Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Неделько, Существование решений с внутренними слоями, выходящими на границу, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 1, 80–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2471>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 11:32:51

УДК 517.956.226

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ С ВНУТРЕННИМИ СЛОЯМИ, ВЫХОДЯЩИМИ НА ГРАНИЦУ

И. В. Неделько

Доказано существование решения с внутренним переходным слоем, выходящим на границу, в случае краевых условий Дирихле.
Библиография: 7 названий.

1. Введение. Рассмотрим задачу

$$\varepsilon^2 \Delta u = f(u, x, \varepsilon), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad (1)$$

$$u(x, \varepsilon) = g(x), \quad x \in \partial D, \quad (2)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, Δ – оператор Лапласа, $x = (x_1, x_2)$, D – ограниченная односвязная область с достаточно гладкой границей ∂D .

Пусть выполнены следующие условия:

- (A1) существует интервал I и число $\varepsilon_0 > 0$ такие, что $f(u, x, \varepsilon)$ – достаточно гладкая функция в области $I \times \overline{D} \times [0, \varepsilon_0]$;
- (A2) вырожденное уравнение $f(u, x, 0) = 0$ имеет три корня $u = \varphi_i(x)$, $i = 0, 1, 2$, таких, что при $x \in \overline{D}$

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) < \varphi_0(x) < \varphi_2(x), \quad [\varphi_1(x), \varphi_2(x)] \subset I, \\ f_u(\varphi_i(x), x, 0) > 0, \quad i = 1, 2, \quad f_u(\varphi_0(x), x, 0) < 0, \end{aligned}$$

и между φ_1 и φ_2 нет других корней кроме φ_0 .

Введем функцию $J(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(u, x, 0) du$. Пусть

- (A3) существует кривая $\Gamma \subset \overline{D}$, возможно имеющая общие точки с границей ∂D области D , такая, что

$$J(x) = 0, \quad x \in \Gamma; \quad (3)$$

пусть, далее, кривая Γ разделяет область D на две подобласти $D^{(+)}$ и $D^{(-)}$ и пусть существуют гладкие замкнутые кривые $C_1 \subset D^{(+)}$ и $C_2 \subset D^{(-)}$, ограничивающие некоторые односвязные области D_1 и D_2 соответственно такие, что

$$J(x) > 0, \quad x \in D^{(+)} \setminus D_1, \quad J(x) < 0, \quad x \in D^{(-)} \setminus D_2.$$

Отметим, что условие (A3) заведомо выполняется, если кривая Γ , удовлетворяющая соотношению (3), разделяет область D на две подобласти $D^{(+)}$ и $D^{(-)}$ такие, что $J(x) > 0$ при $x \in D^{(+)}$ и $J(x) < 0$ при $x \in D^{(-)}$. В этом случае в качестве кривых C_1 и C_2 можно взять, например, окружности, целиком лежащие в $D^{(+)}$ и $D^{(-)}$ соответственно. Пусть

(A4) функция $g(x)$ из граничного условия (2) достаточно гладкая и удовлетворяет неравенствам

$$\varphi_1(x) \leq g(x) \leq \varphi_2(x), \quad x \in \partial D. \quad (4)$$

Основной результат данной работы (теорема 3 в п. 4) состоит в том, что при условиях (A1)–(A4) для достаточно малых ε доказано существование решения $u_s(x, \varepsilon)$ задачи (1), (2), удовлетворяющего предельному соотношению

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_s(x, \varepsilon) = \begin{cases} \varphi_1(x), & x \in D^{(+)}, \\ \varphi_2(x), & x \in D^{(-)}. \end{cases} \quad (5)$$

Из (5) следует, что в окрестности кривой Γ из условия (A3) решение $u_s(x, \varepsilon)$ имеет внутренних переходный слой, поэтому, следуя терминологии, принятой в [1], такое решение можно отнести к контрастным структурам типа ступеньки (КСТС).

Впервые существование КСТС в задаче (1), (2) доказано в работе [2], причем в [2] важную роль играет условие, что кривая, в окрестности которой решение имеет переходный слой (кривая перехода), является гладкой, замкнутой и не имеет общих точек с границей области D . В нашем случае условие (A3) позволяет кривой Γ иметь общие точки с ∂D , и в этом случае внутренний переходный слой решения $u_s(x, \varepsilon)$ выходит на границу ∂D области D . Ситуация усложняется еще и тем, что указанное решение имеет пограничный слой в окрестности ∂D , который накладывается на внутренний слой в окрестностях общих точек Γ и ∂D . Из-за этого обстоятельства известные методы оказались не применимыми, и вопрос о существовании у задачи (1), (2) решений с внутренними переходными слоями, выходящими на границу области D , оставался открытым.

Отметим, что метод, развитый в данной работе, применим и в том случае, когда вместо (2) поставлено краевое условие второго рода (подробнее см. замечание 1 в п. 4). Такая задача менее интересна, поскольку тогда у решения отсутствует пограничный слой. Этот случай рассмотрен в работе [3] другим методом.

Опишем кратко содержание дальнейших разделов.

В п. 2 показано, что при достаточно малых ε существует решение $u_s(x, \varepsilon)$ из $C^2(\overline{D})$ задачи (1), (2), удовлетворяющее предельному соотношению

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_s(x, \varepsilon) = \begin{cases} \varphi_1(x), & x \in \overline{D}_1, \\ \varphi_2(x), & x \in \overline{D}_2, \end{cases} \quad (6)$$

где D_1 и D_2 – области из условия (A3). Соответствующие рассуждения основаны на построении (негладких) верхнего и нижнего решений задачи (1), (2).

