) du.$$

Из монотонности функции f_d вытекает неравенство

$$\frac{1}{|J|} \int_J |f_d(u) - \alpha| du \leq \frac{1}{t} \int_0^t |f_d(u) - \alpha| du$$

(см. [5]), так что для доказательства (3.4) достаточно показать, что

$$\frac{1}{t} \int_0^t |f_d(u) - \alpha| du \leq \frac{1}{|E|} \int_E |f(x) - \alpha| dx. \quad (3.6)$$

В свою очередь, (3.6) является следствием двух следующих утверждений:

$$t \geq |E| \quad (3.7)$$

и

$$\int_0^t |f_d(u) - \alpha| du = \int_E |f(x) - \alpha| dx. \quad (3.8)$$

Для доказательства (3.7) заметим, что из определения невозрастающей перестановки f_d следует неравенство

$$\int_0^{|E|} f_d(u) du \geq \int_E f(x) dx,$$

так что в силу (3.5)

$$\frac{1}{|E|} \int_0^{|E|} f_d(u) du \geq \frac{1}{|E|} \int_E f(x) dx = \alpha = \frac{1}{t} \int_0^t f_d(u) du.$$

Отсюда и из монотонности f_d следует (3.7). Для доказательства (3.8) воспользуемся тем, что $f(x) \leq \alpha$ почти всюду на $R_0 \setminus E$. Тогда, применяя (3.5), получим

$$\begin{aligned} \int_0^t |f_d(u) - \alpha| du &= 2 \int_{\{u \in [0, t] : f_d(u) > \alpha\}} (f_d(u) - \alpha) du = 2 \int_{\{x \in R_0 : f(x) > \alpha\}} (f(x) - \alpha) dx \\ &= 2 \int_{\{x \in E : f(x) > \alpha\}} (f(x) - \alpha) dx = \int_E |f(x) - \alpha| dx. \end{aligned}$$

Этим завершается доказательство неравенства (3.6).

В случае

$$\alpha < \frac{1}{|R_0|} \int_{R_0} f(x) dx$$

достаточно применить предыдущие рассуждения к функции $-f$ и заметить, что равенство $(-f)_d(t) = -f_d(|R_0| - t)$ справедливо для всех $t \in [0, |R_0|]$, кроме множества точек разрыва функции $(-f)_d$, имеющего меру нуль. В этом случае также получим неравенство

$$\frac{1}{|J|} \int_J |f_d(u) - \alpha| du \leq \|f\|_{*, R},$$

и тем самым завершается доказательство теоремы.

Далее нам понадобится следующая

ТЕОРЕМА В [10]. Пусть $d = 1$, функция $f \in \text{ВМО}(Q_0)$. Тогда справедливо неравенство

$$\| |f| \|_* \leq \|f\|_*. \quad (3.9)$$

Заметим, что с множителем 2 справа неравенство (3.9) тривиально при любом $d \geq 1$, а при $d \geq 2$ наименьшее значение постоянной c в неравенстве

$$\| |f| \|_* \leq c \|f\|_*$$

нам неизвестно.

Из теоремы 1 и неравенства (3.9) вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. Для функции $f \in \text{ВМО}_R(R_0)$ справедливо неравенство

$$\| |f| \|_{*, R} \leq \|f\|_{*, R}. \quad (3.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем параллелепипед $R \subset R_0$ и обозначим через $g = f|_R$ – сужение функции f на R . Тогда, очевидно,

$$\Omega(|f|; R) = \Omega(|g|; R) = \Omega(|g_d|; [0, |R|]).$$

Но в силу теоремы 1 для любого отрезка $J \subset [0, |R|]$ имеем

$$\Omega(g_d; J) \leq \sup_{R_1 \subset R} \Omega(g; R_1) = \sup_{R_1 \subset R} \Omega(f; R_1) \leq \|f\|_{*, R}.$$

Таким образом, мы получим (3.10), если докажем, что

$$\Omega(|g_d|; [0, |R|]) \leq \sup_{J \subset [0, |R|]} \Omega(g_d; J).$$

Но это неравенство, очевидно, вытекает из (3.9) и тем самым следствие доказано.

