Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Миллионщиков, Когомологии разрешимых алгебр Ли и солвмногобразия, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 1, 67–79

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2470>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 17:18:56

УДК 515.1

КОГОМОЛОГИИ РАЗРЕШИМЫХ АЛГЕБР ЛИ И СОЛВМНОГООБРАЗИЯ

Д. В. Миллионщиков

В работе изучаются когомологии $H_{\lambda\omega}^*(G/\Gamma, \mathbb{C})$ комплекса де Рама $\Lambda^*(G/\Gamma) \otimes \mathbb{C}$ компактного солвмногообразия G/Γ с деформированным дифференциалом $d_{\lambda\omega} = d + \lambda\omega$, где ω – некоторая замкнутая 1-форма. Такие когомологии естественным образом возникают в теории Морса–Новикова. Показывается, что для произвольной вполне разрешимой группы Ли G с кокомпактной решеткой $\Gamma \subset G$ когомологии $H_{\lambda\omega}^*(G/\Gamma, \mathbb{C})$ изоморфны когомологиям $H_{\lambda\omega}^*(\mathfrak{g})$ касательной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G с коэффициентами в одномерном представлении $\rho_{\lambda\omega}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}$, $\rho_{\lambda\omega}(\xi) = \lambda\omega(\xi)$. Кроме того, когомологии $H_{\lambda\omega}^*(G/\Gamma, \mathbb{C})$ нетривиальны тогда и только тогда, когда $-\lambda[\omega]$ принадлежит конечному подмножеству $\tilde{\Omega}_{\mathfrak{g}}$ в $H^1(G/\Gamma, \mathbb{C})$, определенному в терминах алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Библиография: 17 названий.

1. Введение. В начале 80-х годов С. П. Новиков построил [1], [2] аналог теории Морса для гладких замкнутых 1-форм на компактном гладком многообразии M . В частности, им были предложены неравенства типа Морса (неравенства Новикова) для чисел $m_p(\omega)$ нулей индекса p произвольной гладкой замкнутой морсовской 1-формы ω на M . В работах [3], [4] был предложен метод для нахождения так называемых неравенств Новикова без кручения в терминах комплекса де Рама многообразия M . Этот метод основывался на подходе Виттена [5] к теории Морса. А. В. Пажитнов получил ряд важных результатов в этом направлении в [4]. Когомологии комплекса $\Lambda^*(M) \otimes \mathbb{C}$ с деформированным дифференциалом $d + \lambda\omega$ изоморфны когомологиям $H_{\rho_{\lambda\omega}}^*(M, \mathbb{C})$ многообразия M с коэффициентами в локальной системе $\rho_{\lambda\omega}$ групп $\mathbb{C}$, $\rho_{\lambda\omega}(\gamma) = \exp \int_{\gamma} \lambda\omega$, $\gamma \in \pi_1(M)$, и для достаточно больших вещественных чисел λ была получена следующая оценка [4]:

$$m_p(\omega) \geq \dim H_{\rho_{\lambda\omega}}^p(M, \mathbb{C}) \quad \forall p.$$

Л. А. Алания в [6] рассмотрел когомологии $H_{\rho_{\lambda\omega}}^*(M_n, \mathbb{C})$ одной серии нильмногообразий M_n . Он доказал, что $H_{\rho_{\lambda\omega}}^*(M_n, \mathbb{C})$ являются тривиальными тогда и только тогда, когда $\lambda\omega \neq 0$. Случай $\lambda\omega = 0$ рассматривался в [7]. В обоих случаях доказательство было основано на теореме Номидзу [8] и все когомологические вычисления проводились в терминах соответствующей нильпотентной алгебры Ли $\mathcal{N}_n$.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00659, гранта РАИ-Россия № 04495UL и гранта № НШ-2185.2003.1.

Отправной точкой данной работы стало стремление:

- а) распространить результаты [6] в более общей ситуации, рассматривая солвмно-гообразия;
- б) найти простые примеры многообразий с нетривиальными $H_{\rho\lambda\omega}^*(M, \mathbb{C})$ с $\lambda\omega \neq 0$.

Одним из первых наблюдений, сделанных в этом направлении, стало следующее утверждение: для произвольного нильмногообразия G/Γ когомологии $H_{\lambda\omega}^*(G/\Gamma, \mathbb{C})$ изоморфны когомологиям алгебры Ли $H_{\lambda\omega}^*(\mathfrak{g})$ с коэффициентами в одномерном представлении $\rho_{\lambda\omega}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$, $\rho_{\lambda\omega}(\xi) = \lambda\omega(\xi)$, и тем самым, $H_{\lambda\omega}^*(\mathfrak{g}) = 0$ в силу теоремы Диксмье [9] (следствие 2.3).

Используя точную последовательность Диксмье когомологий алгебр Ли, показано, что для произвольной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с $H^1(\mathfrak{g}) \neq 0$ на каждой прямой $\lambda\omega \subset H^1(\mathfrak{g})$ существует лишь конечное число значений параметра λ_i , для которых когомологии $H_{\lambda_i\omega}^*(\mathfrak{g})$ нетривиальны (следствие 2.1).

Используя теорему Хаттори [10], можно показать, что изоморфизм $H_{\lambda\omega}^*(G/\Gamma, \mathbb{C}) \cong H_{\lambda\omega}^*(\mathfrak{g})$ сохраняется и для компактных солвмнообразий G/Γ с вполне разрешимой группой G . С другой стороны, для вполне разрешимой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ можно так подобрать базис в $\mathfrak{g}^*$, что

$$d\omega_i = 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad d\omega_j = \alpha_j \wedge \omega_j + P_j(\omega_1, \dots, \omega_{j-1}), \quad j = k+1, \dots, n.$$

С помощью такого базиса определяется естественная фильтрация коцепного комплекса $(\Lambda^*(\mathfrak{g}^*), d_{\lambda\omega})$ и соответствующая спектральная последовательность E_r , сходящаяся к $H_{\lambda\omega}^*(\mathfrak{g})$. E_r вырождается в первом члене E_1 почти всегда, за исключением случая, когда $-\lambda\omega$ принадлежит конечному подмножеству $\Omega_{\mathfrak{g}} \subset H^1(\mathfrak{g})$ – множеству сумм замкнутых 1-форм из набора $\{\alpha_j\}$ весов вполне приводимого представления, ассоциированного с присоединенным представлением ad (теорема 3.1).