В п. 3 доказано, что решение $u_s(x, \varepsilon)$, удовлетворяющее (6), удовлетворяет также соотношению (5), причем предельный переход в (5) равномерен на замкнутых множествах из $D^{(+)}$ и $D^{(-)}$. Можно сказать, что центральная идея доказательства состоит в построении барьеров параболической задачи, соответствующей задаче (1), (2), для которой $u_s(x, \varepsilon)$ является стационарным решением.

В п. 4 сформулирован основной результат данной работы (теорема 3) и приведены замечания, касающиеся дальнейших утверждений, которые можно обосновать с помощью изложенного метода.

2. Доказательство существования решения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия (A1)–(A4). Тогда при достаточно малых ε существует решение $u_s(x, \varepsilon)$ из $C^2(\overline{D})$ задачи (1), (2), причем $\forall \eta > 0 \exists \varepsilon' > 0$ такое, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon']$ это решение удовлетворяет неравенствам

$$u_s(x, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \eta, \quad x \in \overline{D}_1, \quad (7)$$

$$u_s(x, \varepsilon) > \varphi_2(x) - \eta, \quad x \in \overline{D}_2, \quad (8)$$

$$\varphi_1(x) - \eta < u_s(x, \varepsilon) < \varphi_2(x) + \eta, \quad x \in \overline{D}, \quad (9)$$

где D_1 и D_2 – области из условия (A3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть C_β и C_α – гладкие замкнутые кривые, ограничивающие односвязные области D_β и D_α соответственно, такие, что

$$D_1 \subset D_\beta \subset D^{(+)}, \quad D_2 \subset D_\alpha \subset D^{(-)}, \quad (10)$$

где $D^{(+)}$, $D^{(-)}$ – области из условия (A3).

Для точек $M(x_1, x_2)$ из малой окрестности кривой C_β введем локальные координаты (r_β, θ_β) (см. также [1]), где $|r_\beta|$ – расстояние от точки M до кривой C_β вдоль нормали к C_β , которая проходит через M , θ_β – координата той точки на C_β , из которой выпущена указанная нормаль, $r_\beta = |r_\beta|$, если $M \in D_\beta$, $r_\beta = -|r_\beta|$, если $M \in D \setminus \overline{D}_\beta$, $r_\beta = 0$, если $M \in C_\beta$.

Пусть $\varphi_i(r_\beta, \theta_\beta) \equiv \varphi_i(x(r_\beta, \theta_\beta))$, $i = 1, 2$, $f(u, r_\beta, \theta_\beta, \varepsilon) \equiv f(u, x(r_\beta, \theta_\beta), \varepsilon)$.

Аналогичным образом введем локальные координаты $(r_\alpha, \theta_\alpha)$ в окрестности кривой C_α и обозначения $\varphi_i(r_\alpha, \theta_\alpha)$, $i = 1, 2$, $f(u, r_\alpha, \theta_\alpha, \varepsilon)$.

Построим функцию

$$\begin{aligned} \beta(x, \varepsilon) &= \varphi_1(x) + \varepsilon^{1/2} + Q_{0\beta}(\tau_\beta, \theta_\beta) + \varepsilon^{1/2} Q_{1\beta}(\tau_\beta, \theta_\beta), & x \in \overline{D}_\beta, \\ \beta(x, \varepsilon) &= \varphi_2(x) + \varepsilon^{1/2}, & x \in \overline{D} \setminus \overline{D}_\beta, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\tau_\beta = r_\beta/\varepsilon$, причем при определении $Q_{0\beta}$ и $Q_{1\beta}$ будем пользоваться результатами работы [1].

Функция $Q_{0\beta}(\tau_\beta, \theta_\beta)$ является решением задачи (θ_β играет роль параметра)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q_{0\beta}}{\partial \tau_\beta^2} &= f(\varphi_1(0, \theta_\beta) + Q_{0\beta}(0, \theta_\beta, 0), \quad \tau_\beta > 0, \\ Q_{0\beta}(0, \theta_\beta) &= \varphi_2(0, \theta_\beta) - \varphi_1(0, \theta_\beta), \quad Q_{0\beta}(+\infty, \theta_\beta) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

В силу (10) из условия (A3) следует, что $J(x) > 0$ при $x \in C_\beta$, поэтому $Q_{0\beta}$ определяется однозначно, является положительной монотонно убывающей функцией τ_β при $\tau_\beta \geq 0$ и имеет экспоненциальные оценки по переменной τ_β сверху и снизу, причем эти оценки равномерны по θ_β , т.е. существуют постоянные $c_i > 0$ и $m_i > 0$, $i = 1, 2$, не зависящие от τ_β и θ_β , такие, что

$$Q_{0\beta}(\tau_\beta, \theta_\beta) \leq c_1 \exp(-m_1 \tau_\beta), \quad \tau_\beta \geq 0, \quad (13)$$

$$Q_{0\beta}(\tau_\beta, \theta_\beta) \geq c_2 \exp(-m_2 \tau_\beta), \quad \tau_\beta \geq 0. \quad (14)$$

