Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Б. Сабитов, С. Л. Бобакова, Построение собственных функций задачи Трикоми–Неймана для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением и их применение, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 1, 76–87

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm247>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 14:13:32

УДК 517.95

ПОСТРОЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ–НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ ВЫРОЖДЕНИЕМ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

К. Б. Сабитов, С. Л. Бибакова

Для уравнения смешанного типа

$$L_\alpha u \equiv u_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_y + \lambda u = 0,$$

где $0 < \alpha < 1$, λ – комплексный параметр, в специальной области методом разделения переменных найдены собственные значения и построена система соответствующих собственных функций спектральной задачи Трикоми–Неймана. Построено решение задачи Трикоми–Неймана в виде суммы биортогонального ряда.

Библиография: 14 названий.

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$L_\alpha u \equiv u_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_y + \lambda u = 0, \quad (1)$$

где $0 < \alpha < 1$, λ – комплексный параметр, в области D , ограниченной при $y > 0$ кривой $\Gamma_0(x^2 + 4y = 0)$ с концами в точках $B(1, 0)$ и $K(-1, 0)$, лежащей в полуплоскости $y > 0$, отрезком AK оси OX , где $A = (0, 0)$, и характеристиками $AC(x - 2\sqrt{-y} = 0)$ и $CB(x + 2\sqrt{-y} = 1)$ уравнения (1) при $y < 0$.

Пусть $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

Спектральная задача Трикоми–Неймана (задача TN_λ). Найти значения параметра λ и соответствующие им функции $u(x, y)$, удовлетворяющие условиям

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup \Gamma_0 \cup AK) \cap C^2(D_+ \cup D_-), \quad (2)$$

$$L_\alpha u \equiv 0, \quad (3)$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in AK, \quad (4)$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in AC, \quad (5)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0-0} (-y)^\alpha u_y = k \lim_{y \rightarrow 0+0} y^\alpha u_y, \quad 0 < x < 1, \quad (6)$$

$$u_x dy - yu_y dx = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_0, \quad (7)$$

где $k = -1$ при $0 < \alpha < 1/2$ и $k = 1$ при $1/2 < \alpha < 1$.

Такой выбор значения k объясняется тем, что для уравнения (1) при $\lambda = 0$ доказаны теоремы существования и единственности решения задачи Трикоми–Неймана [1].

Спектральные задачи с условиями Дирихле для оператора Лаврентьева–Бицадзе были рассмотрены в работах [2]–[5]. Спектральные задачи с условиями Дирихле для уравнения (1) были изучены в статьях [6]–[8]. В [8] уравнение (1) изучалось в D при $\alpha \geq 1$. Задача (2)–(7) при $\alpha = 1/2$, где $k = \pm 1$, исследована в [9]. В этом случае задача TN_λ заменой переменной сводится к задаче для оператора Лаврентьева–Бицадзе.

В данной работе найдены собственные значения и в явном виде построены соответствующие собственные функции задачи (2)–(7). На основании системы собственных функций решение задачи TN построено в виде суммы биортогонального ряда.

2. Построение частных решений в области эллиптичности. В области D_+ перейдем к новым переменным $x = r \cos \varphi$, $2\sqrt{y} = r \sin \varphi$, $0 < x < 1$, $0 < \varphi < \pi$. В координатах (r, φ) уравнение (1) примет вид

$$L_\alpha u = u_{rr} + \frac{1+2\beta}{r} u_r + \frac{1}{r^2} (u_{\varphi\varphi} + 2\beta \operatorname{ctg} \varphi u_\varphi) + \lambda u = 0, \quad \beta = \alpha - \frac{1}{2}.$$

Разделяя в последнем уравнении переменные $u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$, получим

$$R''(r) + \frac{1+2\beta}{r} R'(r) + \left(\lambda - \frac{\mu^2}{r^2} \right) R(r) = 0, \quad 0 < r < 1, \quad (8)$$

$$R(0) = 0, \quad R'(1) = 0, \quad (9)$$

$$\Phi''(\varphi) + 2\beta \operatorname{ctg} \varphi \Phi'(\varphi) + \mu^2 \Phi(\varphi) = 0, \quad 0 < \varphi < \varphi_0 = \pi, \quad (10)$$

$$|\Phi(0)| < +\infty, \quad \Phi(\pi) = 0. \quad (11)$$

Известно, что решением уравнения (8) является функция Бесселя

$$R(r) = r^{-\beta} J_\gamma(\sqrt{\lambda}r), \quad \gamma = \sqrt{\mu^2 + \beta^2}. \quad (12)$$

Подставляя (12) в краевые условия (9), имеем

$$\operatorname{Re}(\gamma - \beta) > 0, \quad \sqrt{\lambda} J'_\gamma(\sqrt{\lambda}) - \beta J_\gamma(\sqrt{\lambda}) = 0. \quad (13)$$