Основной результат настоящей работы (теорема 4.5): *когомологии с локальными коэффициентами $H_{\lambda\omega}^*(G/\Gamma, \mathbb{C})$ компактного солвмнообразия G/Γ , где G – вполне разрешимая группа Ли, являются нетривиальными тогда и только тогда, когда $-\lambda[\omega] \in \tilde{\Omega}_{\mathfrak{g}}$, где $\tilde{\Omega}_{\mathfrak{g}}$ является конечным подмножеством в $H^1(G/\Gamma, \mathbb{C})$, корректно определенным в терминах алгебры Ли $\mathfrak{g}$.*

Часть результатов была анонсирована в [11]. Автор благодарен Л. А. Алания за плодотворные обсуждения и внимание к работе.

1. Когомологии с локальными коэффициентами, деформированный комплекс де Рама и теория Морса–Новикова. Рассмотрим замкнутое компактное многообразие M , его фундаментальную группу $\pi_1(M) = \Gamma$, действующую справа на универсальном накрытии $p: \widetilde{M} \rightarrow M$. Пусть $\rho: \Gamma \rightarrow \text{GL}(F)$ – представление Γ в группе автоморфизмов некоторой абелевой группы F . В этом случае можно определить правое действие Γ на прямом произведении $\widetilde{M} \times F$:

$$(x, u)\gamma = (x\gamma, \rho(\gamma)^{-1}(u)), \quad x \in \widetilde{M}, \quad u \in F, \quad \gamma \in \Gamma.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 (Стинрод [12]). *Локальной системой* L_ρ групп с группой F в качестве типичного слоя называется факторпространство $(\widetilde{M} \times F)/\Gamma$.

В данной работе мы будем рассматривать случай $F = \mathbb{C}$. Локальная система L_ρ будет в этом случае одномерным векторным расслоением над M или, в других терминах, локально постоянным одномерным пучком над M .

У каждой точки $x \in M$ есть своя группа коэффициентов F_x , изоморфная F . Рассматривая M как клеточный комплекс K_M и выбрав в каждой клетке $\sigma \in K_M$ по точке x_σ , будем считать, что у клетки σ задана своя группа коэффициентов $F_\sigma = F_{x_\sigma}$. Зафиксируем некоторую точку $x_{\sigma_0} \in K_M$ и систему путей $\{\gamma_{\tau\sigma}\}$, соединяющих между собой все точки вида x_σ . Каждому ориентированному пути $\gamma_{\sigma\sigma_0}$ из точки x_σ в точку x_{σ_0} сопоставим изоморфизм $w_{\sigma\sigma_0}: F_{\sigma_0} \rightarrow F_\sigma$. Рассмотрим теперь две различные клетки σ и τ . Петля $\gamma = \gamma_{\sigma\sigma_0}^{-1} \gamma_{\sigma\tau} \gamma_{\tau\sigma_0}$ определяет элемент $\gamma \in \Gamma$, а значит, и автоморфизм $\rho(\gamma): F_{\sigma_0} \rightarrow F_{\sigma_0}$. Таким образом, определен изоморфизм

$$w_{\sigma\tau}: F_\sigma \rightarrow F_\tau, \quad w_{\sigma\tau} = w_{\tau\sigma_0}^{-1} \rho(\gamma) w_{\sigma\sigma_0}.$$

Определим теперь коцепный комплекс $(C_\rho^*(K_M), \delta_\rho)$ с коэффициентами в локальной системе L_ρ . Коцепь $c \in C_\rho^p(K_M)$ определим как линейную функцию, сопоставляющую каждой (ориентированной) p -клетке σ элемент $c(\sigma) \in F_\sigma$. Кограничный оператор δ_ρ определяется соответственно:

$$\delta_\rho c(\tau) = \sum [\sigma : \tau] w_{\sigma\tau}(c(\sigma)),$$

где целое число $[\sigma : \tau]$ обозначает коэффициент инцидентности между σ и τ , а суммирование ведется по всем клеткам σ на единицу меньшей размерности, входящим в границу $\partial\tau$ клетки τ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2 (Стинрод [12]). *Когомологиями* $H_\rho^*(K_M, F)$ *клеточного комплекса* K_M (многообразия M) с коэффициентами в локальной системе L_ρ называются когомологии коцепного комплекса $(C_\rho^*(K), \delta_\rho)$.

Рассмотрим комплекс де Рама $(\Lambda^*(M), d)$ многообразия M . Пусть ω – некоторая замкнутая 1-форма на многообразии M и $\lambda \in \mathbb{R}$. С помощью ω можно определить представление фундаментальной группы $\rho_{\lambda\omega}: \pi_1(M) \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$:

$$\rho_{\lambda\omega}(\gamma) = \exp \int_\gamma \lambda \omega, \quad \gamma \in \pi_1(M). \quad (1)$$

С другой стороны, при помощи ω определяется комплекс де Рама $(\Lambda^*(M), d_{\lambda\omega})$ с деформированным дифференциалом

$$d_{\lambda\omega} = d + \lambda\omega: \Lambda^*(M) \rightarrow \Lambda^*(M),$$

т.е. для произвольной формы $a \in \Lambda^*(M)$ имеем

$$d_{\lambda\omega}(a) = da + \lambda\omega \wedge a.$$

Выбрав $\lambda \in \mathbb{C}$ и рассматривая комплексификацию $\Lambda^*(M) \otimes \mathbb{C}$, приходим к следующему утверждению.

ЛЕММА 1.1 [3], [4]. 1) Для произвольной замкнутой 1-формы $d\omega = 0$ когомологии $H_{\lambda\omega}^*(M, \mathbb{C})$ алгебраического комплекса $(\Lambda^*(M) \otimes \mathbb{C}, d_{\lambda\omega})$ изоморфны когомологиям $H_{\rho_{\lambda\omega}}^*(M, \mathbb{C})$ с коэффициентами в локальной системе групп $\mathbb{C}$, заданной представлением (1) фундаментальной группы $\rho_{\lambda\omega}: \pi_1(M) \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C})$.