Функцию $Q_{1\beta}(\tau_\beta, \theta_\beta)$ определим как решение задачи

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 Q_{1\beta}}{\partial \tau_\beta^2} &= f_u(\tau_\beta, \theta_\beta) Q_{1\beta} + f_{1\beta}(\tau_\beta, \theta_\beta), \quad \tau_\beta > 0, \\ Q_{1\beta}(0, \theta_\beta) &= 0, \quad Q_{1\beta}(+\infty, \theta_\beta) = 0,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}f_u(\tau_\beta, \theta_\beta) &\equiv f_u(\varphi_1(0, \theta_\beta) + Q_{0\beta}, 0, \theta_\beta, 0), \\ f_{1\beta}(\tau_\beta, \theta_\beta) &\equiv f_u(\tau_\beta, \theta_\beta) - f_u(\varphi_1(0, \theta_\beta), 0, \theta_\beta, 0).\end{aligned}$$

Функция $Q_{1\beta}$ допускает явное представление [4] и имеет равномерную по θ_β экспоненциальную оценку сверху по переменной τ_β типа (13):

$$|Q_{1\beta}(\tau_\beta, \theta_\beta)| \leq c \exp(-m\tau_\beta), \quad \tau_\beta \geq 0. \quad (15)$$

Проведем стандартную процедуру домножения функций $Q_{0\beta}$ и $Q_{1\beta}$ на срезающие функции [1]. Теперь функция $\beta(x, \varepsilon)$ полностью построена.

Нетрудно доказать, что $\beta(x, \varepsilon)$ непрерывна в $\overline{D}$ и является достаточно гладкой в областях $\overline{D}_\beta$ и $\overline{D} \setminus D_\beta$, причем

$$\varepsilon^2 \Delta \beta - f(\beta, x, \varepsilon) = -\varepsilon^{1/2} f_u(\varphi_1(x), x, 0) + O(\varepsilon) < 0, \quad x \in \overline{D}_\beta, \quad (16)$$

$$\varepsilon^2 \Delta \beta - f(\beta, x, \varepsilon) = -\varepsilon^{1/2} f_u(\varphi_2(x), x, 0) + O(\varepsilon) < 0, \quad x \in \overline{D} \setminus D_\beta. \quad (17)$$

Чтобы получить (16), (17) в малой окрестности кривой C_β следует перейти к локальным координатам (r_β, θ_β) (см. [1]).

Покажем, что при достаточно малых ε

$$\left(\frac{\partial \beta}{\partial n_\beta} \right)_\beta^{(-)} \geq \left(\frac{\partial \beta}{\partial n_\beta} \right)_\beta^{(+)}, \quad (18)$$

где $\partial/\partial n_\beta$ – производная по направлению внутренней нормали к C_β , а символы $(\cdot)_\beta^{(-)}$ и $(\cdot)_\beta^{(+)}$ обозначают предельные значения на C_β из областей $D \setminus D_\beta$ и D_β соответственно.

Действительно,

$$\begin{aligned}\varepsilon \left[\left(\frac{\partial \beta}{\partial n_\beta} \right)_\beta^{(-)} - \left(\frac{\partial \beta}{\partial n_\beta} \right)_\beta^{(+)} \right] &= \varepsilon [\varphi_{2r}(0, \theta_\beta) - \varphi_{1r}(0, \theta_\beta)] \\ &\quad - \frac{\partial Q_{0\beta}}{\partial \tau_\beta}(0, \theta_\beta) - \varepsilon^{1/2} \frac{\partial Q_{1\beta}}{\partial \tau_\beta}(0, \theta_\beta) \\ &= -\frac{\partial Q_{0\beta}}{\partial \tau_\beta}(0, \theta_\beta) + O(\varepsilon^{1/2}).\end{aligned} \quad (19)$$

С другой стороны, нетрудно получить [1] для $\frac{\partial Q_{0\beta}}{\partial \tau_\beta}(0, \theta_\beta)$ соотношение

$$\frac{\partial Q_{0\beta}}{\partial \tau_\beta}(0, \theta_\beta) = - \left[2 \int_{\varphi_1(0, \theta_\beta)}^{\varphi_2(0, \theta_\beta)} f(u, 0, \theta_\beta, 0) du \right]^{1/2} < 0. \quad (20)$$

Из (20) и (19) при достаточно малых ε следует (18).

Отметим также очевидное в силу (A4) неравенство

$$\beta(x, \varepsilon) > g(x), \quad x \in \partial D. \quad (21)$$

Аналогично функции $\beta(x, \varepsilon)$ построим функцию

$$\begin{aligned} \alpha(x, \varepsilon) &= \varphi_2(x) - \varepsilon^{1/2} + Q_{0\alpha}(\tau_\alpha, \theta_\alpha) - \varepsilon^{1/2} Q_{1\alpha}(\tau_\alpha, \theta_\alpha), \quad x \in \overline{D}_\alpha, \\ \alpha(x, \varepsilon) &= \varphi_1(x) - \varepsilon^{1/2}, \quad x \in \overline{D} \setminus \overline{D}_\alpha, \end{aligned} \quad (22)$$

где $\tau_\alpha = r_\alpha/\varepsilon$, а функции $Q_{0\alpha}(\tau_\alpha, \theta_\alpha)$ и $Q_{1\alpha}(\tau_\alpha, \theta_\alpha)$ определяются соответственно как решения задач