Теперь построим общее решение для уравнения (10). Для этого в (10) введем новую переменную $t = \cos^2(\varphi/2)$. Тогда оно примет вид

$$t(1-t)\Phi''(t) + \left[\left(\frac{1}{2} + \beta \right) - (1+2\beta)t \right] \Phi'(t) + \mu^2 \Phi(t) = 0. \quad (14)$$

Уравнение (14) является гипергеометрическим уравнением [10, с. 69], и поскольку α не является целым числом, то общее решение уравнения (10) определяется по формуле

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi) = & c_+^{(1)} F\left(\beta + \gamma, \beta - \gamma, \alpha; \cos^2 \frac{\varphi}{2}\right) \\ & + c_+^{(2)} \left(\cos^2 \frac{\varphi}{2}\right)^{1-\alpha} F\left(\frac{1}{2} + \gamma, \frac{1}{2} - \gamma, 2 - \alpha; \cos^2 \frac{\varphi}{2}\right). \end{aligned} \quad (15)$$

Функция (15) удовлетворяет первому граничному условию из (10). Подставляя (15) во второе краевое условие из (11), получим $c_+^{(1)} = 0$.

Таким образом, частные решения уравнения (1) в области D_+ , удовлетворяющие крайним условиям (7) и (4), имеют вид

$$u = c_+ r^{-\beta} J_\gamma(\sqrt{\lambda}r) \left(\cos^2 \frac{\varphi}{2}\right)^{1-\alpha} F\left(\frac{1}{2} + \gamma, \frac{1}{2} - \gamma, 2 - \alpha; \cos^2 \frac{\varphi}{2}\right). \quad (16)$$

3. Построение частных решений в области гиперболичности. В уравнении (1) в области D_- сделаем замену переменных

$$\sigma = \sqrt{x^2 + 4y}, \quad 0 < \sigma < 1, \quad \theta = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4y}}{2\sqrt{x^2 + 4y}}, \quad \theta > 1.$$

Тогда в координатах (σ, θ) уравнение (1) примет вид

$$\begin{aligned} L_\alpha u = \theta(1 - \theta)u_{\theta\theta} + \left[\left(\frac{1}{2} + \beta \right) - (1 + 2\beta)\theta \right] u_\theta \\ + \sigma^2 u_{\sigma\sigma} + (1 + 2\beta)u_\sigma + \lambda\sigma^2 u = 0. \end{aligned}$$

Разделяя переменные $u(\sigma, \theta) = Q(\theta)P(\sigma)$, получим

$$P''(\sigma) + \frac{1 + 2\beta}{\sigma} P' + \left(\lambda - \frac{\mu^2}{\sigma^2} \right) P(\sigma) = 0, \quad 0 < \sigma < 1, \quad (17)$$

$$P(0) = 0, \quad |P(1)| < +\infty, \quad (18)$$

$$\theta(1 - \theta)Q''(\theta) + \left[\frac{1}{2} + \beta - (1 + 2\beta)\theta \right] Q'(\theta) + \mu^2 Q(\theta) = 0, \quad (19)$$

$$Q(+\infty) = 0, \quad |Q(1)| < +\infty. \quad (20)$$

Решением уравнения (17), удовлетворяющим условиям (18), является функция

$$P(\sigma) = \sigma^{-\beta} J_\gamma(\sqrt{\lambda}\sigma), \quad \gamma = \sqrt{\mu^2 + \beta^2}, \quad \operatorname{Re}(\gamma - \beta) > 0. \quad (21)$$

Уравнение (19) является гипергеометрическим уравнением с аргументом $\theta > 1$. Переходя к аргументу $0 < 1/\theta < 1$, построим его общее решение

$$\begin{aligned} Q(\theta) = c_-^{(1)} \theta^{-(\beta+\gamma)} F\left(\beta + \gamma, \frac{1}{2} + \gamma, 1 + 2\gamma; \frac{1}{\theta}\right) \\ + c_-^{(2)} \theta^{-(\beta-\gamma)} F\left(\beta - \gamma, \frac{1}{2} - \gamma, 1 - 2\gamma; \frac{1}{\theta}\right). \end{aligned} \quad (22)$$

Если $c_-^{(2)} = 0$, то функция (22) удовлетворяет граничным условиям (20). Тогда решением уравнения (19), удовлетворяющим условиям (20), будет

$$Q_1(\theta) = c_-^{(1)} \theta^{-(\beta+\gamma)} F\left(\beta + \gamma, \frac{1}{2} + \gamma, 1 + 2\gamma; \frac{1}{\theta}\right).$$

Частными решениями уравнения (1) в области D_- , удовлетворяющими граничному условию (5), являются функции

$$u = c_-^{(1)} \sigma^{-\beta} J_\gamma(\sqrt{\lambda}\sigma) \theta^{-(\beta+\gamma)} F\left(\beta + \gamma, \frac{1}{2} + \gamma, 1 + 2\gamma; \frac{1}{\theta}\right). \quad (23)$$

4. Построение собственных функций задачи TN_λ . Для нахождения собственных значений и собственных функций задачи TN_λ построенную систему функций (16) и (23) подставляем в условия склеивания (2) и (6).