2) Для произвольной пары ω, ω' 1-форм таких, что $\omega - \omega' = d\phi$, $\phi \in C^\infty(M)$, когомологии $H_{\lambda\omega}^*(M, \mathbb{C})$ и $H_{\lambda\omega'}^*(M, \mathbb{C})$ изоморфны. Этот изоморфизм может быть задан при помощи калибровочного преобразования

$$a \rightarrow e^{\lambda\phi} a, \quad d \rightarrow e^{\lambda\phi} d e^{-\lambda\phi} = d + \lambda d\phi \wedge.$$

Когомологии $H_{\lambda\omega}^*(M, \mathbb{C})$ возникают естественным образом в рамках теории Морса–Новикова. В классической теории Морса ставится задача о связи множества критических точек $df = 0$ произвольной функции Морса f на замкнутом компактном многообразии M с топологическими инвариантами многообразия M . С. П. Новиков в [1], [2] построил аналог такой теории для замкнутой, но не обязательно точной 1-формы ω , которая является морсовской, т.е. в достаточно малой окрестности произвольной точки $x \in M$ она является дифференциалом некоторой функции Морса df . Нули морсовской формы ω являются изолированными; значит, можно определить индекс каждого из них, как индекс критической точки локальной функции f , $\omega = df$. Число нулей формы ω индекса p обозначим через $m_p(\omega)$.

ТЕОРЕМА 1.1 (А. В. Пажитнов [4]). Для достаточно больших вещественных чисел λ имеем следующую оценку:

$$m_p(\omega) \geq \dim H_{\rho_{\lambda\omega}}^*(M, \mathbb{C}) \quad \forall p.$$

2. Точная последовательность Диксмье когомологий алгебры Ли. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли над полем $\mathbb{K}$ и $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ – некоторое ее представление. Обозначим $C^q(\mathfrak{g}, V)$ пространство всех q -линейных кососимметричных отображений из $\mathfrak{g}$ в V . Определен алгебраический комплекс

$$V = C^0(\mathfrak{g}, V) \xrightarrow{d} C^1(\mathfrak{g}, V) \xrightarrow{d} C^2(\mathfrak{g}, V) \xrightarrow{d} \dots,$$

в котором дифференциал d задан следующим образом:

$$\begin{aligned} df(X_1, \dots, X_{q+1}) &= \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^{i+1} \rho(X_i)(f(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{q+1})) \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq q+1} (-1)^{i+j} f([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{q+1}). \end{aligned} \quad (2)$$

Когомологии комплекса $(C^*(\mathfrak{g}, V), d)$ называются *когомологиями алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с коэффициентами в представлении $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$* .

Рассмотрим тривиальное представление $\rho_0: \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}$, $\rho_0 = 0$. Когомологии соответствующего комплекса $(\Lambda^*(\mathfrak{g}^*), d)$ называются *когомологиями с тривиальными коэффициентами алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и обозначаются $H^*(\mathfrak{g})$* .

Отметим, что оператор $d: \mathfrak{g}^* \rightarrow \Lambda^2(\mathfrak{g}^*)$, взятый со знаком минус, является двойственным отображением к скобке Ли $[\cdot, \cdot]: \Lambda^2(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathfrak{g}$, а тривиальность оператора d^2 эквивалентна тождеству Якоби в алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Непосредственно из определения следует, что $H^1(\mathfrak{g})$ является двойственным пространством к $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, а значит,

- 1) $\dim H^1(\mathfrak{g}) \geq 2$ для нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{g}$;
- 2) $\dim H^1(\mathfrak{g}) \geq 1$ для разрешимой алгебры Ли $\mathfrak{g}$;
- 3) $H^1(\mathfrak{g}) = 0$ для полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Рассмотрим произвольную алгебру Ли $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{K}$ с нетривиальной первой группой когомологий $H^1(\mathfrak{g})$ и выберем некоторую замкнутую 1-форму ω . Для произвольного $\lambda \in \mathbb{K}$ можно определить:

- 1) новый деформированный дифференциал $d_{\lambda\omega}$ в $\Lambda^*(\mathfrak{g}^*)$ при помощи формулы

$$d_{\lambda\omega}(a) = da + \lambda\omega \wedge a;$$

- 2) одномерное представление

$$\rho_{\lambda\omega}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}, \quad \rho_{\lambda\omega}(\xi) = \lambda\omega(\xi), \quad \xi \in \mathfrak{g}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. *Комплекс $(\Lambda^*(\mathfrak{g}^*), d_{\lambda\omega})$ совпадает с коцепным комплексом алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с коэффициентами в одномерном представлении $\rho_{\lambda\omega}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует непосредственно из

$$(\lambda\omega \wedge a)(X_1, \dots, X_{q+1}) = \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^{i+1} \lambda\omega(X_i)(a(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{q+1})).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Когомологии $H_{\lambda\omega}^*(\mathfrak{g})$ совпадают с когомологиями с тривиальными коэффициентами $H^*(\mathfrak{g})$, если $\lambda = 0$. Отметим также, что если $\lambda \neq 0$, то деформированный дифференциал $d_{\lambda\omega}$, вообще говоря, не совместим с внешним произведением в $\Lambda^*(\mathfrak{g}^*)$:

$$d_{\lambda\omega}(a \wedge b) = d(a \wedge b) + \lambda\omega \wedge a \wedge b \neq d_{\lambda\omega}(a) \wedge b + (-1)^{\deg a} a \wedge d_{\lambda\omega}(b);$$

тем самым, когомологии $H_{\lambda\omega}^*(\mathfrak{g})$ не имеют естественной мультипликативной структуры при $\lambda \neq 0$.