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q_{0\alpha}}{\partial \tau_\alpha^2} &= f(\varphi_2(0, \theta_\alpha) + Q_{0\alpha}, 0, \theta_\alpha, 0), \quad \tau_\alpha > 0, \\ Q_{0\alpha}(0, \theta_\alpha) &= \varphi_1(0, \theta_\alpha) - \varphi_2(0, \theta_\alpha), \quad Q_{0\alpha}(+\infty, \theta_\alpha) = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q_{1\alpha}}{\partial \tau_\alpha^2} &= f_u(\tau_\alpha, \theta_\alpha) Q_{1\alpha} + f_{1\alpha}(\tau_\alpha, \theta_\alpha), \quad \tau_\alpha > 0, \\ Q_{1\alpha}(0, \theta_\alpha) &= 0, \quad Q_{1\alpha}(+\infty, \theta_\alpha) = 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f_u(\tau_\alpha, \theta_\alpha) &\equiv f_u(\varphi_2(0, \theta_\alpha) + Q_{0\alpha}, 0, \theta_\alpha, 0), \\ f_{1\alpha}(\tau_\alpha, \theta_\alpha) &\equiv f_u(\tau_\alpha, \theta_\alpha) - f_u(\varphi_2(0, \theta_\alpha), 0, \theta_\alpha, 0). \end{aligned}$$

Так же как и в случае с $\beta(x, \varepsilon)$, нетрудно показать, что $\alpha(x, \varepsilon)$ непрерывна в $\overline{D}$, но является, вообще говоря, негладкой на кривой C_α , причем при достаточно малых ε

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial n_\alpha} \right)_\alpha^{(-)} \leq \left(\frac{\partial \alpha}{\partial n_\alpha} \right)_\alpha^{(+)}, \quad (24)$$

где $\partial/\partial n_\alpha$ – производная по направлению внутренней нормали к C_α , а символы $(\cdot)_\alpha^{(-)}$ и $(\cdot)_\alpha^{(+)}$ обозначают предельные значения на C_α из областей $D \setminus \overline{D}_\alpha$ и $\overline{D}_\alpha$ соответственно.

Кроме того, функция $\alpha(x, \varepsilon)$ построена таким образом, что выполнены неравенства

$$\varepsilon^2 \Delta \alpha - f(\alpha, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} f_u(\varphi_2(x), x, 0) + O(\varepsilon) > 0, \quad x \in \overline{D}_\alpha, \quad (25)$$

$$\varepsilon^2 \Delta \alpha - f(\alpha, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} f_u(\varphi_1(x), x, 0) + O(\varepsilon) > 0, \quad x \in \overline{D} \setminus \overline{D}_\alpha, \quad (26)$$

$$\alpha(x, \varepsilon) < g(x), \quad x \in \partial D. \quad (27)$$

Из (16)–(18), (21), (24)–(27) следует, что при достаточно малых ε в соответствии с терминологией, принятой в [5], [6], функции $\beta(x, \varepsilon)$ и $\alpha(x, \varepsilon)$ являются соответственно (негладкими) верхним и нижним решениями задачи (1), (2). Докажем, что при достаточно малых ε

$$\beta(x, \varepsilon) > \alpha(x, \varepsilon), \quad x \in \overline{D}. \quad (28)$$

Для этого покажем, что при достаточно малых ε выполнено неравенство

$$\beta(x, \varepsilon) > \varphi_1(x), \quad x \in \overline{D}. \quad (29)$$

В области $\overline{D \setminus D_\beta}$ неравенство (29) очевидно (см. (11)).

Рассмотрим область $H_1 = \{M(r_\beta, \theta_\beta) \in \overline{D}_\beta : 0 \leq r_\beta \leq r_1\}$, где $r_1 = \kappa \varepsilon |\ln \varepsilon|$, $\kappa > 0$ – число, которое выберем ниже. Так как $Q_{0\beta}(\tau_\beta, \theta_\beta)$ имеет оценку (14), то в области H_1 , т.е. при $0 \leq \tau_\beta \leq \kappa |\ln \varepsilon|$, имеем

$$Q_{0\beta}(\tau_\beta, \theta_\beta) \geq c_2 \varepsilon^{\kappa m_2}.$$

Выберем $\kappa > 0$ столь малым, что $p = \kappa m_2 < 1/2$. Тогда получим, что при достаточно малых ε в области H_1

$$\beta(x, \varepsilon) - \varphi_1(x) = \varepsilon^{1/2} + Q_{0\beta}(\tau_\beta, \theta_\beta) + \varepsilon^{1/2} Q_{1\beta}(\tau_\beta, \theta_\beta) \geq \varepsilon^{1/2} + c_2 \varepsilon^p - \varepsilon^{1/2} c > 0,$$

где $c > 0$ – постоянная из оценки (15).

Для завершения доказательства неравенства (29) остается рассмотреть область $H_2 = D_\beta \setminus H_1$. В этой области $\tau_\beta > \kappa |\ln \varepsilon|$, поэтому используя (15) и неотрицательность $Q_{0\beta}$, при достаточно малых ε получаем

$$\beta(x, \varepsilon) - \varphi_1(x) \geq \varepsilon^{1/2} - \varepsilon^{1/2} c \varepsilon^{\kappa m} > 0, \quad x \in H_2,$$

т.е. требуемое неравенство.

Аналогично (29) можно показать, что при достаточно малых ε

$$\alpha(x, \varepsilon) < \varphi_2(x), \quad x \in \overline{D}. \quad (30)$$

Теперь легко усмотреть, что в области $\overline{D}_\beta$ неравенство (28) непосредственное следствие (29) и (22), а в области $\overline{D \setminus D_\beta}$ – следствие (30) и (11). Итак, (28) доказано.

