Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. К. Потапов, Б. В. Симонов, С. Ю. Тихонов, Преобразование рядов Фурье с помощью степенных и слабо колеблющихся последовательностей, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 1, 99–116

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2473>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 13:10:42

УДК 517.5

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РЯДОВ ФУРЬЕ С ПОМОЩЬЮ СТЕПЕННЫХ И СЛАБО КОЛЕБЛЮЩИХСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

М. К. Потапов, Б. В. Симонов, С. Ю. Тихонов

В данной работе рассматриваются преобразования рядов Фурье функций многих переменных с помощью произведения степенных и слабо колеблющихся последовательностей. Получены оценки смешанных модулей гладкости преобразованных рядов Фурье через смешанные модули гладкости самих функций.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. Пусть L_p^0 , $1 < p < \infty$, – пространство всех измеримых функций двух переменных $f = f(x_1, x_2)$, 2π -периодических по каждой переменной, для которых

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x_1, x_2)|^p dx_1 dx_2 \right)^{1/p} < \infty,$$

$$\int_0^{2\pi} f(x_1, x_2) dx_1 = 0 \quad \text{для почти всех } x_2,$$

$$\int_0^{2\pi} f(x_1, x_2) dx_2 = 0 \quad \text{для почти всех } x_1;$$

$\omega_{\beta_1, \beta_2}(f, \delta_1, \delta_2)_p$ – смешанный модуль гладкости функции f (в метрике L_p) порядков β_1 и β_2 ($\beta_1, \beta_2 > 0$) соответственно по переменным x_1 и x_2 , т.е.

$$\omega_{\beta_1, \beta_2}(f, \delta_1, \delta_2)_p = \sup_{|h_1| \leq \delta_1, |h_2| \leq \delta_2} \|\Delta_{h_1}^{\beta_1}(\Delta_{h_2}^{\beta_2} f)\|_p,$$

где

$$\Delta_{h_1}^{\beta_1} f(x_1, x_2) = \sum_{\nu_1=0}^{\infty} (-1)^{\nu_1} \binom{\beta_1}{\nu_1} f(x_1 + (\beta_1 - \nu_1)h_1, x_2),$$

$$\Delta_{h_2}^{\beta_2} f(x_1, x_2) = \sum_{\nu_2=0}^{\infty} (-1)^{\nu_2} \binom{\beta_2}{\nu_2} f(x_1, x_2 + (\beta_2 - \nu_2)h_2),$$

$$\binom{\beta_i}{\nu_i} = \frac{\beta_i(\beta_i - 1) \cdots (\beta_i - \nu_i + 1)}{\nu_i!} \quad \text{для } \nu_i \geq 1, \quad \binom{\beta_i}{0} = 1, \quad i = 1, 2.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 03-01-00080 и № 03-01-06155, и программы поддержки ведущих научных школ, грант № НШ-1657.2003.1.

Ряд Фурье функции $f \in L_p^0$ может быть записан в виде

$$\begin{aligned} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} (a_{n_1 n_2}^{(1)} \cos n_1 x_1 \cos n_2 x_2 + a_{n_1 n_2}^{(2)} \sin n_1 x_1 \cos n_2 x_2 \\ + a_{n_1 n_2}^{(3)} \cos n_1 x_1 \sin n_2 x_2 + a_{n_1 n_2}^{(4)} \sin n_1 x_1 \sin n_2 x_2) \equiv \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} A_{n_1 n_2}(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (1)$$

Пусть дана последовательность чисел $\lambda = \{\lambda_{n_1 n_2}\}_{n_1, n_2 \in \mathbb{N}}$. Преобразованным рядом Фурье для ряда (1) назовем ряд

$$\sigma(\lambda, f) = \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \lambda_{n_1 n_2} A_{n_1 n_2}(x_1, x_2). \quad (2)$$

Если последовательность λ степенного типа: $\lambda_{n_1 n_2} = n_1^{\sigma_1} n_2^{\sigma_2}$, где $\sigma_i > 0$ для $i = 1, 2$, то ряд (2) можно считать (см. [1]) рядом Фурье смешанной производной $f^{(\sigma_1, \sigma_2)}$ функции $f \in L_p^0$.

Пусть даны положительные числа $r_1, r_2, \beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_2$. В работе [2] получены оценки смешанного модуля гладкости порядков β_1 и β_2 производной $f^{(\sigma_1, \sigma_2)}$ через смешанный модуль гладкости порядков $r_1 + \beta_1$ и $r_2 + \beta_2$ функции f в следующих двух случаях:

I. $\sigma_1 = r_1, \sigma_2 = r_2$;

II. $\sigma_1 = r_1 - \alpha_1, \sigma_2 = r_2 - \alpha_2$.

Там же было показано, что в случае

III. $\sigma_1 = r_1 + \alpha_1, \sigma_2 = r_2 + \alpha_2$

уже невозможно получить аналогичные двусторонние оценки смешанного модуля гладкости, но получены двусторонние оценки интегральных средних смешанного модуля гладкости.

Возникает вопрос, как изменятся оценки типов II и III, если вместо последовательностей степенного порядка $\lambda_{n_1 n_2} = n_1^{r_1 \mp \alpha_1} n_2^{r_2 \mp \alpha_2}$ рассмотреть последовательности степенного и логарифмического порядка:

$$\text{IV. } \lambda_{n_1 n_2} = \frac{n_1^{r_1}}{\ln_{k_1}^{A_1}(d_{k_1} n_1)} \frac{n_2^{r_2}}{\ln_{k_2}^{A_2}(d_{k_2} n_2)};$$

$$\text{V. } \lambda_{n_1 n_2} = n_1^{r_1} \ln_{k_1}^{A_1}(d_{k_1} n_1) n_2^{r_2} \ln_{k_2}^{A_2}(d_{k_2} n_2).$$

Здесь $A_j > 0, k_j \in \mathbb{N}$ и $\ln_1 u = \ln u, \ln_i u = \ln(\ln_{i-1} u), i = 2, 3, \dots, k_j$, а константы d_{k_j} удовлетворяют условиям $\ln_{k_j} d_{k_j} > 1, j = 1, 2$.

В работе [3] дан ответ на этот вопрос для случая IV. В данной работе получен ответ для случая V. Он выглядит следующим образом.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть числа $p, \tau, \theta, \beta, r$ таковы, что $1 < p < \infty, 0 < \theta \leq \min(2, p), \max(2, p) \leq \tau < \infty, \beta_j, r_j, A_j > 0, k_j \in \mathbb{N}, j = 1, 2$, и при этом константы d_s удовлетворяют условиям $\ln_s d_s > 1, s = 1, \dots, \max(k_1, k_2)$.

а) Если для функции $f \in L_p^0$ выполнено условие

$$\begin{aligned} J(f, \theta, p) := \left(\int_0^1 \int_0^1 t_1^{-r_1 \theta - 1} t_2^{-r_2 \theta - 1} \ln_{k_1}^{A_1} \left(\frac{d_{k_1}}{t_1} \right) \ln_{k_2}^{A_2} \left(\frac{d_{k_2}}{t_2} \right) \right. \\ \left. \times \omega_{r_1 + \beta_1, r_2 + \beta_2}^\theta(f, t_1, t_2)_p dt_1 dt_2 \right)^{1/\theta} < \infty, \end{aligned}$$

то существует функция $\varphi \in L_p^0$, имеющая ряд Фурье $\sigma(\lambda, f)$, где

$$\lambda = \{\lambda_{n_1 n_2} = n_1^{r_1} n_2^{r_2} \ln_{k_1}^{A_1}(d_{k_1} n_1) \ln_{k_2}^{A_2}(d_{k_2} n_2)\},$$

причем $\|\varphi\|_p \leq C_1 J(f, \theta, p)$ и для любых $\delta_1, \delta_2 \in (0, 1/2]$ справедливо неравенство $D(\varphi, \delta_1, \delta_2, \tau, p) \leq C_2 H(f, \delta_1, \delta_2, \theta, p)$, где