Ненулевая замкнутая 1-форма ω задает идеал $\mathfrak{b}_{\omega} = \{x \in \mathfrak{g}, \omega(x) = 0\}$ коразмерности 1 в $\mathfrak{g}$. Выберем вектор $X \in \mathfrak{g}$ такой, что $\omega(X) = 1$, и рассмотрим сопряженный оператор $\text{ad } X^*: \mathfrak{b}_{\omega}^* \rightarrow \mathfrak{b}_{\omega}^*$ к оператору $\text{ad } X: \mathfrak{b}_{\omega} \rightarrow \mathfrak{b}_{\omega}$. С его помощью мы можем определить дифференцирование $\text{ad } X^*$ степени 0 внешней алгебры $\Lambda^*(\mathfrak{b}_{\omega}^*)$:

$$\text{ad } X^*(a \wedge b) = \text{ad } X^*a \wedge b + a \wedge \text{ad } X^*b \quad \forall a, b \in \Lambda^*(\mathfrak{b}_{\omega}^*).$$

Дифференцирование $\text{ad } X^*$ перестановочно с дифференциалом d и соответствующее отображение в когомологиях $H^*(\mathfrak{b}_{\omega})$ мы будем обозначать тем же символом $\text{ad } X^*$, а тождественное отображение – символом Id соответственно.

ТЕОРЕМА 2.1 (Диксмье [9]). *Существует длинная точная последовательность когомологий алгебр Ли:*

$$\begin{aligned} \dots (-1)^i (\text{ad } X^* - \lambda \text{Id}) H^{i-1}(\mathfrak{b}_\omega) \xrightarrow{\wedge \omega} H^i_{\lambda\omega}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{r_i} H^i(\mathfrak{b}_\omega) \\ (-1)^{i+1} (\text{ad } X^* - \lambda \text{Id}) H^i(\mathfrak{b}_\omega) \longrightarrow \dots, \end{aligned} \quad (3)$$

где

- 1) гомоморфизм $r_i: H^i_{\lambda\omega}(\mathfrak{g}) \rightarrow H^i(\mathfrak{b}_\omega)$ есть гомоморфизм ограничения;
- 2) $\wedge \omega: H^{*-1}(\mathfrak{b}_\omega) \rightarrow H^*(\mathfrak{g})$ порожден внешним умножением справа на ω :

$$\xi \rightarrow \xi \wedge \omega;$$

- 3) гомоморфизмы $\text{ad } X^*: H^i(\mathfrak{b}_\omega) \rightarrow H^i(\mathfrak{b}_\omega)$ индуцированы дифференцированием $\text{ad } X^*$ степени 0 внешней алгебры $\Lambda^*(\mathfrak{b}_\omega^*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждая форма $f \in \Lambda^*(\mathfrak{g})$ может быть представлена как $f = f' \wedge \omega + f''$, где $f' \in \Lambda^{*-1}(\mathfrak{b}_\omega^*)$ и $f'' \in \Lambda^*(\mathfrak{b}_\omega^*)$. Выпишем короткую точную последовательность алгебраических комплексов

$$0 \longrightarrow \Lambda^{*-1}(\mathfrak{b}_\omega^*) \xrightarrow{\wedge \omega} \Lambda^*(\mathfrak{g}^*) \longrightarrow \Lambda^*(\mathfrak{b}_\omega^*) \longrightarrow 0.$$

Эта короткая точная последовательность комплексов порождает длинную точную последовательность в когомологиях. Свойства гомоморфизмов r_i и $\wedge \omega$ очевидны. Гомоморфизм же $H^q(\mathfrak{b}_\omega) \rightarrow H^q(\mathfrak{b}_\omega)$ рассмотрим подробнее. Для этого сначала определим отображение

$$\Lambda^{q+1}(\mathfrak{g}^*) \rightarrow \Lambda^q(\mathfrak{b}_\omega^*), \quad f \in \Lambda^{q+1}(\mathfrak{g}^*) \rightarrow f_X \in \Lambda^q(\mathfrak{b}_\omega^*),$$

где $f_X(X_1, \dots, X_q) = f(X_1, \dots, X_q, X)$. Тем самым, $f_X = f'$, если $f = f' \wedge \omega + f''$, и $(\lambda\omega \wedge f)_X = (-1)^{\deg f} \lambda f$.

Верна очевидная формула

$$\begin{aligned} (df)_X(X_1, \dots, X_q) &= - \sum_{1 \leq j \leq q} (-1)^{j+q+1} f(\text{ad } X(X_j), X_1, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_q) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j} f([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_q, X) \\ &= ((-1)^{q+1} \text{ad } X^*(f) + d(f_X))(X_1, \dots, X_q). \end{aligned} \quad (4)$$

Следовательно, связывающий гомоморфизм $H^q(\mathfrak{b}_\omega) \rightarrow H^q(\mathfrak{b}_\omega)$ длинной точной последовательности когомологий совпадает с гомоморфизмом, порожденным оператором $(-1)^{q+1}(\text{ad } X^* - \lambda \text{Id})$, который тем самым не зависит от выбора вектора X .

Обозначим множество собственных значений оператора $\text{ad } X^*: H^k(\mathfrak{b}_\omega) \rightarrow H^k(\mathfrak{b}_\omega)$ через $\text{Спец}^k(\omega)$.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть $\mathfrak{g}$ – n -мерная алгебра Ли и $\omega \in \mathfrak{g}^*$, $\omega \neq 0$, $d\omega = 0$. Тогда

- 1) когомологии $H_{\lambda\omega}^*(\mathfrak{g})$ являются нетривиальными тогда и только тогда, когда

$$\lambda \in \bigcup_{k=1}^n \text{Спец}^k(\omega);$$

- 2) i -е число Бетти $b_{\lambda\omega}^i(\mathfrak{g}) = \dim H_{\lambda\omega}^i(\mathfrak{g})$ равно

$$b_{\lambda\omega}^i(\mathfrak{g}) = k_{\lambda\omega}^i + k_{\lambda\omega}^{i-1}, \quad (5)$$

где число $k_{\lambda\omega}^i$ есть размерность ядра оператора $\text{ad } X^* - \lambda \text{Id}: H^i(\mathfrak{b}_\omega) \rightarrow H^i(\mathfrak{b}_\omega)$.