Из (16) и (23) вычислим

$$\begin{aligned} u(x, 0+0) &= \tau_+(x) = c_+ x^{-\beta} J_\gamma(\sqrt{\lambda}x) F\left(\frac{1}{2} + \gamma, \frac{1}{2} - \gamma, 2 - \alpha; 1\right), \\ u(x, 0-0) &= \tau_-(x) = c_- x^{-\beta} J_\gamma(\sqrt{\lambda}x) F\left(\beta + \gamma, \frac{1}{2} + \gamma, 1 + 2\gamma; 1\right), \\ \lim_{y \rightarrow 0+0} y^\alpha u_y &= \nu_+(x) = -c_- (1 - \alpha) x^{\alpha-3/2} J_\gamma(\sqrt{\lambda}x) F(-\beta - \gamma, -\beta + \gamma, 1 - \alpha; 1), \\ \lim_{y \rightarrow 0-0} (-y)^\alpha u_y &= \nu_-(x) = (\beta + \gamma) c_-^{(1)} x^{\alpha-3/2} J_\gamma(\sqrt{\lambda}x) F\left(\gamma - \beta, \frac{1}{2} + \gamma, 2\gamma + 1; 1\right). \end{aligned}$$

Приравнявая функции

$$\tau_-(x) = \tau_+(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \nu_-(x) = k\nu_+(x), \quad 0 < x < 1,$$

получим систему

$$\begin{aligned} &c_+ x^{-\beta} J_\gamma(\sqrt{\lambda}x) F\left(\frac{1}{2} + \gamma, \frac{1}{2} - \gamma, 2 - \alpha; 1\right) \\ &= c_- x^{-\beta} J_\gamma(\sqrt{\lambda}x) F\left(\beta + \gamma, \frac{1}{2} + \gamma, 1 + 2\gamma; 1\right), \\ &-c_+ (1 - \alpha) x^{\alpha-3/2} J_\gamma(\sqrt{\lambda}x) F(-\beta - \gamma, -\beta + \gamma, 1 - \alpha; 1) \\ &= k(\beta + \gamma) c_- x^{\alpha-3/2} J_\gamma(\sqrt{\lambda}x) F\left(\gamma - \beta, \frac{1}{2} + \gamma, 2\gamma + 1; 1\right), \end{aligned}$$

из которой находим γ .

Рассмотрим по отдельности случаи $0 < \alpha < 1/2$ и $1/2 < \alpha < 1$. После преобразований по известным формулам [5, с. 111, с. 17, с. 19]

$$\begin{aligned} F(a, b, c; 1) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \\ \Gamma(z)\Gamma(-z) &= -\frac{\pi}{z \sin \pi z}, \quad \Gamma(2z) = 2^{2z-1} \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right), \\ \Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2} + z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - z\right) = \frac{\pi}{\cos \pi z}, \end{aligned}$$

данная система сводится к тригонометрическому уравнению

$$\cos \pi \gamma - \cos \pi(\alpha + \gamma) = 0.$$

Отсюда с учетом того, что $\operatorname{Re}(\gamma - \beta) > 0$, получим

$$\gamma = \gamma_n = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} + n, & n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{при } k = -1 \ (0 < \alpha < 1/2), \\ -\frac{\alpha}{2} + n, & n = 1, 2, \dots \quad \text{при } k = 1 \ (1/2 < \alpha < 1). \end{cases}$$

Из теории бесселевых функций известно [11], что при $\gamma_n > -1$ функция $\sqrt{\lambda} J_{\gamma'_n}(\sqrt{\lambda}) - \beta J_{\gamma_n}(\sqrt{\lambda})$ имеет только вещественные нули. Обозначая через $\alpha_m^{\gamma_n}$ m -й корень уравнения (13), находим собственные значения задачи TN_λ :

$$\lambda_{n,m} = (\alpha_m^{\gamma_n})^2, \quad m = 1, 2, \dots$$

Тогда на основании представлений (16) и (23) с учетом значений $\lambda = \lambda_{n,m}$, получим систему соответствующих собственных функций задачи TN_λ :

$$u_{n,m}(x, y) = \begin{cases} -kr^{-\beta} J_{\gamma_n}(\sqrt{\lambda_{n,m}}r) \left(\cos^2 \frac{\varphi}{2} \right)^{1-\alpha} F\left(\frac{1}{2} + \gamma_n, \frac{1}{2} - \gamma_n, 2 - \alpha; \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right), & (x, y) \in D_+, \\ \sigma^{-\beta} J_{\gamma_n}(\sqrt{\lambda_{n,m}}\sigma) \theta^{-(\beta+\gamma_n)} F\left(\beta + \gamma_n, \frac{1}{2} + \gamma_n, 1 + 2\gamma_n; \frac{1}{\theta} \right), & (x, y) \in D_-. \end{cases}$$