$$\begin{aligned} D(\varphi, \delta_1, \delta_2, \tau, p) := & \left\{ \delta_1^{\beta_1 \tau} \ln_{k_1}^{A_1} \left(\frac{d_{k_1}}{\delta_1} \right) \int_{\delta_1}^1 \frac{t_1^{-\beta_1 \tau - 1}}{\prod_{i=1}^{k_1} \ln_i \frac{d_i}{t_1} \ln_{k_1}^{A_1 \tau} \frac{d_{k_1}}{t_1}} \omega_{\beta_1 \beta_2}^\tau(\varphi, t_1, \delta_2)_p dt_1 \right. \\ & + \delta_2^{\beta_2 \tau} \ln_{k_2}^{A_2} \left(\frac{d_{k_2}}{\delta_2} \right) \int_{\delta_2}^1 \frac{t_2^{-\beta_2 \tau - 1}}{\prod_{i=1}^{k_2} \ln_i \frac{d_i}{t_2} \ln_{k_2}^{A_2 \tau} \frac{d_{k_2}}{t_2}} \omega_{\beta_1 \beta_2}^\tau(\varphi, \delta_1, t_2)_p dt_2 + \omega_{\beta_1 \beta_2}^\tau(\varphi, \delta_1, \delta_2)_p \\ & + \delta_1^{\beta_1 \tau} \delta_2^{\beta_2 \tau} \ln_{k_1}^{A_1} \left(\frac{d_{k_1}}{\delta_1} \right) \ln_{k_2}^{A_2} \left(\frac{d_{k_2}}{\delta_2} \right) \\ & \times \left. \int_{\delta_1}^1 \int_{\delta_2}^1 \frac{t_1^{-\beta_1 \tau - 1} t_2^{-\beta_2 \tau - 1}}{\prod_{i=1}^{k_1} \ln_i \frac{d_i}{t_1} \ln_{k_1}^{A_1 \tau} \frac{d_{k_1}}{t_1} \prod_{i=1}^{k_2} \ln_i \frac{d_i}{t_2} \ln_{k_2}^{A_2 \tau} \frac{d_{k_2}}{t_2}} \omega_{\beta_1 \beta_2}^\tau(\varphi, t_1, t_2)_p dt_1 dt_2 \right\}^{1/\tau}, \\ H(f, \delta_1, \delta_2, \theta, p) := & \left\{ \int_0^{\delta_1} \int_0^{\delta_2} t_1^{-r_1 \theta - 1} t_2^{-r_2 \theta - 1} \ln_{k_1}^{A_1} \left(\frac{d_{k_1}}{t_1} \right) \ln_{k_2}^{A_2} \left(\frac{d_{k_2}}{t_2} \right) \right. \\ & \times \left. \omega_{r_1 + \beta_1, r_2 + \beta_2}^\theta(f, t_1, t_2)_p dt_1 dt_2 \right\}^{1/\theta} \end{aligned}$$

и константы C_1 и C_2 не зависят от f, δ_1, δ_2 .

б) Если для функции $f \in L_p^0$ существует функция $\varphi \in L_p^0$ с рядом Фурье $\sigma(\lambda, f)$, где $\lambda = \{\lambda_{n_1 n_2} = n_1^{r_1} n_2^{r_2} \ln_{k_1}^{A_1}(d_{k_1} n_1) \ln_{k_2}^{A_2}(d_{k_2} n_2)\}$, то $J(f, \tau, p) \leq C_3 \|\varphi\|_p$ и для любых $\delta_1, \delta_2 \in (0, 1/2]$ справедливо неравенство $H(f, \delta_1, \delta_2, \tau, p) \leq C_4 D(\varphi, \delta_1, \delta_2, \theta, p)$, где константы C_3 и C_4 не зависят от f, δ_1, δ_2 .

Это утверждение следует из доказанной ниже теоремы 1.

2. Определения и обозначения. Пусть функция $f(x_1, x_2) \in L_p^0$ имеет ряд Фурье (1). Обозначим $b_{n_1 n_2} := a_{n_1 n_2}^{(1)} + a_{n_1 n_2}^{(2)} + a_{n_1 n_2}^{(3)} + a_{n_1 n_2}^{(4)}$, $n_1, n_2 = 1, 2, \dots$,

$$\Delta_{m_1 m_2} := \sum_{n_1=[2^{m_1-2}]+1}^{2^{m_1-1}} \sum_{n_2=[2^{m_2-2}]+1}^{2^{m_2-1}} A_{n_1 n_2}(x_1, x_2), \quad m_1, m_2 = 1, 2, \dots,$$

где $[2^{m_i-2}] = 0$ для $m_i = 1$ и $[2^{m_i-2}] = 2^{m_i-2}$ для $m_i = 2, 3, \dots, i = 1, 2$.

Пусть QM – класс функций $f \in L_p^0$, коэффициенты Фурье которых неотрицательны и удовлетворяют условиям: существуют неотрицательные числа γ_1 и γ_2 такие, что ($i = 1, 2, 3, 4, n_1, n_2 = 1, 2, \dots$)

$$\begin{aligned} \Delta_{\gamma_1}^{(1,0)}(a_{n_1 n_2}^{(i)}) &= a_{n_1 n_2}^{(i)} n_1^{-\gamma_1} - a_{n_1+1, n_2}^{(i)} (n_1 + 1)^{-\gamma_1} \geq 0, \\ \Delta_{\gamma_2}^{(0,1)}(a_{n_1 n_2}^{(i)}) &= a_{n_1 n_2}^{(i)} n_2^{-\gamma_2} - a_{n_1, n_2+1}^{(i)} (n_2 + 1)^{-\gamma_2} \geq 0, \\ \Delta_{\gamma_1 \gamma_2}^{(1,1)}(a_{n_1 n_2}^{(i)}) &= \Delta_{\gamma_2}^{(0,1)}(\Delta_{\gamma_1}^{(1,0)}(a_{n_1 n_2}^{(i)})) \geq 0; \end{aligned}$$

$\mathcal{L}$ – класс функций $f \in L_p^0$, коэффициенты Фурье которых неотрицательны и равны нулю, если $n_1 \neq 2^{m_1}$ или если $n_2 \neq 2^{m_2}$, $m_1, m_2 = 0, 1, 2, \dots$.

Если $F(f, \delta_1, \delta_2, s, \mu, \dots) \geq 0$ и $G(f, \delta_1, \delta_2, s, \mu, \dots) \geq 0$, то запись

$$F(f, \delta_1, \delta_2, s, \mu, \dots) \ll G(f, \delta_1, \delta_2, s, \mu, \dots)$$

будет означать, что существует такая постоянная C , не зависящая от f, δ_1, δ_2 и такая, что $F(f, \delta_1, \delta_2, s, \mu, \dots) \leq CG(f, \delta_1, \delta_2, s, \mu, \dots)$. Если одновременно

$$F(f, \delta_1, \delta_2, s, \mu, \dots) \ll G(f, \delta_1, \delta_2, s, \mu, \dots)$$

и

$$G(f, \delta_1, \delta_2, s, \mu, \dots) \ll F(f, \delta_1, \delta_2, s, \mu, \dots),$$

то будем писать

$$G(f, \delta_1, \delta_2, s, \mu, \dots) \asymp F(f, \delta_1, \delta_2, s, \mu, \dots).$$

Функцию $\xi(t)$ будем называть *слабо колеблющейся*, если она измерима на $[D; +\infty)$, $D > 0$, положительна и для любого $\varkappa > 0$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\xi(\varkappa t)}{\xi(t)} = 1.$$

Будем говорить (см. [4]), что слабо колеблющаяся функция $\mu(t)$ *удовлетворяет условию* (Sl_s) и обозначать $\mu(t) \in Sl_s$, если выполнено условие

$$\int_0^1 \left[\mu\left(\frac{1}{t}\right) \right]^{-s} \frac{dt}{t} < \infty.$$

Если $\mu(t)$ удовлетворяет условию (Sl_s), то для сокращения записи будем обозначать

$$\gamma\left(\frac{1}{\delta}\right) := \left(\int_0^\delta \left[\mu\left(\frac{1}{t}\right) \right]^{-s} \frac{dt}{t} \right)^{-1/s}. \quad (3)$$

ПРИМЕР 1. Функция

$$\mu(t) = \left(\prod_{i=1}^k \ln_i d_i t \right)^{1/s} \ln_k^A d_k t, \quad t \in [1; +\infty),$$

где $A, s > 0$, а константы d_i удовлетворяют условиям $\ln_i d_i > 1$, $i = 1, \dots, k$, является слабо колеблющейся, $\mu(t) \in Sl_s$, причем $\gamma(t) \asymp \ln_k^A(d_k t)$, т.е. последовательность $\gamma(n)$ эквивалентна логарифмической последовательности в случае V.

Таким образом, преобразование рядов Фурье для случая V является частным случаем преобразований с помощью более общих последовательностей

$$\lambda_{n_1 n_2} = n_1^{r_1} \xi(n_1) n_2^{r_2} \xi(n_2), \quad (4)$$

где $\xi(t)$ – возрастающая слабо колеблющаяся функция, и в дальнейшем мы будем рассматривать именно последовательности (4).

3. Основные теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $1 < p < \infty$, $0 < \theta \leq \min(2, p)$, $\max(2, p) \leq \tau < \infty$, $\beta_i, r_i > 0$ и функции $\mu_i(t)$ слабо колеблющиеся, $i = 1, 2$.