ПРИМЕР 2.1. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли, определенная базисом $X, e_1, e_2, \dots, e_n$ и коммутационными соотношениями (мы будем в дальнейшем опускать тривиальные соотношения):

$$[X, e_1] = e_1, \quad [X, e_2] = e_2, \quad \dots, \quad [X, e_n] = e_n.$$

Выберем $\omega, \omega_1, \dots, \omega_n$ как элементы соответствующего сопряженного базиса в $\mathfrak{g}^*$. В частности,

$$\omega(X) = 1, \quad \omega(e_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Очевидно, что ω – замкнутая 1-форма и $\text{ad } X^*(\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p}) = p\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p}$. Следовательно, $\text{Спец}^p(\omega) = \{p\}$ и для $\lambda = p$ имеется лишь два нетривиальных числа Бетти:

$$b_{p\omega}^{p+1}(\mathfrak{g}) = b_{p\omega}^p(\mathfrak{g}) = \binom{n}{p}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.2 [10]. Пусть $\mathfrak{g}$ – нильпотентная алгебра Ли. Тогда

$$\dim H^p(\mathfrak{g}) \geq 2, \quad p = 1, \dots, n-1. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем доказывать оценки (6) индукцией по размерности нильпотентных алгебр Ли. В частности, мы предполагаем верными следующие неравенства:

$$\dim H^p(\mathfrak{b}_\omega) \geq 2, \quad \dim H^{p-1}(\mathfrak{b}_\omega) \geq 2.$$

Оператор $\text{ad } X$ является нильпотентным, а значит, нильпотентными будут и операторы $\text{ad } X^*: H^i(\mathfrak{b}_\omega) \rightarrow H^i(\mathfrak{b}_\omega)$, $i = p, p-1$. Тем самым, для размерностей ядер операторов $\text{ad } X^*$ имеются оценки $k^p \geq 1, k^{p-1} \geq 1$, откуда при $\lambda = 0$ согласно следствию 2.1 и следуют требуемые неравенства (6) при $p \geq 2$.

Фактически было доказано и другое

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть $\mathfrak{g}$ – нильпотентная алгебра Ли. Когомологии $H_{\lambda\omega}^*(\mathfrak{g})$ нетривиальны тогда и только тогда, когда $\lambda\omega = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. В данной работе мы привели только лишь версию точной последовательности Диксмье, приспособленную к нашему специальному случаю 1-мерного представления $\rho_{\lambda\omega}$ (см. [9]).

3. Когомологии разрешимых алгебр Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Вещественная разрешимая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *вполне разрешимой*, если $\forall X \in \mathfrak{g}$ все собственные значения оператора $\text{ad } X$ являются вещественными числами.

ЛЕММА 3.1. Пусть $\mathfrak{g}$ – n -мерная комплексная разрешимая алгебра Ли (вещественная вполне разрешимая алгебра Ли) и $b^1(\mathfrak{g}) = \dim H^1(\mathfrak{g}) = k$. Тогда существует базис $\omega_1, \dots, \omega_n$ в $\mathfrak{g}^*$ такой, что

$$\begin{aligned} d\omega_1 = \dots = d\omega_k = 0, \quad d\omega_i = \alpha_i \wedge \omega_i + P_i(\omega_1, \dots, \omega_{i-1}), \\ \alpha_i = \sum_{l=1}^k a_{il}\omega_l, \quad P_i(\omega_1, \dots, \omega_{i-1}) \in \Lambda^2(\omega_1, \dots, \omega_{i-1}), \quad i = k+1, \dots, n. \end{aligned} \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме Ли о представлении разрешимой алгебры над алгебраически замкнутым полем [13] существует такой базис $e_{k+1}, \dots, e_n$ в коммутанте $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, что линейные подпространства $\langle e_i, \dots, e_n \rangle, i = k+1, \dots, n$, являются инвариантными относительно представления $\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$. Дополним базис $e_{k+1}, \dots, e_n$ до базиса $e_1, \dots, e_n$ всей алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Легко видеть, что для функционалов $\omega_1, \dots, \omega_n$ сопряженного базиса к $e_1, \dots, e_n$ справедливы формулы (7).

Определим $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Набор 1-форм $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \mathfrak{g}^*$ имеет следующий инвариантный смысл: это – набор весов вполне приводимого представления, ассоциированного с присоединенным представлением $\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

Рассмотрим теперь произвольную комплексную разрешимую (или вещественную вполне разрешимую) алгебру Ли $\mathfrak{g}$ и выберем базис (7) $\omega_1, \dots, \omega_n$ в $\mathfrak{g}^*$. Обозначим через Λ^* внешнюю подалгебру в $\Lambda^*(\omega_1, \dots, \omega_n)$, порожденную формами $\omega_1, \dots, \omega_k$. Определим возрастающую фильтрацию F коцепного комплекса $(\Lambda^*(\mathfrak{g}^*), d_{\lambda\omega})$, рассматривая $\Lambda^*(\mathfrak{g}^*)$ как модуль над Λ^* :

$$0 \subset \Lambda^* \subset F^{k+1} \subset F^{k+2} \subset F^{k+1, k+2} \subset F^{k+3} \subset F^{k+1, k+3} \subset \dots \subset F^{k, \dots, n} = \Lambda^*(\mathfrak{g}^*),$$

где подмодуль $\{F^{j_1, \dots, j_p}, k < j_1 < \dots < j_p \leq n\}$ порожден мономами $\omega_{l_1} \wedge \dots \wedge \omega_{l_q}$, $k < l_1 < \dots < l_q$ такими, что:

- 1) $l_q < j_p$;
- 2) $l_q = j_p, l_{q-1} < j_{p-1}$;
- 3) $l_q = j_p, l_{q-1} = j_{p-1}, l_{q-2} < j_{p-2}, \dots$,

и наконец мономами с $l_q = j_p, \dots, l_{q-p+1} = j_1$.