5. Решение задачи Трикоми–Неймана. В качестве примера применения изложенных выше результатов для уравнения (1) при $\lambda = 0$, $1/2 < \alpha < 1$ в области D рассмотрим краевую задачу Трикоми–Неймана с условиями (2)–(6) и

$$u_x \frac{dy}{dx} - y u_y|_{\Gamma_0} = \hat{f}(\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad (24)$$

где $\hat{f}$ – заданная достаточно гладкая функция.

Предварительно для уравнения (1) построим решение задачи Коши в области D_- .

Задача Коши. Найти в области D_- решение $u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющего условиям

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \lim_{y \rightarrow 0-0} (-y)^\alpha u_y = \nu(x), \quad 0 < x < 1. \quad (25)$$

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1 [1, с. 111]. Если функции $\tau(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$, $\nu(x) \in C^2(0, 1)$ и $x^{-\beta}(1-x)^{-\beta}\nu(x) \in L(0, 1)$, то существует единственное решение задачи Коши (1), (25) в области D_- и оно в характеристических координатах (ξ, η) определяется формулой

$$u(x, y) = u(\xi, \eta) = k_1(\eta - \xi)^{1-2\beta} \int_\xi^\eta \tau(z)(z - \xi)^{\beta-1}(\eta - z)^{\beta-1} dz + k_2 \int_\xi^\eta \nu(z)(z - \xi)^{-\beta}(\eta - z)^{-\beta} dz, \quad (26)$$

где

$$k_1 = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}, \quad k_2 = -4^{2\beta-1} \frac{\Gamma(2-2\beta)}{(1-\alpha)\Gamma^2(1-\beta)}, \quad \xi = x - 2\sqrt{-y}, \quad \eta = x + 2\sqrt{-y}.$$

Из формулы (26) с учетом граничного условия (5) найдем

$$\tau(x) = l \int_0^x (x-t)^{-2\beta} \nu(t) dt, \quad l = -2k_2 \cos \pi\beta. \quad (27)$$

В основании равенства (27) между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенного из гиперболической части области D , задача TN сведена к следующей нелокальной эллиптической задаче для уравнения (1) при $\lambda = 0$: найти в области D_+ функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям (2)–(4) и (27).

Перейдем в области D_+ к полярным координатам $x = r \cos \varphi$, $2\sqrt{y} = r \sin \varphi$. Разделяя переменные $u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$, получим (10), (11) и

$$R''(r) + \frac{1+2\beta}{r} R'(r) - \frac{\mu^2}{r^2} R(r) = 0, \quad 0 < r < 1, \quad (28)$$

$$R(0) = 0, \quad |R(1)| < \infty. \quad (29)$$

Решением уравнения (28), удовлетворяющим условиям (29), является функция

$$R(r) = r^{\gamma-\beta}, \quad \gamma = \sqrt{\mu^2 + \beta^2}, \quad \operatorname{Re}(\gamma - \beta) > 0. \quad (30)$$

Из п. 2 следует, что решение уравнения (10), удовлетворяющее условиям (11), имеет вид

$$\Phi(\varphi) = c_+ \left(\cos^2 \frac{\varphi}{2} \right)^{1-\alpha} F\left(\frac{1}{2} + \gamma, \frac{1}{2} - \gamma, 2 - \alpha; \cos^2 \frac{\varphi}{2}\right).$$

Тогда частные решения уравнения (1) в D_+ , удовлетворяющие условиям (2), (4), определяются по формуле

$$u(r, \varphi) = c_+ r^{\gamma-\beta} \left(\cos^2 \frac{\varphi}{2} \right)^{1-\alpha} F\left(\frac{1}{2} + \gamma, \frac{1}{2} - \gamma, 2 - \alpha; \cos^2 \frac{\varphi}{2}\right). \quad (31)$$

Найденные функции (31) подставим в равенство (27). Предварительно вычислим

$$u(x, 0) = \tau_+(x) = c_+ x^{\gamma-\beta} F\left(\frac{1}{2} + \gamma, \frac{1}{2} - \gamma, 2 - \alpha; 1\right), \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0+0} y^\alpha u_y &= \nu_+(x) = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \left(\frac{r \sin \varphi}{2} \right)^{2\alpha-1} \left(u_r \sin \varphi + \frac{\cos \varphi}{r} u_\varphi \right) \\ &= -c_+ (1-\alpha) x^{\alpha+\gamma-3/2} F(-\beta-\gamma, -\beta+\gamma, 1-\alpha; 1). \end{aligned} \quad (33)$$