а) Если $\mu_1(t_1), \mu_2(t_2) \in Sl_\theta$ и для функции $f \in L_p^0$ выполнено условие

$$I(f, \theta, p) := \left(\int_0^1 \int_0^1 t_1^{-r_1\theta-1} t_2^{-r_2\theta-1} \gamma_1^\theta \left(\frac{1}{t_1} \right) \gamma_2^\theta \left(\frac{1}{t_2} \right) \times \omega_{r_1+\beta_1, r_2+\beta_2}^\theta(f, t_1, t_2)_p dt_1 dt_2 \right)^{1/\theta} < \infty,$$

то существует функция $\varphi \in L_p^0$, имеющая ряд Фурье $\sigma(\lambda, f)$, где $\lambda = \{\lambda_{n_1 n_2} = n_1^{r_1} n_2^{r_2} \gamma_1(n_1) \gamma_2(n_2)\}$, причем $\|\varphi\|_p \ll I(f, \theta, p)$ и для любых $\delta_1, \delta_2 \in (0, 1/2]$ справедливо неравенство $A(\varphi, \delta_1, \delta_2, \tau, p) \ll B(f, \delta_1, \delta_2, \theta, p)$, где

$$\begin{aligned} A(\varphi, \delta_1, \delta_2, \tau, p) &:= \left\{ \delta_1^{\beta_1\tau} \delta_2^{\beta_2\tau} \gamma_1^\tau \left(\frac{1}{\delta_1} \right) \gamma_2^\tau \left(\frac{1}{\delta_2} \right) \int_{\delta_1}^1 \int_{\delta_2}^1 \frac{t_1^{-\beta_1\tau-1}}{\mu_1^\tau(\frac{1}{t_1})} \frac{t_2^{-\beta_2\tau-1}}{\mu_2^\tau(\frac{1}{t_2})} \right. \\ &\quad \times \omega_{\beta_1\beta_2}^\tau(\varphi, t_1, t_2)_p dt_1 dt_2 \\ &\quad + \delta_1^{\beta_1\tau} \gamma_1^\tau \left(\frac{1}{\delta_1} \right) \int_{\delta_1}^1 \frac{t_1^{-\beta_1\tau-1}}{\mu_1^\tau(\frac{1}{t_1})} \omega_{\beta_1\beta_2}^\tau(\varphi, t_1, \delta_2)_p dt_1 \\ &\quad \left. + \delta_2^{\beta_2\tau} \gamma_2^\tau \left(\frac{1}{\delta_2} \right) \int_{\delta_2}^1 \frac{t_2^{-\beta_2\tau-1}}{\mu_2^\tau(\frac{1}{t_2})} \omega_{\beta_1\beta_2}^\tau(\varphi, \delta_1, t_2)_p dt_2 + \omega_{\beta_1\beta_2}^\tau(\varphi, \delta_1, \delta_2)_p \right\}^{1/\tau}, \quad (5) \\ B(f, \delta_1, \delta_2, \theta, p) &:= \left\{ \int_0^{\delta_1} \int_0^{\delta_2} t_1^{-r_1\theta-1} t_2^{-r_2\theta-1} \gamma_1^\theta \left(\frac{1}{t_1} \right) \gamma_2^\theta \left(\frac{1}{t_2} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \omega_{r_1+\beta_1, r_2+\beta_2}^\theta(f, t_1, t_2)_p dt_1 dt_2 \right\}^{1/\theta}. \end{aligned}$$

б) Если $\mu_1(t_1), \mu_2(t_2) \in Sl_\tau$ и для функции $f \in L_p^0$ существует функция $\varphi \in L_p^0$ с рядом Фурье $\sigma(\lambda, f)$, где $\lambda = \{\lambda_{n_1 n_2} = n_1^{r_1} n_2^{r_2} \gamma_1(n_1) \gamma_2(n_2)\}$, то $I(f, \tau, p) \ll \|\varphi\|_p$ и для любых $\delta_1, \delta_2 \in (0, 1/2]$ справедливо неравенство $B(f, \delta_1, \delta_2, \tau, p) \ll A(\varphi, \delta_1, \delta_2, \theta, p)$.

ТЕОРЕМА 2. Если $f \in QM$, то утверждения теоремы 1 справедливы при замене условий $0 < \theta \leq \min(2, p)$ и $\max(2, p) \leq \tau < \infty$ на условия $0 < \theta \leq p$ и $p \leq \tau < \infty$.

ТЕОРЕМА 3. Если $f \in \mathcal{L}$, то утверждения теоремы 1 справедливы при замене условий $0 < \theta \leq \min(2, p)$ и $\max(2, p) \leq \tau < \infty$ на условия $0 < \theta \leq 2$ и $2 \leq \tau < \infty$.

СЛЕДСТВИЯ. Пусть $1 < p < \infty$, $0 < \theta \leq \min(2, p)$, $\max(2, p) \leq \tau < \infty$, $\beta_i, r_i > 0$ и функции $\mu_i(t)$ слабо колеблющиеся, $i = 1, 2$.

а) Если $\mu_1(t_1), \mu_2(t_2) \in Sl_2$ и функция $f \in L_2^0$, то для существования функции $\varphi \in L_2^0$ с рядом Фурье $\sigma(\lambda, f)$, где $\lambda = \{\lambda_{n_1 n_2} = n_1^{r_1} n_2^{r_2} \gamma_1(n_1) \gamma_2(n_2)\}$, необходимо и достаточно, чтобы $I(f, 2, 2) < \infty$, причем для любых $\delta_1, \delta_2 \in (0, 1/2]$ справедливо соотношение $B(f, \delta_1, \delta_2, 2, 2) \asymp A(\varphi, \delta_1, \delta_2, 2, 2)$.

б) Если $\mu_1(t_1), \mu_2(t_2) \in Sl_p$ и функция $f \in L_p^0 \cap QM$, то для существования функции $\varphi \in L_p^0$ с рядом Фурье $\sigma(\lambda, f)$, где $\lambda = \{\lambda_{n_1 n_2} = n_1^{r_1} n_2^{r_2} \gamma_1(n_1) \gamma_2(n_2)\}$,

необходимо и достаточно, чтобы $I(f, p, p) < \infty$, причем для любых $\delta_1, \delta_2 \in (0, 1/2]$ справедливо соотношение $B(f, \delta_1, \delta_2, p, p) \asymp A(\varphi, \delta_1, \delta_2, p, p)$.

с) Если $\mu_1(t_1), \mu_2(t_2) \in Sl_2$ и функция $f \in L_p^0 \cap \mathcal{L}$, то для существования функции $\varphi \in L_p^0$ с рядом Фурье $\sigma(\lambda, f)$, где $\lambda = \{\lambda_{n_1 n_2} = n_1^{r_1} n_2^{r_2} \gamma_1(n_1) \gamma_2(n_2)\}$, необходимо и достаточно, чтобы $I(f, 2, p) < \infty$, причем для любых $\delta_1, \delta_2 \in (0, 1/2]$ справедливо соотношение $B(f, \delta_1, \delta_2, 2, p) \asymp A(\varphi, \delta_1, \delta_2, 2, p)$.

4. Вспомогательные результаты.

ЛЕММА 1 (см. [5]). Пусть $1 < p < \infty$, $0 < \theta \leq \min(2, p)$, $\max(2, p) \leq \tau < \infty$, $\beta_i, r_i > 0$, $i = 1, 2$.

а) Если для функции $f \in L_p^0$ выполнено условие $I(f, \theta, p) < \infty$, то существует функция $\psi \in L_p^0$, имеющая ряд Фурье $\sigma(\lambda, f)$, где $\lambda = \{\lambda_{n_1 n_2} = n_1^{r_1} n_2^{r_2} \gamma_1(n_1) \gamma_2(n_2)\}$, причем $\|\psi\|_p \ll I(f, \theta, p)$.

б) Если для функции $f \in L_p^0$ существует функция $\psi \in L_p^0$ с рядом Фурье $\sigma(\lambda, f)$, где $\lambda = \{\lambda_{n_1 n_2} = n_1^{r_1} n_2^{r_2} \gamma_1(n_1) \gamma_2(n_2)\}$, то $I(f, \tau, p) \ll \|\psi\|_p$.

ЛЕММА 2 (см. [6]). Пусть функция $f \in L_p^0$, $1 < p < \infty$, и имеет ряд Фурье (1). Тогда

$$\|f\|_p \asymp \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\langle \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} \Delta_{m_1 m_2}^2 \right\rangle^{p/2} dx_1 dx_2 \right)^{1/p}.$$

ЛЕММА 3 (см. [6]). Пусть функция $f \in L_p^0$, $1 < p < \infty$, и имеет ряд Фурье (1), а последовательность $\lambda = \{\lambda_{n_1 n_2}\}$ такова, что $|\lambda_{n_1 n_2}| \leq M$ и

$$\begin{aligned} \sum_{m_1=2^{n_1-1}}^{2^{n_1}-1} |\lambda_{m_1 n_2} - \lambda_{m_1+1, n_2}| &\leq M, & \sum_{m_2=2^{n_2-1}}^{2^{n_2}-1} |\lambda_{n_1 m_2} - \lambda_{n_1, m_2+1}| &\leq M, \\ \sum_{m_1=2^{n_1-1}}^{2^{n_1}-1} \sum_{m_2=2^{n_2-1}}^{2^{n_2}-1} |\lambda_{m_1 m_2} - \lambda_{m_1+1, m_2} - \lambda_{m_1, m_2+1} + \lambda_{m_1+1, m_2+1}| &\leq M, \\ n_1, n_2 &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Тогда ряд $\sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \lambda_{n_1 n_2} A_{n_1 n_2}(x_1, x_2)$ есть ряд Фурье функции $\varphi(x) \in L_p^0$, причем $\|\varphi\|_p \leq C \|f\|_p$, где $C = C(p, M)$.

ЛЕММА 4 (см. [2]). Пусть функция $f \in L_p^0$, $1 < p < \infty$, и имеет ряд Фурье (1).