Так как при достаточно малых ε функции $\beta(x, \varepsilon)$ и $\alpha(x, \varepsilon)$ являются соответственно верхним и нижним решениями задачи (1), (2) и выполнено неравенство (28), то (согласно, например, теореме 1 из [5]; см. также теорему (1.1) в [7]) существует решение $u_s(x, \varepsilon)$ из $C^2(\overline{D})$ задачи (1), (2) такое, что

$$\alpha(x, \varepsilon) < u_s(x, \varepsilon) < \beta(x, \varepsilon), \quad x \in \overline{D}. \quad (31)$$

Зафиксируем произвольное $\eta > 0$.

Для завершения доказательства данной теоремы остается показать, что при достаточно малых ε выполнены неравенства (7)–(9).

В силу экспоненциальных оценок сверху Q -функций

$$\begin{aligned} \beta(x, \varepsilon) &= \varphi_1(x) + \varepsilon^{1/2} + O\left(\exp\left(-\frac{m_3}{\varepsilon}\right)\right), & x \in \overline{D}_1, \\ \alpha(x, \varepsilon) &= \varphi_2(x) - \varepsilon^{1/2} + O\left(\exp\left(-\frac{m_4}{\varepsilon}\right)\right), & x \in \overline{D}_2, \end{aligned} \quad (32)$$

где m_3 и m_4 – некоторые положительные постоянные, фиксированные при $\varepsilon \rightarrow 0$. Из (31), (32) при достаточно малых ε следуют (7) и (8).

Так как $Q_{0\beta}$ ($Q_{0\alpha}$) – монотонная функция по переменной τ_β (τ_α) и удовлетворяет условию (12) ((23)), можно утверждать, что при достаточно малых ε в $\overline{D}_\beta$ ($\overline{D}_\alpha$) выполнено неравенство $\beta(x, \varepsilon) < \varphi_2(x) + \eta$ (соответственно $\alpha(x, \varepsilon) > \varphi_1(x) - \eta$). Отсюда, а также из вида функций $\beta(x, \varepsilon)$ и $\alpha(x, \varepsilon)$ в $\overline{D} \setminus \overline{D}_\beta$ и $\overline{D} \setminus \overline{D}_\alpha$ соответственно следует, что при достаточно малых ε

$$\beta(x, \varepsilon) < \varphi_2(x) + \eta, \quad \alpha(x, \varepsilon) > \varphi_1(x) - \eta, \quad x \in \overline{D}.$$

Из последних неравенств и (31) получаем неравенства (9).

Теорема 1 доказана.

3. Пределный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$.

ЛЕММА 1. Пусть выполнены условия (A1)–(A4) и пусть v и V – круги с общим центром в некоторой точке $\bar{x}$ радиусов R_1 и R_2 соответственно, причем $R_1 < R_2$, такие, что $\overline{V} \subset D^{(+)}$ ($\overline{V} \subset D^{(-)}$),

$$J(x) > 0, \quad x \in \overline{V} \quad (J(x) < 0, \quad x \in \overline{V})$$

и, кроме того, $\forall \eta > 0$ при достаточно малых ε решение $u_s(x, \varepsilon)$ задачи (1), (2) из теоремы 1 удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} u_s(x, \varepsilon) &< \varphi_1(x) + \eta, & x \in \overline{v} \\ (u_s(x, \varepsilon) &> \varphi_2(x) - \eta, & x \in \overline{v}). \end{aligned} \quad (33)$$

Тогда $\forall \eta' > 0$ при достаточно малых ε выполняется неравенство

$$\begin{aligned} u_s(x, \varepsilon) &< \varphi_1(x) + \eta', & x \in \overline{V} \\ (u_s(x, \varepsilon) &> \varphi_2(x) - \eta', & x \in \overline{V}). \end{aligned} \quad (34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое утверждение данной леммы, т.е. утверждение, относящееся к неравенству (34). Второе утверждение (в скобках) доказывается аналогично.

Пусть число $a \in (0, R_1)$ таково, что для круга V_1 радиуса $R_2 + a$ с центром в точке $\bar{x}$ выполнены неравенства

$$\overline{V}_1 \subset D^{(+)}, \quad J(x) > 0, \quad x \in \overline{V}_1. \quad (35)$$

Введем полярную систему координат (ρ, σ) с полюсом в точке $\bar{x}$ и семейство окружностей Γ_γ , $\gamma \in [0, 1]$, задав его в координатах (ρ, σ) в виде

$$\rho = R_1 + \gamma(R_2 + a - R_1) \equiv \rho_\gamma.$$

Очевидно, что

$$\Gamma_\gamma \in \overline{V}_1 \setminus v, \quad \gamma \in [0, 1], \quad (36)$$

окружность Γ_0 совпадает с границей круга v , а окружность Γ_1 – с границей круга V_1 .

Через V_γ будем обозначать круг, ограниченный Γ_γ . Пусть

$$f(u, \rho, \sigma, \varepsilon) \equiv f(u, x(\rho, \sigma), \varepsilon), \quad \varphi_i(\rho, \sigma) \equiv \varphi_i(x(\rho, \sigma)), \quad i = 1, 2.$$

Построим функцию

$$\hat{\beta}(x, \gamma, \mu) = \varphi_1(x) + \mu + Q_0(\tau_\gamma, \sigma, \gamma) + \mu Q_1(\tau_\gamma, \sigma, \gamma), \quad x \in \overline{V}_\gamma, \quad \gamma \in [0, 1],$$