Тогда равенство (27) примет вид

$$\begin{aligned} &c_+ x^{\gamma-\beta} F\left(\frac{1}{2} + \gamma, \frac{1}{2} - \gamma, 2 - \alpha; 1\right) \\ &= -lc_+ (1-\alpha) F(-\beta-\gamma, -\beta+\gamma, 1-\alpha; 1) \int_0^x (x-t)^{-2\beta} t^{\alpha+\gamma-3/2} dt. \end{aligned} \quad (34)$$

Вычислив интеграл в правой части равенства (34), получим

$$F\left(\frac{1}{2} + \gamma, \frac{1}{2} - \gamma, 2 - \alpha; 1\right) = -l(1 - \alpha) F(-\beta - \gamma, -\beta + \gamma, 1 - \alpha; 1) \frac{\Gamma(2 - 2\alpha)\Gamma(\beta + \gamma)}{\Gamma(1 - \beta + \gamma)}. \quad (35)$$

Решая уравнение (35) относительно параметра γ аналогично п. 4, получим $\gamma = \gamma_n$.

Таким образом, частные решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям (2)–(4) и (27), имеют вид

$$u_n(r, \varphi) = c_n r^{\gamma_n - \beta} \left(\cos^2 \frac{\varphi}{2}\right)^{1 - \alpha} F\left(\frac{1}{2} + \gamma_n, \frac{1}{2} - \gamma_n, 2 - \alpha; \cos^2 \frac{\varphi}{2}\right). \quad (36)$$

Перепишем это решение в другом виде. Воспользуемся формулой (6) [10, с. 144]

$$P_\nu^\mu(x) = \frac{1}{\Gamma(1 - \mu)} \left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)^{\frac{\mu}{2}} F\left(-\nu, \nu + 1, 1 - \mu; \frac{1}{2} - \frac{x}{2}\right),$$

где P_ν^μ – модифицированная функция Лежандра. Тогда функция (39) примет вид

$$u_n(r, \varphi) = f_n r^{\gamma_n - \beta} (\sin \varphi)^{1 - \alpha} P_{-\gamma_n - \frac{1}{2}}^{\alpha - 1}(-\cos \varphi),$$

где $f_n = c_n 2^{\alpha - 1} \Gamma(2 - \alpha)$.

Решение эллиптической задачи (2)–(4) и (27) в области D_+ будем искать в виде суммы ряда

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n r^{\gamma_n - \beta} (\sin \varphi)^{1 - \alpha} P_{-\gamma_n - \frac{1}{2}}^{\alpha - 1}(-\cos \varphi). \quad (37)$$

Предположим, что ряд (37) в $\bar{D}_+$ сходится равномерно. Тогда, полагая в (37) $r = 1$ и удовлетворяя граничному условию (24), имеем

$$f(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n (\gamma_n - \beta) (\sin \varphi)^{1 - \alpha} P_{-\gamma_n - \frac{1}{2}}^{\alpha - 1}(-\cos \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi. \quad (38)$$

Произведя в равенстве (38) замену $\theta = \pi - \varphi$, получим

$$\tilde{f}(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n (\gamma_n - \beta) (\sin \theta)^{1 - \alpha} P_{-\gamma_n - \frac{1}{2}}^{\alpha - 1}(\cos \theta), \quad (39)$$

где $\tilde{f}(\theta) = f(\pi - \theta) = f(\varphi)$.

На основании формулы Мейера–Дирихле [10, с. 160]

$$P_\nu^\mu(\cos \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(\sin \theta)^\mu}{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu)} \int_0^\theta (\cos v - \cos \theta)^{-\mu - \frac{1}{2}} \cos \left[\left(\nu + \frac{1}{2} \right) v \right] dv,$$

где $0 \leq \theta \leq \pi$, $\operatorname{Re} \mu < 1/2$, ряд (39) примет вид

$$\tilde{f}(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2} - \alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\theta} (\cos v - \cos \theta)^{-\beta} f_n(\gamma_n - \beta) \cos(v\gamma_n) dv. \quad (40)$$

В правой части (40) переставим порядки суммирования и интегрирования:

$$\tilde{f}(\theta) = C_0 \int_0^{\theta} (\cos v - \cos \theta)^{-\beta} Q(v) dv, \quad (41)$$

где

$$C_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2} - \alpha)}, \quad Q(v) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\gamma_n - \beta) \cos(\gamma_n v).$$

Найдем решение уравнения (41) относительно $Q(v)$. После замены $\cos \theta = z$, $\cos v = t$ уравнение (41) примет вид

$$\tilde{f}(\arccos z) = c_0 \int_z^1 \frac{Q(\arccos t) dt}{\sqrt{1-t^2}(t-z)^{\beta}}, \quad -1 \leq z \leq 1.$$