а) Выполнено

$$\begin{aligned} \omega_{\beta_1 \beta_2} \left(f, \frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2} \right)_p &\asymp \left\| \sum_{n_1=m_1+1}^{\infty} \sum_{n_2=m_2+1}^{\infty} A_{n_1 n_2}(x_1, x_2) \right\|_p \\ &+ m_2^{-\beta_2} \left\| \sum_{n_1=m_1+1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{m_2} n_2^{\beta_2} A_{n_1 n_2}(x_1, x_2) \right\|_p \\ &+ m_1^{-\beta_1} \left\| \sum_{n_1=1}^{m_1} \sum_{n_2=m_2+1}^{\infty} n_1^{\beta_1} A_{n_1 n_2}(x_1, x_2) \right\|_p \\ &+ m_1^{-\beta_1} m_2^{-\beta_2} \left\| \sum_{n_1=1}^{m_1} \sum_{n_2=1}^{m_2} n_1^{\beta_1} n_2^{\beta_2} A_{n_1 n_2}(x_1, x_2) \right\|_p. \end{aligned}$$

б) Если $f \in QM$, то

$$\omega_{\beta_1\beta_2}\left(f, \frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2}\right)_p \asymp \left[\sum_{n_1=m_1+1}^{\infty} \sum_{n_2=m_2+1}^{\infty} b_{n_1 n_2}^p n_1^{p-2} n_2^{p-2} \right. \\ + m_2^{-\beta_2 p} \sum_{n_1=m_1+1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{m_2} b_{n_1 n_2}^p n_1^{p-2} n_2^{\beta_2 p + p - 2} \\ + m_1^{-\beta_1 p} \sum_{n_1=1}^{m_1} \sum_{n_2=m_2+1}^{\infty} b_{n_1 n_2}^p n_1^{\beta_1 p + p - 2} n_2^{p-2} \\ \left. + m_1^{-\beta_1 p} m_2^{-\beta_2 p} \sum_{n_1=1}^{m_1} \sum_{n_2=1}^{m_2} b_{n_1 n_2}^p n_1^{\beta_1 p + p - 2} n_2^{\beta_2 p + p - 2} \right]^{1/p}.$$

с) Если $f \in \mathcal{L}$, то

$$\omega_{\beta_1\beta_2}(f, 2^{-m_1}, 2^{-m_2})_p \asymp \left[\sum_{n_1=m_1+1}^{\infty} \sum_{n_2=m_2+1}^{\infty} b_{2^{n_1} 2^{n_2}}^2 \right. \\ + 2^{-2m_2\beta_2} \sum_{n_1=m_1+1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{m_2} 2^{2n_2\beta_2} b_{2^{n_1} 2^{n_2}}^2 \\ + 2^{-2m_1\beta_1} \sum_{n_1=0}^{m_1} \sum_{n_2=m_2+1}^{\infty} 2^{2n_1\beta_1} b_{2^{n_1} 2^{n_2}}^2 \\ \left. + 2^{-2(m_1\beta_1+m_2\beta_2)} \sum_{n_1=0}^{m_1} \sum_{n_2=0}^{m_2} 2^{2(n_1\beta_1+n_2\beta_2)} b_{2^{n_1} 2^{n_2}}^2 \right]^{1/2}.$$

ЛЕММА 5 (см. [6]). Пусть $p \in [1, \infty)$ и пусть функция $f(u, v)$ определена на измеримом множестве $E = E_1 \times E_2 \subset \mathbb{R}_n$, где $x = (u, v)$, $u = (x_1, \dots, x_m)$, $v = (x_{m+1}, \dots, x_n)$. Тогда

$$\left\{ \int_{E_1} \left| \int_{E_2} f(u, v) dv \right|^p du \right\}^{1/p} \leq \int_{E_2} \left\{ \int_{E_1} |f(u, v)|^p du \right\}^{1/p} dv$$

для тех f , для которых правая часть конечна.

ЛЕММА 6 (см. [7]). Пусть положительная функция $\xi(t)$ слабо колеблющаяся. Тогда

- (1) для любого фиксированного отрезка $[a, b]$, $0 < a < b < \infty$, соотношение $\lim_{t \rightarrow \infty} (\xi(\alpha t) / \xi(t)) = 1$ выполнено равномерно относительно $\alpha \in [a, b]$;
- (2) для любого $\varepsilon > 0$ справедливо соотношение $\sum_{\nu=n}^{\infty} \xi(\nu) \nu^{-(1+\varepsilon)} \ll \xi(n) n^{-\varepsilon}$;
- (3) для любого $\varepsilon > 0$ справедливо соотношение $\sum_{\nu=1}^n \xi(\nu) \nu^{\varepsilon-1} \ll \xi(n) n^{\varepsilon}$.

ЛЕММА 7 (см. [4], [8]). Пусть $\mu(t)$ – слабо колеблющаяся функция, удовлетворяющая условию (Sl_s) и функция $\gamma(t)$ определена равенством (3). Тогда

- (1) функция $\gamma(t)$ является возрастающей;
- (2) функция $\gamma(t)$ является слабо колеблющейся;
- (3) существует натуральное число N такое, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $\gamma(n) \ll \mu(n)$.

ЛЕММА 8 (см. [6]). Пусть $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$. Тогда для любого $\theta > 0$

$$C_1(\theta)(\lambda_1^\theta + \lambda_2^\theta) \leq (\lambda_1 + \lambda_2)^\theta \leq C_2(\theta)(\lambda_1^\theta + \lambda_2^\theta).$$

5. Доказательство теорем. Пункт а) теоремы 1. Из леммы 1 следует, что существует функция $\varphi \in L_p$ с рядом Фурье $\sigma(\lambda, f)$ и справедливо неравенство $\|\varphi\|_p \ll I(f, \theta, p)$.

Докажем оценку $A(\varphi, \delta_1, \delta_2, \tau, p) \ll B(f, \delta_1, \delta_2, \theta, p)$. Рассмотрим $A(\varphi, \delta_1, \delta_2, f, \tau, p)$. Выберем натуральные n_1, n_2 такие, что $2^{-n_i} < \delta \leq 2^{-n_i+1}$, $i = 1, 2$. Тогда используя свойства смешанного модуля гладкости и свойства слабо колеблющихся функций (см. леммы 6–8), получим

$$\begin{aligned} A^\tau(\varphi, \delta_1, \delta_2, \tau, p) &\ll 2^{-n_1\beta_1\tau} \gamma_1^\tau(2^{n_1}) 2^{-n_2\beta_2\tau} \gamma_2^\tau(2^{n_2}) \\ &\quad \times \sum_{\nu_1=0}^{n_1} \sum_{\nu_2=0}^{n_2} \frac{2^{\nu_1\beta_1\tau}}{\mu_1^\tau(2^{\nu_1})} \frac{2^{\nu_2\beta_2\tau}}{\mu_2^\tau(2^{\nu_2})} \omega_{\beta_1, \beta_2}^\tau \left(\varphi, \frac{1}{2^{\nu_1}}, \frac{1}{2^{\nu_2}} \right)_p \\ &\quad + 2^{-n_1\beta_1\tau} \gamma_1^\tau(2^{n_1}) \sum_{\nu_1=0}^{n_1} \frac{2^{\nu_1\beta_1\tau}}{\mu_1^\tau(2^{\nu_1})} \omega_{\beta_1, \beta_2}^\tau \left(\varphi, \frac{1}{2^{\nu_1}}, \frac{1}{2^{n_2}} \right)_p \\ &\quad + 2^{-n_2\beta_2\tau} \gamma_2^\tau(2^{n_2}) \sum_{\nu_2=0}^{n_2} \frac{2^{\nu_2\beta_2\tau}}{\mu_2^\tau(2^{\nu_2})} \omega_{\beta_1, \beta_2}^\tau \left(\varphi, \frac{1}{2^{n_1}}, \frac{1}{2^{\nu_2}} \right)_p \\ &\quad + \omega_{\beta_1, \beta_2}^\tau \left(\varphi, \frac{1}{2^{n_1}}, \frac{1}{2^{n_2}} \right)_p \\ &=: J_1 + J_2 + J_3 + J_4. \end{aligned}$$