Сами подпространства $\{F^{j_1, \dots, j_p}\}$ занумерованы в соответствии с этим лексиграфическим упорядочением. Например,

$$\begin{aligned} F^{k+1} &= \Lambda^* \oplus \Lambda^* \wedge \omega_{k+1}, & F^{k+2} &= \Lambda^* \oplus \Lambda^* \wedge \omega_{k+1} \oplus \Lambda^* \wedge \omega_{k+2}, \\ F^{k+1, k+2} &= \Lambda^* \oplus \Lambda^* \wedge \omega_{k+1} \oplus \Lambda^* \wedge \omega_{k+2} \oplus \Lambda^* \wedge \omega_{k+1} \wedge \omega_{k+2}, \\ F^{k+3} &= \Lambda^* \oplus \Lambda^* \wedge \omega_{k+1} \oplus \Lambda^* \wedge \omega_{k+2} \oplus \Lambda^* \wedge \omega_{k+1} \wedge \omega_{k+2} \oplus \Lambda^* \wedge \omega_{k+3}, & \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Фильтрация F совместима с дифференциалом $d + \lambda\omega$, а значит, можно рассмотреть соответствующую спектральную последовательность E_r . Ее первый член E_1 изоморфен прямой сумме когомологий комплексов вида $(\Lambda^* \wedge \omega_{j_1} \wedge \dots \wedge \omega_{j_p}, d_0)$, где дифференциал d_0 определен следующим образом:

$$d_0(\tilde{a} \wedge \omega_{j_1} \wedge \dots \wedge \omega_{j_p}) = (\alpha_{j_1} + \dots + \alpha_{j_p} + \lambda\omega)\tilde{a} \wedge \omega_{j_1} \wedge \dots \wedge \omega_{j_p}.$$

Тем самым, $H^*(\Lambda^* \wedge \omega_{j_1} \wedge \dots \wedge \omega_{j_p}, d_0)$ тривиальны, если $\alpha_{j_1} + \dots + \alpha_{j_p} + \lambda\omega \neq 0$. Выбирая $\lambda\omega$ таким, что

$$\alpha_{j_1} + \dots + \alpha_{j_p} + \lambda\omega \neq 0 \quad \forall j_1 < \dots < j_p,$$

замечаем, что спектральная последовательность E_r вырождается в первом члене E_1 .

Обозначим

$$\Omega_{\mathfrak{g}} = \{\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_p} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n, p = 1, \dots, n\}. \quad (9)$$

В случае вещественной разрешимой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, рассматривая ее комплексификацию, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\mathfrak{g}$ – разрешимая алгебра Ли, $\dim \mathfrak{g} = n$, $\Omega_{\mathfrak{g}}$ – конечное подмножество в $H^1(\mathfrak{g})$, порожденное набором $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ весов вполне приводимого представления, ассоциированного с присоединенным представлением ad . Тогда существует спектральная последовательность E_r , стоящая к когомологиям $H_{\lambda\omega}^*(\mathfrak{g})$, первый член E_1 которой вырождается, если $-\lambda\omega \notin \Omega_{\mathfrak{g}}$.

Отметим, что подмножество $\Omega_{\mathfrak{g}}$ не пусто, так как содержит 0. Вообще говоря, член E_1 не совпадает с E_{∞} . Поэтому надо ввести подмножество $\tilde{\Omega}_{\mathfrak{g}} \subset \Omega_{\mathfrak{g}}$ такое, что $E_{\infty} \neq 0$ тогда и только тогда, когда $-\lambda\omega \in \tilde{\Omega}_{\mathfrak{g}}$.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть $\mathfrak{g}$ – разрешимая алгебра Ли. Когомологии $H_{\rho_{\lambda\omega}}^*(\mathfrak{g})$ нетривиальны тогда и только тогда, когда $-\lambda\omega \in \tilde{\Omega}_{\mathfrak{g}}$ – некоторому непустому конечному подмножеству в $H^1(\mathfrak{g})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Данное утверждение не следует, вообще говоря, из следствия 2.1 предыдущего раздела. Там было доказано, что для каждой прямой $\lambda\omega$ в $H^1(\mathfrak{g})$ существует лишь конечное число значений параметра λ_i , для которых когомологии $H_{\lambda_i\omega}^*(\mathfrak{g})$ нетривиальны.

4. Когомологии солвмнообразий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. *Солвмнообразием (нильмнообразием) M называется компактное однородное пространство вида G/Γ , где G является односвязной разрешимой (нильпотентной) группой Ли, а Γ – решеткой в G .*

Приведем вначале несколько примеров нильмнообразий.

ПРИМЕР 4.1. n -мерный тор $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$.

ПРИМЕР 4.2. Многообразие Гейзенберга $M_3 = \mathcal{H}_3 / \Gamma_3$, где $\mathcal{H}_3$ обозначает группу верхнетреугольных матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x, y, z \in \mathbb{R},$$

а решетка Γ_3 является подгруппой матриц указанного вида с целочисленными матричными элементами x, y, z .

ТЕОРЕМА 4.1 (А.И. Мальцев [14]). *Пусть G является односвязной нильпотентной группой Ли, а $\mathfrak{g}$ – ее касательная алгебра Ли. Тогда в G существует кокомпактная решетка Γ (иными словами G/Γ – компактное пространство), если и только если в алгебре $\mathfrak{g}$ существует базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ такой, что все структурные константы $\{c_{ij}^k\}$, $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$, являются рациональными числами.*

Теорема Мальцева дает возможность эффективно строить примеры нильмнообразий. Пусть $\mathfrak{g}$ является нильпотентной алгеброй Ли, заданной при помощи базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ и коммутационных соотношений $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$, $c_{ij}^k \in \mathbb{Q}$. В векторном пространстве $\mathfrak{g}$ с помощью формулы Кэмпбелла–Хаусдорфа [13] определим операцию умножения $*$:

$$x * y = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \dots$$

Нильпотентная группа Ли $G = (\mathfrak{g}, *)$ обладает кокомпактной решеткой Γ – подгруппой, порожденной элементами базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$, а значит, определено и соответствующее нильмнообразие G/Γ .

Следующий пример солвмнообразия уже не является нильмнообразием.