Поскольку $f^* = |f|_d$, получаем

СЛЕДСТВИЕ 3. Для функции $f \in \text{ВМО}_R(R_0)$ справедливо неравенство

$$\|f^*\|_* \leq \|f\|_{*, R}. \quad (3.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя теорему 1 и следствие 2, имеем

$$\|f^*\|_* = \||f|_d\|_* \leq \||f|\|_{*, R} \leq \|f\|_{*, R}.$$

Теперь уже легко можем получить основную теорему данного пункта.

ТЕОРЕМА 2. Существует такая абсолютная постоянная B , что для любой функции $f \in \text{ВМО}_R(R_0)$ справедливо неравенство

$$|\{x \in R_0 : |f(x) - f_{R_0}| > \lambda\}| \leq B|R_0| \cdot \exp\left(-\frac{2/e}{\|f\|_{*, R}}\lambda\right), \quad \lambda > 0, \quad (3.12)$$

причем постоянная $2/e$ в показателе экспоненты, вообще говоря, не может быть увеличена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже было сказано выше, в [10] показано, что при $d = 1$ неравенство Джона–Ниренберга (3.1) справедливо при $b = 2/e$. Применяя его к функции f^* , получим

$$|\{t \in [0, |R_0|] : |f^*(t) - (f^*)_{[0, |R_0|]}| > \lambda\}| \leq B|R_0| \cdot \exp\left(-\frac{2/e}{\|f^*\|_*}\lambda\right), \quad \lambda > 0,$$

и остается воспользоваться неравенством (3.11) и очевидным равенством

$$|\{x \in R_0 : |f(x) - f_{R_0}| > \lambda\}| = |\{t \in [0, |R_0|] : |f^*(t) - (f^*)_{[0, |R_0|]}| > \lambda\}|.$$

Тот факт, что постоянная $2/e$ в показателе экспоненты справа в (3.12) не может быть увеличена, как и в [10], легко проверяется на примере функции

$$f(x) \equiv f(x_1, \dots, x_d) = \ln \frac{1}{x_1}, \quad x \in [0, 1]^d.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Calderón A. P., Zygmund A. On the existence of certain singular integrals // *Acta Math.* 1952. V. 88. P. 85–139.
- [2] Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.
- [3] Riesz F. Sur un théorème de maximum de M_0 Hardy et Littlewood // *J. London Math. Soc.* 1932. V. 7. P. 10–13.
- [4] Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г. Неравенства. М.: ИЛ, 1948.
- [5] Kleses I. A mean oscillation inequality // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1985. V. 93. № 3. P. 497–500.
- [6] Jessen B., Marcinkiewicz J., Zygmund A. Note on the differentiability of multiple integrals // *Fund. Math.* 1935. V. 25. P. 217–234.
- [7] Гусман М. Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$. М.: Мир, 1978.
- [8] Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
- [9] John F., Nirenberg L. On functions of bounded mean oscillation // *Comm. Pure Appl. Math.* 1961. V. 14. P. 415–426.
- [10] Кореновский А. А. О связи между средними колебаниями и точными показателями суммируемости функций // *Матем. сб.* 1990. Т. 181. № 12. С. 1721–1727.
- [11] Garsia A. M., Rodemich E. Monotonicity of certain functionals under rearrangements // *Ann. Inst. Fourier, Grenoble.* 1974. V. 24. № 2. P. 67–116.
- [12] Bennett C., DeVore R. A., Sharpley R. Weak- L^∞ and BMO // *Ann. Math.* 1981. V. 113. № 2. P. 601–611.

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова,
Институт математики, экономики и механики
E-mail: anakor@paco.net

Поступило
14.05.2003