Оценим J_2 . Применяя леммы 4 и 8, получим

$$\begin{aligned} J_2^{\theta/\tau} &\ll \left(2^{-n_1\beta_1\tau} \gamma_1^\tau(2^{n_1}) \sum_{\nu_1=0}^{n_1} \frac{2^{\nu_1\beta_1\tau}}{\mu_1^\tau(2^{\nu_1})} \right. \\ &\quad \times \left\| \sum_{\xi_1=2^{\nu_1+1}}^{\infty} \sum_{\xi_2=2^{n_2+1}}^{\infty} \xi_1^{r_1} \xi_2^{r_2} \gamma_1(\xi_1) \gamma_2(\xi_2) A_{\xi_1 \xi_2}(x_1, x_2) \right\|_p^\tau \Big)^{\theta/\tau} \\ &\quad + \left(2^{-n_1\beta_1\tau} \gamma_1^\tau(2^{n_1}) \sum_{\nu_1=0}^{n_1} \frac{1}{\mu_1^\tau(2^{\nu_1})} \right. \\ &\quad \times \left\| \sum_{\xi_1=1}^{2^{\nu_1}} \sum_{\xi_2=2^{n_2+1}}^{\infty} \xi_1^{r_1+\beta_1} \xi_2^{r_2} \gamma_1(\xi_1) \gamma_2(\xi_2) A_{\xi_1 \xi_2}(x_1, x_2) \right\|_p^\tau \Big)^{\theta/\tau} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(2^{-n_1 \beta_1 \tau} \gamma_1^\tau(2^{n_1}) 2^{-n_2 \beta_2 \tau} \sum_{\nu_1=0}^{n_1} \frac{2^{\nu_1 \beta_1 \tau}}{\mu_1^\tau(2^{\nu_1})} \right. \\
& \quad \times \left\| \sum_{\xi_1=2^{\nu_1+1}}^{\infty} \sum_{\xi_2=1}^{2^{n_2}} \xi_1^{r_1} \xi_2^{r_2+\beta_2} \gamma_1(\xi_1) \gamma_2(\xi_2) A_{\xi_1 \xi_2}(x_1, x_2) \right\|_p^\tau \Big)^{\theta/\tau} \\
& + \left(2^{-n_1 \beta_1 \tau} \gamma_1^\tau(2^{n_1}) 2^{-n_2 \beta_2 \tau} \sum_{\nu_1=0}^{n_1} \frac{1}{\mu_1^\tau(2^{\nu_1})} \right. \\
& \quad \times \left\| \sum_{\xi_1=1}^{2^{\nu_1}} \sum_{\xi_2=1}^{2^{n_2}} \xi_1^{r_1+\beta_1} \xi_2^{r_2+\beta_2} \gamma_1(\xi_1) \gamma_2(\xi_2) A_{\xi_1 \xi_2}(x_1, x_2) \right\|_p^\tau \Big)^{\theta/\tau} \\
& =: J_{21} + J_{22} + J_{23} + J_{24}.
\end{aligned}$$

Оценим J_{21} . По лемме 8

$$\begin{aligned}
J_{21} & \ll \left(2^{-n_1 \beta_1 \tau} \gamma_1^\tau(2^{n_1}) \sum_{\nu_1=0}^{n_1} \frac{2^{\nu_1 \beta_1 \tau}}{\mu_1^\tau(2^{\nu_1})} \right. \\
& \quad \times \left\| \sum_{\xi_1=2^{\nu_1+1}}^{2^{n_1}} \sum_{\xi_2=2^{n_2+1}}^{\infty} \xi_1^{r_1} \xi_2^{r_2} \gamma_1(\xi_1) \gamma_2(\xi_2) A_{\xi_1 \xi_2}(x_1, x_2) \right\|_p^\tau \Big)^{\theta/\tau} \\
& + \left(2^{-n_1 \beta_1 \tau} \gamma_1^\tau(2^{n_1}) \sum_{\nu_1=0}^{n_1} \frac{2^{\nu_1 \beta_1 \tau}}{\mu_1^\tau(2^{\nu_1})} \right. \\
& \quad \times \left\| \sum_{\xi_1=2^{n_1+1}}^{\infty} \sum_{\xi_2=2^{n_2+1}}^{\infty} \xi_1^{r_1} \xi_2^{r_2} \gamma_1(\xi_1) \gamma_2(\xi_2) A_{\xi_1 \xi_2}(x_1, x_2) \right\|_p^\tau \Big)^{\theta/\tau} \\
& =: J_{211} + J_{212}.
\end{aligned}$$

Далее будем использовать неравенства (см. лемму 6)

$$\sum_{\nu_1=0}^{n_1} \frac{2^{\nu_1 \beta_1 \tau}}{\mu_1^\tau(2^{\nu_1})} \ll \frac{2^{n_1 \beta_1 \tau}}{\gamma_1^\tau(2^{n_1})}, \quad 2^{2\nu_j r_j} \gamma_j^2(2^{\nu_j}) \ll \left(\sum_{m_j=n_j+1}^{\nu_j} 2^{m_j r_j} \gamma_j^\theta(2^{m_j}) \right)^{2/\theta}, \quad j = 1, 2,$$

и леммы 2, 3:

$$\begin{aligned}
J_{212} & \ll \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{\nu_2=n_2+1}^{\infty} \Delta_{\nu_1+1, \nu_2+1}^2 \right. \right. \\
& \quad \times \left. \left. \left\langle \sum_{m_1=n_1+1}^{\nu_1} \sum_{m_2=n_2+1}^{\nu_2} 2^{m_1 r_1 \theta} \gamma_1^\theta(2^{m_1}) 2^{m_2 r_2 \theta} \gamma_2^\theta(2^{m_2}) \right\rangle^{2/\theta} dx_1 dx_2 \right)^{p/2} \right\}^{\theta/p}.
\end{aligned}$$

Применяя неравенство Минковского, получим

$$\begin{aligned}
J_{212} & \ll \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{m_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{m_2=n_2+1}^{\infty} 2^{m_1 r_1 \theta} \gamma_1^\theta(2^{m_1}) 2^{m_2 r_2 \theta} \gamma_2^\theta(2^{m_2}) \right. \right. \\
& \quad \times \left. \left. \left\langle \sum_{\nu_1=m_1}^{\infty} \sum_{\nu_2=m_2}^{\infty} \Delta_{\nu_1+1, \nu_2+1}^2 \right\rangle^{\theta/2} \right)^{p/\theta} dx_1 dx_2 \right\}^{\theta/p}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\ll \sum_{m_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{m_2=n_2+1}^{\infty} 2^{m_1 r_1 \theta} \gamma_1^{\theta}(2^{m_1}) 2^{m_2 r_2 \theta} \gamma_2^{\theta}(2^{m_2}) \\
&\quad \times \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu_1=m_1}^{\infty} \sum_{\nu_2=m_2}^{\infty} \Delta_{\nu_1+1, \nu_2+1}^2 \right)^{p/2} dx_1 dx_2 \right\}^{\theta/p} \\
&\ll B^{\theta}(f, \delta_1, \delta_2, \theta, p).
\end{aligned}$$

Проведя аналогичные рассуждения, оценим J_{211} :

$$\begin{aligned}
J_{211} &\ll \left\{ \frac{\gamma_1^{\tau}(2^{n_1})}{2^{n_1 \beta_1 \tau}} \sum_{\nu_1=0}^{n_1} \frac{2^{\nu_1 \beta_1 \tau}}{\mu_1^{\tau}(2^{\nu_1})} \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{m_1=\nu_1+1}^{n_1} \sum_{m_2=n_2+1}^{\infty} 2^{2m_1 r_1 + 2m_2 r_2} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \times \gamma_1^2(2^{m_1}) \gamma_2^2(2^{m_2}) \Delta_{m_1+1, m_2+1}^2 \right]^{p/2} dx_1 dx_2 \right)^{\tau/p} \right\}^{\theta/\tau} \\
&\ll \frac{\gamma_1^{\theta}(2^{n_1})}{2^{n_1 \beta_1 \theta}} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu_1=0}^{n_1} \frac{2^{\nu_1 \beta_1 \tau}}{\mu_1^{\tau}(2^{\nu_1})} \left[\sum_{m_1=\nu_1+1}^{n_1} \sum_{m_2=n_2+1}^{\infty} 2^{2m_1 r_1 + 2m_2 r_2} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \times \gamma_1^2(2^{m_1}) \gamma_2^2(2^{m_2}) \Delta_{m_1+1, m_2+1}^2 \right]^{p/2} dx_1 dx_2 \right)^{\tau/2} \right\}^{p/\tau} \\
&\ll \frac{\gamma_1^{\theta}(2^{n_1})}{2^{n_1 \beta_1 \theta}} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{m_1=0}^{n_1} \left[\sum_{\nu_1=0}^{m_1} \frac{2^{\nu_1 \beta_1 \tau}}{\mu_1^{\tau}(2^{\nu_1})} \left\langle \sum_{m_2=n_2+1}^{\infty} 2^{2m_1 r_1 + 2m_2 r_2} \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \times \gamma_1^2(2^{m_1}) \gamma_2^2(2^{m_2}) \Delta_{m_1+1, m_2+1}^2 \right\rangle \right]^{2/\tau} \right)^{p/2} dx_1 dx_2 \right\}^{\theta/p} \\
&\ll \frac{\gamma_1^{\theta}(2^{n_1})}{2^{n_1 \beta_1 \theta}} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{m_1=0}^{n_1} \sum_{m_2=n_2+1}^{\infty} 2^{2m_1(r_1+\beta_1)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \Delta_{m_1+1, m_2+1}^2 \left[\sum_{\nu_2=n_2+1}^{m_2} 2^{\nu_2 r_2 \theta} \gamma_2^{\theta}(2^{\nu_2}) \right]^{2/\theta} \right)^{p/2} dx_1 dx_2 \right\}^{\theta/p} \\
&\ll \frac{\gamma_1^{\theta}(2^{n_1})}{2^{n_1 \beta_1 \theta}} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu_2=n_2+1}^{\infty} 2^{\nu_2 r_2 \theta} \gamma_2^{\theta}(2^{\nu_2}) \left[\sum_{m_1=0}^{n_1} \sum_{m_2=n_2+1}^{\infty} 2^{2m_1(r_1+\beta_1)} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \times \Delta_{m_1+1, m_2+1}^2 \right]^{p/2} \right)^{\theta/2} dx_1 dx_2 \right\}^{\theta/p} \\
&\ll \frac{\gamma_1^{\theta}(2^{n_1})}{2^{n_1 \beta_1 \theta}} \sum_{\nu_2=n_2+1}^{\infty} 2^{\nu_2 r_2 \theta} \gamma_2^{\theta}(2^{\nu_2}) \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{m_1=0}^{n_1} \sum_{m_2=\nu_2+1}^{\infty} 2^{2m_1(r_1+\beta_1)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \Delta_{m_1+1, m_2+1}^2 \right]^{p/2} dx_1 dx_2 \right)^{\theta/p} \\
&\ll B^{\theta}(f, \delta_1, \delta_2, \theta, p).
\end{aligned}$$

Объединяя оценки J_{211} и J_{212} , получим $J_{21} \ll B^{\theta}(f, \delta_1, \delta_2, \theta, p)$.