ПРИМЕР 4.3. Рассмотрим полупрямое произведение $G_0 = \mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^2$, где $\mathbb{R}$ действует на $\mathbb{R}^2$ посредством

$$t \rightarrow \phi(t) = \begin{pmatrix} a^t & 0 \\ 0 & a^{-t} \end{pmatrix},$$

где $a + a^{-1} = n \in \mathbb{N}$, $a \neq 1$, $a > 0$. Тогда

$$\phi(1) = C^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & n \end{pmatrix} C$$

для некоторой матрицы $C \in GL(2, \mathbb{R})$. В этом случае существует решетка $L \subset \mathbb{R}^2$, инвариантная относительно оператора $\phi(1)$. Действие $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ на L определено оператором $\phi(1)$ и можно определить решетку $\Gamma \subset G$ как полупрямое произведение $\mathbb{Z} \ltimes_{\phi(1)} L$.

Решетки, отвечающие различным значениям n , неизоморфны, а соответствующие солвмногООбразия попарно топологически не эквивалентны.

Отметим также, что солвмногООбражение из предыдущего примера является расслоением над S^1 со слоем T^2 . Этот факт обобщается в следующей теореме Мостова.

ТЕОРЕМА 4.2 [15]. *Всякое компактное солвмногООбражение расслаивается над тором с некоторым нильмногООбражением в качестве слоя.*

Из данной теоремы вытекает, что на произвольном солвмногООбражении всегда существует 1-форма ω без нулей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Разрешимая группа Ли G называется *вполне разрешимой*, если ее касательная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является вполне разрешимой.

Комплекс де Рама $\Lambda^*(G/G)$ солвмногООбражения G/G может быть отождествлен с подкомплексом $\Lambda_\Gamma^*(G) \subset \Lambda^*(G)$ левоинвариантных относительно действия решетки Γ дифференциальных форм на группе G . В свою очередь, комплекс $\Lambda_\Gamma^*(G)$ содержит подкомплекс $\Lambda_G^*(G)$ левоинвариантных форм относительно уже полного действия всей группы G . Последний подкомплекс $\Lambda_G^*(G)$ изоморфен естественным образом коцепному комплексу $\Lambda^*(\mathfrak{g})$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Рассмотрим определенное таким образом включение

$$\psi: \Lambda^*(\mathfrak{g}) \rightarrow \Lambda^*(G/G).$$

ТЕОРЕМА 4.3 (Хаттори [10]). *Пусть G/G – компактное солвмногООбражение, где G – вполне разрешимая группа Ли. Тогда отображение включения $\psi: \Lambda^*(\mathfrak{g}) \rightarrow \Lambda^*(G/G)$ индуцирует изоморфизм $\psi^*: H^*(\mathfrak{g}) \rightarrow H^*(G/G, \mathbb{R})$ в когомологиях.*

ПРИМЕР 4.4. Обозначим через $\mathcal{V}_n$ нильпотентную алгебру Ли с базисом $e_1, e_2, \dots, e_n$ и коммутационными соотношениями

$$[e_i, e_j] = \begin{cases} (j-i)e_{i+j}, & i+j \leq n, \\ 0, & i+j > n. \end{cases}$$

Когомологии с локальными коэффициентами нильпотентных алгебр Ли $\mathcal{V}_n$ и соответствующих нильмногООбражений M_n были рассмотрены Алания в [6]. В частности им была доказана тривиальность когомологий $H_{\lambda\omega}^*(M_n, \mathbb{C})$ при $\lambda\omega \neq 0$. В [6] было замечено, что аналогичный результат справедлив и для произвольного нильмногООбражения. Но, как мы показали ранее в следствии 2.3, это следует из более общей теоремы Диксмье [9] о когомологиях нильпотентных алгебр Ли.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Теорема Хаттори обобщает классический результат Номидзу [8] для нильмногООбражений. Для произвольного солвмногООбражения G/G отображение ψ^* не является изоморфизмом, но остается инъективным (см. [16]).

Таким образом, для вполне разрешимой группы Ли G каждый класс $[\omega] \in H^1(G/G, \mathbb{R})$ может быть представлен левоинвариантной (относительно действия G) 1-формой ω . При помощи формы ω и $\lambda \in \mathbb{C}$ можно определить одномерное представление $\rho_{\lambda\omega}: G \rightarrow \mathbb{C}^*$:

$$\rho_{\lambda\omega}(g) = \exp \int_{\gamma(e, g)} \lambda\omega,$$

где $\gamma(e, g)$ – некоторый путь, соединяющий единицу e с g в группе G (напомним, что G является односвязной). Так как ω – левоинвариантная 1-форма, справедливо следующее свойство:

$$\int_{\gamma(e, g_1 g_2)} \lambda\omega = \int_{\gamma(e, g_1)} \lambda\omega + \int_{\gamma(g_1, g_1 g_2)} \lambda\omega = \int_{\gamma(e, g_1)} \lambda\omega + \int_{g_1^{-1} \gamma(g_1, g_1 g_2)} \lambda\omega,$$

а это и значит, что $\rho_{\lambda\omega}(g_1 g_2) = \rho_{\lambda\omega}(g_1) \rho_{\lambda\omega}(g_2)$. Представление $\rho_{\lambda\omega}$ индуцирует представление соответствующей алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (его мы обозначим тем же символом): $\rho_{\lambda\omega}(X) = \lambda\omega(X)$.

Теорема Хаттори, в свою очередь, может быть обобщена на более широкий класс разрешимых групп Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Пусть G – односвязная группа Ли и $\Gamma \subset G$ – ее решетка. Пусть ρ является представлением группы G в конечномерном комплексном векторном пространстве F . Символ Ad будет обозначать присоединенное представление G и в ее касательной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и в ее комплексификации $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Будем говорить, что представление ρ является Γ -определяемым, если подгруппы $\rho(\Gamma)$ и $\rho(G)$ имеют одинаковое замыкание по Зарискому в группе $\text{Aut}_{\mathbb{C}}(F)$. Представление ρ называется Γ -допустимым, если представление $\rho \oplus \text{Ad}$ является Γ -определяемым.