Если

$$\tilde{f}_1(z) = \tilde{f}(\arccos z) \in C^1[-1, 1], \quad \tilde{f}(0) = 0, \quad (42)$$

то на основании известной формулы обращения интегрального уравнения Абеля получим

$$Q_1(z) = Q(\arccos z) = -\frac{\sqrt{1-z^2} \sin[\pi(1-\beta)]}{\pi C_0} \int_z^1 \frac{\tilde{f}'_1(t) dt}{(t-z)^{1-\beta}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\gamma_n - \beta) \cos(\gamma_n \arccos z) &= -\frac{\Gamma(1-\beta) \sin \pi \beta}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{1-z^2} \\ &\times \int_z^1 \tilde{f}'_1(t) (t-z)^{\beta-1} dt = Q_1(z). \end{aligned} \quad (43)$$

Ряд (43) является биортогональным разложением функции $Q_1(z)$ по системе косинусов $\{\cos \gamma_n \theta\}_{n=1}^{\infty}$. В силу результатов [12] ряд (43) сходится к функции $Q_1(z)$ в пространстве $L_p(0; \pi)$ при $p < (1-\alpha)^{-1}$, при этом коэффициенты ряда вычисляются по формулам

$$f_n = \frac{\sin \pi \beta}{(\gamma_n - \beta) \sqrt{2\pi}} \Gamma(1-\beta) \int_0^{\pi} h_n(\theta) \sin \theta d\theta \int_0^{\theta} \frac{\tilde{f}'(v) dv}{(\cos v - \cos \theta)^{1-\beta}}, \quad (44)$$

где

$$h_n(\theta) = \frac{2}{\pi(2 \cos \theta/2)^{\alpha}} \left[\sum_{m=0}^{\infty} C_{\alpha}^m \cos(n-m)\theta - \frac{C_{\alpha}^k}{2} \right].$$

В силу теоремы 3.6 [13, с. 65], если $p > 1/(\alpha - 1/2)$, то $Q_1(z) \in C^{\alpha-1/2-1/p}[-1, 1]$. Отсюда в силу результатов работы [12] следует равномерная сходимость ряда (43).

Условия (42) будут выполнены, если $f(\varphi) \in C^1[0, \pi]$, функция $f(\varphi)$ в малой окрестности точек $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ дважды непрерывно дифференцируема, $f(0) = f'(0) = f(\pi) = f'(\pi) = 0$.

При этом биортогональная система $|h_n(\theta)|$ равномерно ограничена по k ; следовательно, коэффициенты f_n равномерно ограничены по n , поэтому ряд (37) при $r \leq 1$ сходится равномерно. Также равномерно при $r < 1$ сходятся ряды, полученные путем дифференцирования ряда (37) по переменным r и φ любое число раз. Поэтому ряд (37) является решением задачи Трикоми–Неймана в области D_+ .

Для построения решения задачи Трикоми–Неймана в области D_- найдем след производной $y^\alpha u_y$ от решения (36) на отрезке AB . Имеем

$$\lim_{y \rightarrow 0+0} y^\alpha u_y = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \left(\frac{r \sin \varphi}{2} \right)^{2\alpha-1} \left[\sin \varphi u_r + \frac{\cos \varphi}{r} u_\varphi \right].$$

Предварительно найдем производные u_r, u_φ :

$$\begin{aligned} u_r &= \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n - \beta) f_n (\sin \varphi)^{1-\alpha} r^{\gamma-\beta-1} P_{-\gamma_n-1/2}^{\alpha-1}(-\cos \varphi), \\ u_\varphi &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n (1-\alpha) (\sin \varphi)^{-\alpha} \cos \varphi r^{\gamma-\beta} P_{-\gamma_n-1/2}^{\alpha-1}(-\cos \varphi) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} f_n (\sin \varphi)^{1-\alpha} r^{\gamma_n-\beta} \frac{d}{d\varphi} P_{-\gamma_n-1/2}^{\alpha-1}(-\cos \varphi). \end{aligned}$$