Оценим J_{22} . Используя леммы 2, 3, 5, будем иметь

$$\begin{aligned}
 J_{22} &\ll \frac{\gamma_1^\theta(2^{n_1})}{2^{n_1\beta_1\theta}} \left\{ \sum_{\nu_1=0}^{n_1} \frac{1}{\mu_1^\tau(2^{\nu_1})} \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{m_1=0}^{\nu_1} \sum_{m_2=n_2+1}^{\infty} 2^{2m_1(r_1+\beta_1)+2m_2r_2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times \gamma_1^2(2^{m_1}) \gamma_2^2(2^{m_2}) \Delta_{m_1+1, m_2+1}^2 \right]^{p/2} dx_1 dx_2 \right)^{\tau/p} \right\}^{\theta/\tau} \\
 &\ll \frac{\gamma_1^\theta(2^{n_1})}{2^{n_1\beta_1\theta}} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu_1=0}^{n_1} \frac{1}{\mu_1^\tau(2^{\nu_1})} \left[\sum_{m_1=0}^{\nu_1} \sum_{m_2=n_2+1}^{\infty} 2^{2m_1(r_1+\beta_1)+2m_2r_2} \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times \gamma_1^2(2^{m_1}) \gamma_2^2(2^{m_2}) \Delta_{m_1+1, m_2+1}^2 \right]^{p/2} dx_1 dx_2 \right)^{\tau/p} \right\}^{\theta/p} \\
 &\ll \frac{\gamma_1^\theta(2^{n_1})}{2^{n_1\beta_1\theta}} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{m_1=0}^{n_1} \left[\sum_{\nu_1=m_1}^{n_1} \frac{\gamma_1^\tau(2^{m_1})}{\mu_1^\tau(2^{\nu_1})} \left\langle \sum_{m_2=n_2+1}^{\infty} 2^{2m_1(r_1+\beta_1)+2m_2r_2} \right. \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times \gamma_2^2(2^{m_2}) \Delta_{m_1+1, m_2+1}^2 \right\rangle^{\tau/2} \right]^{2/\tau} \right)^{p/2} dx_1 dx_2 \right\}^{\theta/p}.
 \end{aligned}$$

Используя свойства функции $\gamma_1(t)$, нетрудно проверить, что

$$\sum_{\nu_1=m_1}^{n_1} \frac{1}{\mu_1^\tau(2^{\nu_1})} \ll \frac{1}{\gamma_1^\tau(2^{m_1})}.$$

Тогда (см. оценку J_{211})

$$\begin{aligned}
 J_{22} &\ll \frac{\gamma_1^\theta(2^{n_1})}{2^{n_1\beta_1\theta}} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{m_1=0}^{n_1} \sum_{m_2=n_2+1}^{\infty} 2^{2m_1(r_1+\beta_1)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times \Delta_{m_1+1, m_2+1}^2 \left[\sum_{\nu_2=n_2+1}^{m_2} 2^{\nu_2 r_2 \theta} \gamma_2^\theta(2^{\nu_2}) \right]^{2/\theta} \right)^{p/2} dx_1 dx_2 \right\}^{\theta/p} \\
 &\ll B^\theta(f, \delta_1, \delta_2, \theta, p).
 \end{aligned}$$

Оценим J_{23} . Используя лемму 8, получим

$$\begin{aligned}
 J_{23} &\ll \frac{\gamma_1^\theta(2^{n_1})}{2^{n_1\beta_1\theta}} 2^{-n_2\beta_2\theta} \left(\sum_{\nu_1=0}^{n_1} \frac{2^{\nu_1\beta_1\tau}}{\mu_1^\tau(2^{\nu_1})} \left\| \sum_{\xi_1=2^{\nu_1+1}}^{2^{n_1}} \sum_{\xi_2=1}^{2^{n_2}} \xi_1^{r_1} \xi_2^{r_2+\beta_2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times \gamma_1(\xi_1) \gamma_2(\xi_2) A_{\xi_1\xi_2}(x_1, x_2) \right\|_p^\tau \right)^{\theta/\tau} \\
 &\quad + \frac{\gamma_1^\theta(2^{n_1})}{2^{n_1\beta_1\theta}} 2^{-n_2\beta_2\theta} \left(\sum_{\nu_1=0}^{n_1} \frac{2^{\nu_1\beta_1\tau}}{\mu_1^\tau(2^{\nu_1})} \left\| \sum_{\xi_1=2^{n_1+1}}^{\infty} \sum_{\xi_2=1}^{2^{n_2}} \xi_1^{r_1} \xi_2^{r_2+\beta_2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times \gamma_1(\xi_1) \gamma_2(\xi_2) A_{\xi_1\xi_2}(x_1, x_2) \right\|_p^\tau \right)^{\theta/\tau} \\
 &=: J_{231} + J_{232}.
 \end{aligned}$$

При оценке J_{231} будем использовать такие же преобразования, как и при оценке J_{211} :

$$\begin{aligned}
 J_{231} &\ll \frac{\gamma_1^\theta(2^{n_1})}{2^{n_1\beta_1\theta}} 2^{-n_2\beta_2\theta} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{m_1=0}^{n_1} \sum_{m_2=0}^{n_2} 2^{2m_1(r_1+\beta_1)+2m_2(r_2+\beta_2)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times \gamma_2^2(2^{m_2}) \Delta_{m_1+1, m_2+1}^2 \right)^{p/2} dx_1 dx_2 \right\}^{\theta/p} \\
 &\ll \frac{\gamma_1^\theta(2^{n_1})}{2^{n_1\beta_1\theta}} \frac{\gamma_2^\theta(2^{n_2})}{2^{n_2\beta_2\theta}} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{m_1=0}^{n_1} \sum_{m_2=0}^{n_2} 2^{2m_1(r_1+\beta_1)+2m_2(r_2+\beta_2)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times \Delta_{m_1+1, m_2+1}^2 \right)^{p/2} dx_1 dx_2 \right\}^{\theta/p} \\
 &\ll B^\theta(f, \delta_1, \delta_2, \theta, p).
 \end{aligned}$$

Оценим J_{232} аналогично оценке J_{212} :

$$\begin{aligned}
 J_{232} &\ll 2^{-n_2\beta_2\theta} \sum_{m_1=n_1+1}^{\infty} 2^{m_1 r_1 \theta} \gamma_1^\theta(2^{m_1}) \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu_1=m_1}^{\infty} \sum_{\nu_2=0}^{n_2} 2^{2\nu_2(r_2+\beta_2)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times \gamma_2^2(2^{\nu_2}) \Delta_{\nu_1+1, \nu_2+1}^2 \right)^{p/2} dx_1 dx_2 \right\}^{\theta/p} \\
 &\ll \frac{\gamma_2^\theta(2^{n_2})}{2^{n_2\beta_2\theta}} \sum_{m_1=n_1+1}^{\infty} 2^{m_1 r_1 \theta} \gamma_1^\theta(2^{m_1}) \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu_1=m_1}^{\infty} \sum_{\nu_2=0}^{n_2} 2^{2\nu_2(r_2+\beta_2)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times \Delta_{\nu_1+1, \nu_2+1}^2 \right)^{p/2} dx_1 dx_2 \right\}^{\theta/p} \\
 &\ll B^\theta(f, \delta_1, \delta_2, \theta, p).
 \end{aligned}$$

Оценим J_{24} , используя те же методы, которыми пользовались при оценке J_{22} :

$$\begin{aligned}
 J_{24} &\ll \frac{\gamma_1^\theta(2^{n_1})}{2^{n_1\beta_1\theta}} 2^{-n_2\beta_2\theta} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{m_1=0}^{n_1} \sum_{m_2=0}^{n_2} 2^{2m_1(r_1+\beta_1)+2m_2(r_2+\beta_2)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times \gamma_2^2(2^{m_2}) \Delta_{m_1+1, m_2}^2 \right)^{p/2} dx_1 dx_2 \right\}^{\theta/p} \\
 &\ll \frac{\gamma_1^\theta(2^{n_1})}{2^{n_1\beta_1\theta}} \frac{\gamma_2^\theta(2^{n_2})}{2^{n_2\beta_2\theta}} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{m_1=0}^{n_1} \sum_{m_2=0}^{n_2} 2^{2m_1(r_1+\beta_1)+2m_2(r_2+\beta_2)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times \Delta_{m_1+1, m_2}^2 \right)^{p/2} dx_1 dx_2 \right\}^{\theta/p} \\
 &\ll B^\theta(f, \delta_1, \delta_2, \theta, p).
 \end{aligned}$$

Объединяя полученные оценки J_{21} , J_{22} , J_{23} , J_{24} , получим $J_2^{\theta/\tau} \ll B^\theta(f, \delta_1, \delta_2, \theta, p)$. Аналогично получим, что $J_j^{\theta/\tau} \ll B^\theta(f, \delta_1, \delta_2, \theta, p)$, $j = 1, 3, 4$. Таким образом, оценка $A^\theta(\varphi, \delta_1, \delta_2, \tau, p) \ll B^\theta(f, \delta_1, \delta_2, \theta, p)$ доказана, что завершает доказательство пункта а).