где $\mu > 0$ – число, которое уточним ниже,

$$\tau_\gamma = \frac{\rho_\gamma - \rho}{\varepsilon}.$$

Функция $Q_0(\tau_\gamma, \sigma, \gamma)$ является решением задачи (σ и γ играют роли параметров)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q_0}{\partial \tau_\gamma^2} &= f(\varphi_1(\rho_\gamma, \sigma) + Q_0, \rho_\gamma, \sigma, 0), \quad \tau_\gamma > 0, \\ Q_0(0, \sigma, \gamma) &= \varphi_2(\rho_\gamma, \sigma) - \varphi_1(\rho_\gamma, \sigma), \quad Q_0(+\infty, \sigma, \gamma) = 0. \end{aligned}$$

Так как в силу (35), (36) $J(x) > 0$ при $x \in \Gamma_\gamma$, $\gamma \in [0, 1]$, то Q_0 определяется однозначно, является положительной монотонно убывающей функцией τ_γ при $\tau_\gamma \geq 0$ и имеет экспоненциальные оценки по переменной τ_γ сверху и снизу, причем эти оценки равномерны по γ и σ .

Функцию $Q_1(\tau_\gamma, \sigma, \gamma)$ определим как решение задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q_1}{\partial \tau_\gamma^2} &= f_u(\tau_\gamma, \sigma, \gamma) Q_1 + f_1(\tau_\gamma, \sigma, \gamma), \quad \tau_\gamma > 0, \\ Q_1(0, \sigma, \gamma) &= 0, \quad Q_1(+\infty, \sigma, \gamma) = 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f_u(\tau_\gamma, \sigma, \gamma) &\equiv f_u(\varphi_1(\rho_\gamma, \sigma) + Q_0, \rho_\gamma, \sigma, 0), \\ f_1(\tau_\gamma, \sigma, \gamma) &\equiv [f_u(\tau_\gamma, \sigma, \gamma) - f_u(\varphi_1(\rho_\gamma, \sigma), \rho_\gamma, \sigma, 0)]. \end{aligned}$$

Функция Q_1 допускает явное представление и имеет равномерную по γ и σ экспоненциальную оценку сверху по переменной τ_γ .

Домножим функции Q_i , $i = 1, 2$, на срезающие функции так, чтобы

$$\hat{\beta}(x, 1, \mu) = \varphi_1(x) + \mu, \quad x \in \overline{V}, \quad (37)$$

и получившиеся в результате этой процедуры функции снова обозначим через Q_i , $i = 1, 2$.

По построению функция $\hat{\beta}(x, \gamma, \mu)$ удовлетворяет соотношению

$$\varepsilon^2 \Delta \hat{\beta} - f(\hat{\beta}, x, \varepsilon) = -\mu f_u(\varphi_1(x), x, 0) + O(\varepsilon) + O(\mu^2), \quad x \in \overline{V}_\gamma, \quad \gamma \in [0, 1], \quad (38)$$

(чтобы получить (38) в малой окрестности кривой Γ_γ следует перейти к координатам (ρ, σ) , см. также [1]). Из (38) следует, что существует постоянная $c_3 > 0$, не зависящая от ε , μ и γ , такая, что для любого достаточно малого μ при достаточно малых ε выполняется неравенство

$$\varepsilon^2 \Delta \hat{\beta} - f(\hat{\beta}, x, \varepsilon) < -c_3 \mu, \quad x \in \overline{V}_\gamma, \quad \gamma \in [0, 1]. \quad (39)$$

Используя положительность функции Q_0 и равномерные экспоненциальные оценки функций Q_i , нетрудно доказать, что для любого достаточно малого μ при достаточно малых ε имеет место неравенство

$$\hat{\beta}(x, \gamma, \mu) > \varphi_1(x) + \frac{\mu}{2}, \quad x \in \overline{V}_\gamma, \quad \gamma \in [0, 1]. \quad (40)$$

Отметим также очевидное равенство

$$\hat{\beta}(x, \gamma, \mu) = \varphi_2(x) + \mu, \quad x \in \Gamma_\gamma, \quad \gamma \in [0, 1]. \quad (41)$$

Из условия (33) и неравенств (9) следует, что для любого $\mu > 0$ при достаточно малых ε решение $u_s(x, \varepsilon)$ задачи (1), (2) из теоремы 1 удовлетворяет неравенствам

$$u_s(x, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \frac{\mu}{2}, \quad x \in \bar{v}, \quad (42)$$

$$u_s(x, \varepsilon) < \varphi_2(x) + \mu, \quad x \in \overline{D}. \quad (43)$$

Кроме того, так как функция $u_s(x, \varepsilon)$ не зависит от времени, она удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon^2 \Delta u_s - \frac{\partial u_s}{\partial t} = f(u_s, x, \varepsilon), \quad (x, t) \in D \times [0, +\infty). \quad (44)$$

Введем функцию

$$w(x, t, \mu, \varepsilon) = [\hat{\beta}(x, \gamma(t), \mu) - u_s(x, \varepsilon)] \exp(-At), \quad x \in \overline{V}_{\gamma(t)}, \quad t \in [0, T],$$

где $\gamma(t) = t/T$, а величины A и $T = T(\mu, \varepsilon)$ уточним ниже. Очевидно, что $0 \leq \gamma(t) \leq 1$ при $t \in [0, T]$, $\gamma(0) = 0$, $\gamma(T) = 1$.

Используя (39) и (44), нетрудно получить неравенство

$$\varepsilon^2 \Delta w - w_t - Bw < \left(-c_3 \mu - \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial \gamma} \cdot \frac{1}{T} \right) \exp(-At), \quad x \in \overline{V}_{\gamma(t)}, \quad t \in [0, T],$$

где

$$B = B(x, t, \varepsilon, \mu) = A + \int_0^1 f_u(u_s + (\hat{\beta} - u_s)p, x, \varepsilon) dp$$

и, следовательно, $B > 0$, если взять достаточно большое $A > 0$.