Используя формулы [10, с. 162, с. 163]

$$\begin{aligned} (1-x^2) \frac{dP_\nu^\mu(x)}{dx} &= (\nu+1)x P_\nu^\mu(x) - (\nu-\mu+1) P_{\nu+1}^\mu(x), \\ (\nu-\mu+1) P_{\nu+1}^\mu(x) - (\nu+\mu+1)x P_\nu^\mu(x) &= \sqrt{1-x^2} P_{\nu+1}^{\mu+1}(x), \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\varphi} P_{-\gamma_n-1/2}^{\alpha-1}(-\cos \varphi) \\ &= \left(-\gamma_n + \frac{1}{2} \right) (-\cos \varphi) P_{-\gamma_n-1/2}^{\alpha-1}(-\cos \varphi) - \left(-\gamma_n - \alpha + \frac{3}{2} \right) P_{-\gamma_n+1/2}^{\alpha-1}(-\cos \varphi). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} u_\varphi &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n (\sin \varphi)^{1-\alpha} r^{\gamma_n-\beta} \left[\left(-\gamma_n + \alpha - \frac{1}{2} \right) (-\cos \varphi) P_{-\gamma_n-1/2}^{\alpha-1}(-\cos \varphi) \right. \\ &\quad \left. - \left(-\gamma_n - \alpha + \frac{3}{2} \right) P_{-\gamma_n+1/2}^{\alpha-1}(-\cos \varphi) \right] \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} f_n r^{\gamma_n-\beta} (\sin \varphi)^{1-\alpha} P_{-\gamma_n-1/2}^{\alpha}(-\cos \varphi). \end{aligned}$$

Теперь вычислим $\tau(x)$ и $\nu(x)$. Поскольку при $\varphi \rightarrow 0$ справедливы асимптотические представления [10, с. 165]

$$\begin{aligned} P_{-\gamma_n - \frac{1}{2}}^{\alpha-1}(-\cos \varphi) &\sim \frac{\Gamma(1-\alpha)(\sin \frac{\varphi}{2})^{\alpha-1}}{\Gamma(\frac{3}{2}-\alpha+\gamma_n)\Gamma(\frac{3}{2}-\alpha-\gamma_n)}, \\ P_{-\gamma_n - \frac{1}{2}}^{\alpha}(-\cos \varphi) &\sim \frac{1}{\pi} \cos \pi \gamma_n \Gamma(\alpha) \left(\sin \frac{\varphi}{2}\right)^{-\alpha}, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi \rightarrow 0} (\sin \varphi)^{2\alpha} u_r &= 0, \quad \lim_{\varphi \rightarrow 0} (\sin \varphi)^{2\alpha-1} \cos \varphi u_\varphi = -\frac{1}{\pi} \Gamma(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} f_n r^{\gamma_n-\beta} \cos \pi \gamma_n, \\ \nu(x) &= \lim_{y \rightarrow 0+0} y^\alpha u_y = -\frac{1}{\pi} \Gamma(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^{\gamma_n+\alpha-3/2} \cos \pi \gamma_n, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\tau(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^{\gamma_n-\beta} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\beta+\gamma_n)\Gamma(1-\beta-\gamma_n)}. \quad (46)$$

Теперь подставляя (45) и (46) в формулу (26), получим

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)} (\eta - \xi)^{1-2\beta} \int_{\xi}^{\eta} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \Gamma(1-\alpha) \frac{z^{\gamma_n-\beta} (z - \xi)^{\beta-1} (\eta - z)^{\beta-1} dz}{\Gamma(1-\beta+\gamma_n)\Gamma(1-\beta-\gamma_n)} \\ &\quad + 4^{2\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(2-2\beta)}{(1-\alpha)\pi\Gamma^2(1-\beta)} \\ &\quad \times \int_{\xi}^{\eta} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos \pi \gamma_n z^{\gamma_n+\alpha-3/2} (z - \xi)^{-\beta} (\eta - z)^{-\beta} dz. \end{aligned}$$

Поменяв порядки суммирования и интегрирования, имеем

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)} (\eta - \xi)^{1-2\beta} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\beta+\gamma_n)\Gamma(1-\beta-\gamma_n)} \\ &\quad \times \int_{\xi}^{\eta} z^{\gamma_n-\beta} (z - \xi)^{\beta-1} (\eta - z)^{\beta-1} dz \\ &\quad + 4^{2\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(2-2\beta)}{(1-\alpha)\pi\Gamma^2(1-\beta)} \\ &\quad \times \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos \pi \gamma_n \int_{\xi}^{\eta} z^{\gamma_n+\beta-1} (z - \xi)^{-\beta} (\eta - z)^{-\beta} dz. \end{aligned} \quad (47)$$

Воспользуемся следующей формулой [14, с. 301]:

$$\begin{aligned} &\int_a^b (x-a)^{\lambda-1} (b-x)^{\beta-1} (cx-d)^{\delta} dx \\ &= (b-a)^{\lambda+\beta-1} (ac+d)^{\delta} B(\lambda, \beta) F\left(\lambda, -\delta, \lambda+\beta; \frac{c(a-b)}{ac+d}\right), \end{aligned}$$