Докажем пункт b) теоремы 1. Используя свойства смешанного модуля гладкости и лемму 7, будем иметь

$$B^\theta(f, \delta_1, \delta_2, \tau, p) \ll \left(\sum_{m_1=n_1}^{\infty} \sum_{m_2=n_2}^{\infty} 2^{m_1 r_1 \tau} 2^{m_2 r_2 \tau} \gamma_1^\tau(2^{m_1}) \gamma_2^\tau(2^{m_2}) \right. \\ \left. \times \omega_{r_1+\beta_1, r_2+\beta_2}^\tau \left(f, \frac{1}{2^{m_1}}, \frac{1}{2^{m_2}} \right)_p \right)^{\theta/\tau}.$$

Используя леммы 4 и 8, получим

$$B^\theta(f, \delta_1, \delta_2, \tau, p) \ll \left(\sum_{m_1=n_1}^{\infty} \sum_{m_2=n_2}^{\infty} 2^{m_1 r_1 \tau} 2^{m_2 r_2 \tau} \gamma_1^\tau(2^{m_1}) \gamma_2^\tau(2^{m_2}) \right. \\ \times \left\| \sum_{\xi_1=2^{m_1}+1}^{\infty} \sum_{\xi_2=2^{m_2}+1}^{\infty} A_{\xi_1 \xi_2}(x_1, x_2) \right\|^\tau \right)^{\theta/\tau} \\ + \left(\sum_{m_1=n_1}^{\infty} \sum_{m_2=n_2}^{\infty} 2^{m_1 r_1 \tau} 2^{-m_2 \beta_2 \tau} \gamma_1^\tau(2^{m_1}) \gamma_2^\tau(2^{m_2}) \right. \\ \times \left\| \sum_{\xi_1=2^{m_1}+1}^{\infty} \sum_{\xi_2=1}^{2^{m_2}} \xi_2^{r_2+\beta_2} A_{\xi_1 \xi_2}(x_1, x_2) \right\|^\tau \right)^{\theta/\tau} \\ + \left(\sum_{m_1=n_1}^{\infty} \sum_{m_2=n_2}^{\infty} 2^{-m_1 \beta_1 \tau} 2^{m_2 r_2 \tau} \gamma_1^\tau(2^{m_1}) \gamma_2^\tau(2^{m_2}) \right. \\ \times \left\| \sum_{\xi_1=1}^{2^{m_1}} \sum_{\xi_2=2^{m_2}+1}^{\infty} \xi_1^{r_1+\beta_1} A_{\xi_1 \xi_2}(x_1, x_2) \right\|^\tau \right)^{\theta/\tau} \\ + \left(\sum_{m_1=n_1}^{\infty} \sum_{m_2=n_2}^{\infty} 2^{-m_1 \beta_1 \tau} 2^{-m_2 \beta_1 \tau} \gamma_1^\tau(2^{m_1}) \gamma_2^\tau(2^{m_2}) \right. \\ \times \left\| \sum_{\xi_1=1}^{2^{m_1}} \sum_{\xi_2=1}^{2^{m_2}} \xi_1^{r_1+\beta_1} \xi_2^{r_2+\beta_2} A_{\xi_1 \xi_2}(x_1, x_2) \right\|^\tau \right)^{\theta/\tau} \\ =: I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Оценим I_2 . По лемме 8

$$I_2 \ll \left(\sum_{m_1=n_1}^{\infty} \sum_{m_2=n_2}^{\infty} 2^{m_1 r_1 \tau} 2^{-m_2 \beta_2 \tau} \gamma_1^\tau(2^{m_1}) \gamma_2^\tau(2^{m_2}) \right. \\ \times \left\| \sum_{\xi_1=2^{m_1}+1}^{\infty} \sum_{\xi_2=1}^{2^{m_2}} \xi_2^{r_2+\beta_2} A_{\xi_1 \xi_2}(x_1, x_2) \right\|^\tau \right)^{\theta/\tau} \\ + \left(\sum_{m_1=n_1}^{\infty} \sum_{m_2=n_2}^{\infty} 2^{m_1 r_1 \tau} 2^{-m_2 \beta_2 \tau} \gamma_1^\tau(2^{m_1}) \gamma_2^\tau(2^{m_2}) \right. \\ \times \left\| \sum_{\xi_1=2^{m_1}+1}^{\infty} \sum_{\xi_2=2^{m_2}+1}^{2^{m_2}} \xi_2^{r_2+\beta_2} A_{\xi_1 \xi_2}(x_1, x_2) \right\|^\tau \right)^{\theta/\tau} \\ =: I_{21} + I_{22}.$$

Оценим I_{21} . Из лемм 6 и 7 следует, что

$$\left\langle \sum_{m_2=n_2}^{\infty} 2^{-m_2\beta_2\tau} \gamma_2^\tau(2^{m_2}) \right\rangle^{2/\tau} \ll 2^{-2n_2\beta_2} \gamma_2^2(2^{n_2}).$$

Тогда, применяя леммы 2 и 3, а затем неравенство Минковского (лемму 5), получим

$$\begin{aligned} I_{21} &\ll \frac{\gamma_2^\theta(2^{n_2})}{2^{n_2\beta_2\theta}} \left(\sum_{m_1=n_1}^{\infty} 2^{m_1r_1\tau} \gamma_1^\tau(2^{m_1}) \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\langle \sum_{\nu_1=m_1}^{\infty} \sum_{\nu_2=0}^{n_2} 2^{2\nu_2(r_2+\beta_2)} \right. \right. \right. \\ &\quad \times \Delta_{\nu_1+2, \nu_2+1}^2 \left. \left. \left. \right\rangle^{p/2} dx_1 dx_2 \right\}^{\tau/p} \right)^{\theta/\tau} \\ &\ll \frac{\gamma_2^\theta(2^{n_2})}{2^{n_2\beta_2\theta}} \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} \left[\sum_{m_1=n_1}^{\nu_1} 2^{m_1r_1\tau} \right. \right. \right. \\ &\quad \times \gamma_1^\tau(2^{m_1}) \left\langle \sum_{\nu_2=0}^{n_2} 2^{2\nu_2(r_2+\beta_2)} \Delta_{\nu_1+2, \nu_2+1}^2 \right\rangle^{\tau/2} \left. \left. \left. \right\}^{2/\tau} \right\}^{p/2} dx_1 dx_2 \right)^{\theta/p} \\ &\ll \frac{\gamma_2^\theta(2^{n_2})}{2^{n_2\beta_2\theta}} \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} \sum_{\nu_2=0}^{n_2} 2^{2\nu_2(r_2+\beta_2)} \right. \right. \\ &\quad \times \Delta_{\nu_1+2, \nu_2+1}^2 \left\langle \sum_{m_1=n_1}^{\nu_1} 2^{m_1r_1\tau} \gamma_1^\tau(2^{m_1}) \right\rangle^{2/\tau} \left. \left. \right\}^{p/2} dx_1 dx_2 \right)^{\theta/p}. \end{aligned}$$