Из вида $\hat{\beta}(x, \gamma, \mu)$ следует, что $\partial \hat{\beta} / \partial \gamma$ имеет оценку

$$\left| \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial \gamma} \right| \leq \frac{c_4}{\varepsilon},$$

где постоянная $c_4 > 0$ не зависит от ε, γ , и μ (для ограниченного интервала изменения μ). Поэтому, если взять $T = T(\mu, \varepsilon)$ такое, что

$$T > \frac{c_4}{c_3 \mu \varepsilon},$$

то для любого достаточно малого μ при достаточно малых ε будет выполнено неравенство

$$\varepsilon^2 \Delta w - w_t - Bw < 0, \quad x \in \overline{V}_{\gamma(t)}, \quad t \in [0, T]. \quad (45)$$

Из (40) и (42) имеем

$$w(x, 0, \mu, \varepsilon) > 0, \quad x \in \overline{V}_{\gamma(0)} = \bar{v}, \quad (46)$$

а из (41) и (43) получаем

$$w(x, t, \mu, \varepsilon) > 0, \quad x \in \Gamma_{\gamma(t)}, \quad t \in [0, T]. \quad (47)$$

Из (45)–(47) очевидным образом следует, что

$$w(x, t, \mu, \varepsilon) > 0, \quad x \in \overline{V}_{\gamma(t)}, \quad t \in [0, T];$$

в частности, при $t = T$ имеем неравенство

$$w(x, T, \mu, \varepsilon) > 0, \quad x \in \overline{V}_{\gamma(T)} = \overline{V}_1,$$

откуда получаем

$$u_s(x, \varepsilon) < \hat{\beta}(x, \gamma(T), \mu) = \hat{\beta}(x, 1, \mu), \quad x \in \overline{V}_1. \quad (48)$$

Из (37) и (48) имеем

$$u_s(x, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \mu, \quad x \in \overline{V}. \quad (49)$$

Теперь по заданному $\eta' > 0$ зафиксируем такое $\mu < \eta'$, чтобы при достаточно малых ε выполнялось неравенство (49). Так как $\mu < \eta'$, наряду с (49) выполняется неравенство (34).

Лемма 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия (A1)–(A4). Тогда $\forall \eta > 0$ и $\forall$ замкнутого множества $\Omega^{(+)} \subset D^{(+)}$ (соответственно $\Omega^{(-)} \subset D^{(-)}$) при достаточно малых ε для решения $u_s(x, \varepsilon)$ задачи (1), (2) из теоремы 1 справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) - \eta < u_s(x, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \eta, & \quad x \in \Omega^{(+)} \\ (\varphi_2(x) - \eta < u_s(x, \varepsilon) < \varphi_2(x) + \eta, & \quad x \in \Omega^{(-)}). \end{aligned} \quad (50)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение, относящееся к неравенству (50). Второе утверждение (в скобках) доказывается аналогично.

Зафиксируем произвольные $\eta > 0$ и замкнутое множество $\Omega^{(+)} \subset D^{(+)}$.

Справедливость неравенства $u_s(x, \varepsilon) > \varphi_1(x) - \eta$ при $x \in \Omega^{(+)}$ следует из теоремы 1 (см. (9)).

Остается доказать, что при достаточно малых ε выполнено неравенство

$$u_s(x, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \eta, \quad x \in \Omega^{(+)}. \quad (51)$$

Воспользуемся тем, что $\forall r > 0 \exists N > 0$ и точки $x_1, \dots, x_N \in D^{(+)}$ такие, что

$$\Omega^{(+)} \subset \bigcup_{i=1}^N E_{x_i}^r, \quad (52)$$

где $E_{x_i}^r$ – круги радиусов r с центрами в точках x_i .

Обозначим через D'_1 ту подобласть области D_1 (см. (A3)), которая получается из D_1 после удаления точек, принадлежащих $3r$ -окрестности кривой C_1 . Будем считать r настолько малым, что: $D'_1 \neq \emptyset$, граница $\partial D'_1$ области D'_1 – гладкая замкнутая кривая без самопересечений,

$$J(x) > 0, \quad x \in D^{(+)} \setminus \overline{D}'_1, \quad (53)$$

и $\bigcup_{i=1}^N \overline{E}_{x_i}^r \subset D^{(+)}$.

Зафиксируем произвольное натуральное $k \in 1, \dots, N$ и покажем, что при достаточно малых ε

$$u_s(x, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \eta, \quad x \in \overline{E}_{x_k}^r. \quad (54)$$

Если $\overline{D}'_1 \cap \overline{E}_{x_k}^r \neq \emptyset$, то $\overline{E}_{x_k}^r \subset D_1$ и (54) следует из теоремы 1.

Пусть $\overline{D}'_1 \cap \overline{E}_{x_k}^r = \emptyset$.

В этом случае возьмем произвольную точку $P \subset D_1 \setminus \overline{D}'_1$ и соединим ее некоторой кривой L (например ломаной), лежащей в области $D^{(+)} \setminus \overline{D}'_1$ с точкой x_k . Пусть число $d > 0$ таково, что $2d$ -окрестность кривой L целиком принадлежит области $D^{(+)} \setminus \overline{D}'_1$. Отметим на кривой L точки $y_1, \dots, y_n$, $n \geq 2$, так, что $y_1 = P$, $y_n = x_k$ и расстояние между y_i и y_{i+1} при $i = 1, \dots, n-1$ не превосходит $d/2$.