ТЕОРЕМА 4.4 (Мостов [17, теорема 7.26]). Пусть G – односвязная разрешимая группа Ли и $\Gamma \subset G$ – ее решетка. Пусть ρ является конечномерным Γ -допустимым представлением G в комплексном векторном пространстве F . Тогда включение $\psi: \Lambda^*(\mathfrak{g}, F) \rightarrow \Lambda^*(G/\Gamma, F)$ комплексов дифференциальных форм со значениями в F индуцирует изоморфизм в когомологиях $\psi^*: H_{\rho}^*(\mathfrak{g}, F) \rightarrow H_{\rho}^*(G/\Gamma, F)$, где символ ρ обозначает также представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$, индуцированное представлением $\rho: G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(F)$.

В данной работе ограничимся случаем солвмногообразий с вполне разрешимой группой Ли G . Из теоремы Хаттори следует следующее важное

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть G/Γ – компактное солвмногообразие, G является вполне разрешимой группой Ли и ω – замкнутая 1-форма на G/Γ . Когомологии $H_{\lambda\omega}^*(G/\Gamma, \mathbb{R})$ изоморфны когомологиям алгебры Ли $H_{\lambda\omega'}^*(\mathfrak{g})$, где $\omega' \in \mathfrak{g}^*$ является левоинвариантной 1-формой, представляющей класс $[\omega] \in H^1(G/\Gamma, \mathbb{R})$.

Следствие 4.1 вместе со следствием 3.1 приводит нас к

ТЕОРЕМА 4.5. Пусть G/Γ – компактное солвмногообразие, где G – вполне разрешимая группа Ли и ω является замкнутой 1-формой на G/Γ . Когомологии $H_{\lambda\omega}^*(G/\Gamma, \mathbb{C})$ являются нетривиальными тогда и только тогда, когда $-\lambda[\omega] \in \tilde{\Omega}_{\mathfrak{g}}$ – конечному подмножеству в $H^1(G/\Gamma, \mathbb{R})$, корректно определенному в терминах соответствующей алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть G/Γ – компактное нильмногообразие. Когомологии $H_{\lambda\omega}^*(G/\Gamma, \mathbb{C})$ тривиальны тогда и только тогда, когда $\lambda\omega \neq 0$.

Рассмотрим трехмерное солвмногообразие $M = G_0/\Gamma$ из примера 4.3. Соответствующая алгебра Ли $\mathfrak{g}_0$ изоморфна алгебре Ли, заданной при помощи базиса e_1, e_2, e_3 и

КОММУТАЦИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ

$$[e_1, e_2] = e_2, \quad [e_1, e_3] = -e_3.$$

Обозначим через $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ элементы сопряженного базиса в $\mathfrak{g}^*$. Тогда в коцепном комплексе алгебры $\mathfrak{g}$ выполняются следующие формулы для его дифференциала:

$$d\omega_1 = 0, \quad d\omega_2 = -\omega_1 \wedge \omega_2, \quad d\omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_3.$$

Таким образом,

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -\omega_1, \quad \alpha_3 = \omega_1.$$

Легко видеть, что когомологии $H_{\lambda\omega}^*(\mathfrak{g}_0)$ нетривиальны тогда и только тогда, когда $\lambda\omega = 0, \pm\omega_1$. Соответствующие числа Бетти

$$b_{\lambda\omega}^p(M) = \dim H_{\lambda\omega}^p(G_0/\Gamma) = \dim H_{\lambda\omega}^p(\mathfrak{g}_0)$$

солвмногообразия $M = G_0/\Gamma$ равны

$$b_{\pm\omega_1}^0(M) = 0, \quad b_{\pm\omega_1}^1(M) = b_{\pm\omega_1}^2(M) = 1, \quad b_{\pm\omega_1}^3(M) = 0, \\ b^0(M) = b^1(M) = b^2(M) = b^3(M) = 1.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Новиков С. П. Многочисленные функции и функционалы. Аналог теории Морса // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260. № 1. С. 31–35.
- [2] Новиков С. П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса // УМН. 1982. Т. 37. № 5. С. 3–49.
- [3] Новиков С. П. Блоховские гомологии. Критические точки функций и замкнутых 1-форм // Докл. АН СССР. 1986. Т. 287. № 6. С. 1321–1324.
- [4] Пажитнов А. В. Аналитическое доказательство вещественной части неравенств Новикова // Докл. АН СССР. 1987. Т. 293. № 6. С. 1305–1307.
- [5] Witten E. Supersymmetry and Morse theory // J. Differential Geom. 1982. V. 17. P. 661–692.
- [6] Алания Л. А. Когомологии с локальными коэффициентами некоторых нильмногообразий // УМН. 1999. Т. 54. № 5. С. 147–148.
- [7] Миллионщиков Д. В. Когомологии нильмногообразий и теорема Гончаровой // УМН. 2001. Т. 56. № 4. С. 153–154.
- [8] Nomizu K. On the cohomology of homogeneous spaces of nilpotent Lie groups // Ann. of Math. 1954. V. 59. P. 531–538.
- [9] Dixmier J. Cohomologie des algebres de Lie nilpotentes // Acta Sci. Math. (Szeged). 1955. V. 16. P. 246–250.
- [10] Hattori A. Spectral sequence in the deRham cohomology of fibre bundles // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. 1. 1960. V. 8. № 4. P. 289–331.
- [11] Миллионщиков Д. В. Когомологии с локальными коэффициентами солвмногообразий и задачи теории Морса–Новикова // УМН. 2002. Т. 57. № 4. С. 183–184.
- [12] Стинрод Н. Топология косых произведений. М.: ИЛ, 1953.
- [13] Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли. М.: Мир, 1969.
- [14] Мальцев А. И. Об одном классе однородных пространств // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1949. Т. 13. № 1. С. 9–32.
- [15] Mostow G. D. Factor spaces of solvable groups // Ann. of Math. 1954. V. 60. P. 1–27.
- [16] Рагунатан М. Дискретные подгруппы групп Ли. М.: Мир, 1977.
- [17] Mostow G. D. Cohomology of topological groups and solvmanifolds // Ann. of Math. 1961. V. 73. P. 20–48.