где $\operatorname{Re} \lambda > 0$, $\operatorname{Re} \beta > 0$, для вычисления интегралов из правой части (47). Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\xi}^{\eta} z^{\gamma_n - \beta} (z - \xi)^{\beta - 1} (\eta - z)^{\beta - 1} dz &= (\eta - \xi)^{2\beta - 1} \xi^{\gamma - \beta} B(\beta, \beta) F\left(\beta, \beta - \gamma, 2\beta; \frac{\xi - \eta}{\xi}\right), \\ \int_{\xi}^{\eta} z^{\gamma_n + \alpha - \frac{3}{2}} (z - \xi)^{-\beta} (\eta - z)^{-\beta} dz \\ &= (\eta - \xi)^{1 - 2\beta} \xi^{\gamma + \alpha - \frac{3}{2}} B(1 - \beta, 1 - \beta) F\left(1 - \beta, \frac{3}{2} - \alpha - \gamma, 2 - 2\beta; \frac{\xi - \eta}{\xi}\right). \end{aligned}$$

На основании формулы [10, с. 113]

$$F(a, b, c; z) = (1 - z)^b F\left(c - a, b, c; \frac{z}{z - 1}\right)$$

имеем

$$\begin{aligned} F\left(\beta, \beta - \gamma, 2\beta; \frac{\xi - \eta}{\xi}\right) &= \left(\frac{\eta}{\xi}\right)^{\gamma - \beta} F\left(\beta, \beta - \gamma, 2\beta; \frac{\eta - \xi}{\eta}\right), \\ F\left(1 - \beta, 1 - \beta - \gamma, 2 - 2\beta; \frac{\xi - \eta}{\xi}\right) \\ &= \left(\frac{\eta}{\xi}\right)^{\gamma + \beta - 1} F\left(1 - \beta, 1 - \beta - \gamma, 2 - 2\beta; \frac{\eta - \xi}{\eta}\right). \end{aligned}$$

Тогда решение (47) примет вид

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \Gamma(1 - \alpha) \sum_{n=1}^{\infty} f_n \eta^{\gamma_n - \beta} \frac{F(\beta, \beta - \gamma_n, 2\beta; \frac{\eta - \xi}{\eta})}{\Gamma(1 - \beta + \gamma_n) \Gamma(1 - \beta - \gamma_n)} \\ &\quad + \frac{4^{2\beta - 1} \Gamma(\alpha)}{(1 - \alpha) \pi} (\eta - \xi)^{1 - 2\beta} \\ &\quad \times \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos \pi \gamma_n \eta^{\gamma_n + \beta - 1} F\left(1 - \beta, 1 - \beta - \gamma_n, 2 - 2\beta; \frac{\eta - \xi}{\eta}\right). \quad (48) \end{aligned}$$

Отметим, что решение (48) удовлетворяет граничному условию (5). Следовательно, функция (48) является решением задачи Трикоми–Неймана в области D_- .

Итак, доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Если $f(\varphi) \in C^1[0, \pi]$, $f(0) = f'(0) = f(\pi) = f'(\pi) = 0$, и в малой окрестности точек $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ дважды непрерывно дифференцируема, то существует единственное решение задачи Трикоми–Неймана в области D и оно определяется формулами (37) и (48), где коэффициенты f_n определяются по формулам (44).

Аналогично строятся решение задачи TN для уравнения (1) при $\lambda = 0$, $0 < \alpha < 1/2$ и решение задачи TN для уравнения (1) при $\lambda \neq \lambda_{n,m}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М., 1985.
- [2] Пономарев С. М. Спектральная теория основной краевой задачи для уравнения смешанного типа Лаврентьева–Бицадзе. Автореферат дисс. . . . д-ра физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1981.
- [3] Моисеев Е. И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: МГУ, 1998.
- [4] Моисеев Е. И. Решение задачи Трикоми в специальных областях // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 1. С. 93–103.
- [5] Сабитов К. Б., Тихомиров В. В. О построении собственных значений и функций одной газодинамической задачи Франкля // Матем. моделирование. 1990. Т. 2. № 10. С. 100–109.
- [6] Мамедов Я. Н. О некоторых задачах на собственные значения для уравнения смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 1. С. 163–168.
- [7] Моисеев Е. И. О представлении решения задачи Трикоми в виде биортогонального ряда // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 7. С. 1229–1237.
- [8] Сабитов К. Б., Вагапов В. З. О построении частных решений вырождающихся уравнений смешанного типа // Комплексный анализ, дифференц. уравнения и смежные вопросы. Тр. Международ. науч. конф. Уфа, 1996. С. 99–106.
- [9] Бибакова С. Л. Задача на собственные значения для уравнения смешанного типа // Тр. Всеросс. науч. конф. “Физика конденсированного состояния”. Т. 1. Стерлитамак, 1997. С. 14–18.
- [10] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1973.
- [11] Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Т. 1. М., 1949.
- [12] Моисеев Е. И. О базисности одной системы синусов // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 1. С. 177–179.
- [13] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
- [14] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981.

Стерлитамакский филиал АН Республики Башкортостан
Стерлитамакский государственный педагогический институт

Поступило
14.11.2001