Пусть $V_1, \dots, V_{n-1}$ – круги радиуса d с центрами в точках $y_1, \dots, y_{n-1}$. Через V_n обозначим круг $E_{x_k}^r$. Введем круги $v_1, \dots, v_n$ с центрами в точках $y_1, \dots, y_n$ и радиусами, меньшими, чем d и r , так, что

$$v_1 \subset \overline{D}_1, \quad (55)$$

$$\overline{v}_{i+1} \subset V_i, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (56)$$

Заметим, что в рассматриваемом случае $\overline{V}_n = \overline{E}_{x_k}^r \subset D^{(+)} \setminus \overline{D}'_1$. С другой стороны, при $i = 1, \dots, n-1$ $\overline{V}_i \subset D^{(+)} \setminus \overline{D}'_1$ в силу выбора d . Поэтому на основании (53) можно заключить, что при $i = 1, \dots, n$

$$J(x) > 0, \quad x \in \overline{V}_i. \quad (57)$$

Пусть при некотором $j \in 1, \dots, n-1 \quad \forall \nu > 0$ при достаточно малых ε выполнено неравенство

$$u_s(x, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \nu, \quad x \in \overline{V}_j, \quad (58)$$

а значит, в силу (56)

$$u_s(x, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \nu, \quad x \in \overline{v}_{j+1}. \quad (59)$$

Тогда, учитывая (57), на основании леммы 1 можно заключить, что $\forall \nu > 0$ при достаточно малых ε

$$u_s(x, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \nu, \quad x \in \overline{V}_{j+1}.$$

Поэтому, чтобы обосновать (54), т.е. (58) с $\nu = \eta$ и $j = n$, достаточно показать, что $\forall \nu > 0$ при достаточно малых ε выполнено неравенство (58) для $j = 1$, или, учитывая лемму 1 – неравенство (59) для $j = 0$. Справедливость неравенства (59) для $j = 0$, в свою очередь, следует из теоремы 1 в силу (55).

Итак, при достаточно малых ε выполнено неравенство (54).

Так как число N кругов $E_{x_i}^r$ конечно, а число $k \in 1, \dots, N$ в (54) произвольно, на основании (54) можно заключить, что при достаточно малых ε

$$u_s(x, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \eta, \quad x \in \bigcup_{i=1}^N \overline{E}_{x_i}^r. \quad (60)$$

Из (60), (52) следует (51).

Теорема 2 доказана.

4. Основной результат. Сформулируем основной результат данной работы, непосредственно вытекающий из теоремы 2.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия (A1)–(A4). Тогда при достаточно малых ε существует решение $u_s(x, \varepsilon)$ из $C^2(\overline{D})$ задачи (1), (2), удовлетворяющее соотношению (5), причем предельный переход в (5) равномерен на замкнутых множествах из $D^{(+)}$ и $D^{(-)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теорема 3 остается в силе, если краевое условие (2) первого рода заменить на краевое условие второго рода

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial D} = g(x),$$

где $\partial/\partial n$ – производная по направлению внешней нормали к ∂D . В этом случае неравенство (4) в условии (A4) не требуется, а изменится только доказательство теоремы 1: при построении $\beta(x, \varepsilon)$ и $\alpha(x, \varepsilon)$ (см. (11), (22)) нужно добавить погранслойные функции порядка ε , существенные только вблизи ∂D и обеспечивающие выполнение неравенств

$$\left. \frac{\partial \beta}{\partial n} \right|_{\partial D} \geq g(x), \quad \left. \frac{\partial \alpha}{\partial n} \right|_{\partial D} \leq g(x).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теорема 3 остается в силе, если вместо (A3) выполнено следующее требование:

(A3') существует подобласть D' области D , в которой выполнено условие (A3) с D' вместо D .

При этом вопрос о поведении решения, удовлетворяющего соотношению (5), в области $D \setminus D'$ остается открытым.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если имеется несколько кривых Γ , удовлетворяющих требованию (A3') для различных подобластей D' , то метод, представленный в работе, позволяет установить существование решения задачи (1), (2), имеющего несколько переходных слоев.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н. Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах // Фундамент. и прикл. матем. 1998. Т. 4. №3. С. 799–851.
- [2] Файф П., Гринли В. Внутренние переходные слои для эллиптических краевых задач с малым параметром // УМН. 1974. Т. 29. №4. С. 103–131.
- [3] del Pino М. А. Layers with nonsmooth interface in a semilinear elliptic problem // Comm. Partial Differential Equations. 1992. V. 17. №9. P. 1695–1708.
- [4] Fife P. C. Semilinear elliptic boundary value problems with small parameters // Arch. Rat. Mech. Anal. 1973. V. 52. №4. P. 205–232.
- [5] Бутузов В. Ф., Неделько И. В. Асимптотическая устойчивость решений сингулярно возмущенных задач с пограничными и внутренними слоями // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. №2. С. 198–208.
- [6] Нефедов Н. Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. №7. С. 1132–1139.
- [7] Неделько И. В. Асимптотическая устойчивость и локальная единственность решений двумерных сингулярно возмущенных задач с пограничными и внутренними слоями. Дисс. ... к.ф.-м.н. М.: МГУ, 1999.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: butuzov@mt384.phys.msu.su

Поступило
21.05.2001
Исправленный вариант
26.03.2004