Применяя леммы 6 и 7, получаем справедливость следующих неравенств:

$$\begin{aligned} &\left\langle \sum_{m_1=n_1}^{\nu_1} 2^{m_1r_1\tau} \gamma_1^\tau(2^{m_1}) \right\rangle^{2/\tau} \ll 2^{2\nu_1r_1} \gamma_1^2(2^{\nu_1}), \\ 1 &\ll \frac{\gamma_2^2(2^{\nu_2-1})}{\gamma_2^2(2^{n_2})} + \gamma_2^2(2^{\nu_2-1}) \left\langle \sum_{m_2=\nu_2-1}^{n_2} \frac{1}{\mu_2^\theta(2^{m_2})} \right\rangle^{2/\theta}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} I_{21} &\ll 2^{-n_2\beta_2\theta} \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} \sum_{\nu_2=0}^{n_2} 2^{2\nu_1r_1} \gamma_1^2(2^{\nu_1}) \right. \right. \\ &\quad \times 2^{2\nu_2(r_2+\beta_2)} \gamma_2^2(2^{\nu_2-1}) \Delta_{\nu_1+2, \nu_2+1}^2 \left. \left. \right\}^{p/2} dx_1 dx_2 \right)^{\theta/p} \\ &\quad + \frac{\gamma_2^\theta(2^{n_2})}{2^{n_2\beta_2\theta}} \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} \sum_{\nu_2=0}^{n_2} 2^{2\nu_1r_1} \gamma_1^2(2^{\nu_1}) \right. \right. \\ &\quad \times 2^{2\nu_2(r_2+\beta_2)} \gamma_2^2(2^{\nu_2-1}) \Delta_{\nu_1+2, \nu_2+1}^2 \left\langle \sum_{m_2=\nu_2-1}^{n_2} \frac{1}{\mu_2^\theta(2^{m_2})} \right\rangle^{2/\theta} \left. \left. \right\}^{p/2} dx_1 dx_2 \right)^{\theta/p} \\ &=: I_{211} + I_{212}. \end{aligned}$$

Применяя леммы 2–4, получим

$$I_{211} \ll \omega_{\beta_1, \beta_2}^{\theta} \left(\varphi, \frac{1}{2^{n_1}}, \frac{1}{2^{n_2}} \right)_p \ll A^{\theta}(\varphi, \delta_1, \delta_2, \theta, p).$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского (лемма 5), получим

$$\begin{aligned} I_{212} &\ll \frac{\gamma_2^{\theta}(2^{n_2})}{2^{n_2\beta_2\theta}} \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} \left[\sum_{m_2=0}^{n_2} \left\langle \sum_{\nu_2=0}^{m_2+1} 2^{2\nu_1 r_1} \gamma_1^2(2^{\nu_1}) \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left. \left. 2^{2\nu_2(r_2+\beta_2)} \gamma_2^2(2^{\nu_2-1}) \frac{\Delta_{\nu_1+2, \nu_2+1}^2}{\mu_2^{\theta}(2^{m_2})} \right\rangle^{\theta/2} \right]^{2/\theta} \right\}^{p/2} dx_1 dx_2 \right)^{\theta/p} \\ &\ll \frac{\gamma_2^{\theta}(2^{n_2})}{2^{n_2\beta_2\theta}} \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{m_2=0}^{n_2} \left[\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} \sum_{\nu_2=0}^{m_2+1} 2^{2\nu_1 r_1} \gamma_1^2(2^{\nu_1}) \right. \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left. \left. 2^{2\nu_2(r_2+\beta_2)} \gamma_2^2(2^{\nu_2-1}) \frac{\Delta_{\nu_1+2, \nu_2+1}^2}{\mu_2^{\theta}(2^{m_2})} \right]^{2/\theta} \right\}^{p/\theta} dx_1 dx_2 \right)^{\theta/p} \\ &\ll \frac{\gamma_2^{\theta}(2^{n_2})}{2^{n_2\beta_2\theta}} \sum_{m_2=0}^{n_2} \frac{1}{\mu_2^{\theta}(2^{m_2})} \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} \sum_{\nu_2=0}^{m_2+1} 2^{2\nu_1 r_1} \gamma_1^2(2^{\nu_1}) \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left. \left. 2^{2\nu_2(r_2+\beta_2)} \gamma_2^2(2^{\nu_2-1}) \Delta_{\nu_1+2, \nu_2+1}^2 \right]^{p/2} dx_1 dx_2 \right)^{\theta/p}. \end{aligned}$$

Вновь применяя леммы 2–4, получим

$$I_{212} \ll 2^{-n_2\beta_2\theta} \gamma_2^{\theta}(2^{n_2}) \sum_{m_2=0}^{n_2} \frac{2^{m_2\beta_2\theta}}{\mu_2^{\theta}(2^{m_2})} \omega_{\beta_1, \beta_2}^{\theta} \left(\varphi, \frac{1}{2^{n_1}}, \frac{1}{2^{m_2}} \right)_p \ll A^{\theta}(\varphi, \delta_1, \delta_2, \theta, p).$$

Таким образом, объединяя оценки I_{211} и I_{212} , будем иметь $I_{21} \ll A^{\theta}(\varphi, \delta_1, \delta_2, \theta, p)$. Оценим I_{22} , применяя неравенство Минковского:

$$\begin{aligned} I_{22} &\ll \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{m_1=n_1}^{\infty} \sum_{m_2=n_2}^{\infty} 2^{m_1 r_1 \tau - m_2 \beta_2 \tau} \gamma_1^{\tau}(2^{m_1}) \gamma_2^{\tau}(2^{m_2}) \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left. \left\langle \sum_{\nu_1=m_1}^{\infty} \sum_{\nu_2=n_2}^{m_2-1} \Delta_{\nu_1+2, \nu_2+1}^2 2^{2\nu_2(r_2+\beta_2)} \right\rangle^{\tau/2} \right\}^{\tau/p} dx_1 dx_2 \right)^{\theta/p} \\ &\ll \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} \sum_{\nu_2=n_2}^{\infty} \Delta_{\nu_1+2, \nu_2+1}^2 2^{2\nu_2(r_2+\beta_2)} \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left. \left\langle \sum_{m_1=n_1}^{\nu_1} \sum_{m_2=\nu_2}^{\infty} 2^{m_1 r_1 \tau - m_2 \beta_2 \tau} \gamma_1^{\tau}(2^{m_1}) \gamma_2^{\tau}(2^{m_2}) \right\rangle^{2/\tau} \right\}^{p/2} dx_1 dx_2 \right)^{\theta/p} \\ &\ll \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} \sum_{\nu_2=n_2}^{\infty} \Delta_{\nu_1+2, \nu_2+1}^2 \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left. \left. 2^{2\nu_1 r_1 + 2\nu_2 r_2} \gamma_1^2(2^{\nu_1}) \gamma_2^2(2^{\nu_2}) \right\}^{p/2} dx_1 dx_2 \right)^{\theta/p}. \end{aligned}$$

Применяя леммы 3–5, будем иметь

$$I_{22} \ll \omega_{\beta_1, \beta_2}^{\theta} \left(\varphi, \frac{1}{2^{n_1}}, \frac{1}{2^{n_2}} \right)_p \ll A^{\theta}(\varphi, \delta_1, \delta_2, \theta, p).$$

Таким образом, объединяя оценки для I_{21} и I_{22} , получим $I_2 \ll A^{\theta}(\varphi, \delta_1, \delta_2, \theta, p)$. Аналогичным образом доказываются оценки $I_j \ll A^{\theta}(\varphi, \delta_1, \delta_2, \theta, p)$, $j = 1, 3, 4$. Таким образом, $B^{\theta}(f, \delta_1, \delta_2, \tau, p) \ll A^{\theta}(\varphi, \delta_1, \delta_2, \theta, p)$, что завершает доказательство пункта б) теоремы 1.

Теоремы 2 и 3 доказываются теми же методами, что и теорема 1, только вместо пункта а) леммы 4 нужно применять пункты б) и с) соответственно.

6. Заключительные замечания. 1. Все приведенные выше утверждения для функций двух переменных распространяются на случай n переменных при $n > 2$.

2. Для функции $\mu(t)$, рассмотренной в примере 1, соответствующие оценки в одномерном случае получены в [9].

3. Отметим, что оценки модуля гладкости преобразованного ряда в случае IV отличаются от оценок в случае II только “естественными” отличиями, возникающими в связи с заменой $n_j^{-\alpha_j}$ на $\ln_{k_j}^{-A_j}(d_{k_j} n_j)$, $j = 1, 2$ (см. [2] и [3]). Вместе с тем хорошо видно, что полученные оценки для случая V (см. утверждение) отличаются от оценок в случае III (см. [2]) как “естественными” отличиями, возникающими в связи с заменой $n_j^{\alpha_j}$ на $\ln_{k_j}^{A_j}(d_{k_j} n_j)$, $j = 1, 2$, так и числом слагаемых. Существенность этих отличий иллюстрируется ниже примерами 2 и 3.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим функцию

$$f_1(x_1, x_2) = \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \prod_{j=1}^2 (n_j^{-(r_j+\beta_j+1-1/p)} \ln^{-(A_j+(1+\varepsilon_j)/p)}(2n_j) \cos n_j x_j),$$

где $p \in (1, \infty)$, $r_j, \beta_j, A_j, \varepsilon_j \in (0, \infty)$, $j = 1, 2$.

По лемме 4 б)

$$\omega_{r_1+\beta_1, r_2+\beta_2} \left(f_1, \frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2} \right)_p \asymp m_1^{-(r_1+\beta_1)} m_2^{-(r_2+\beta_2)}.$$

Если функции $\mu_j(t)$, $j = 1, 2$, определены следующим образом: $\mu_j(t) = \ln^{1/p+A_j}(2t)$, то они удовлетворяют условию (Sl_p) и в этом случае можно рассматривать функции $\gamma_j(t)$ (см. (3)), которые будут записываться в виде $\gamma_j(t) = C_j \ln^{A_j}(2t)$, где C_j – постоянные множители. Тогда справедливо неравенство $I(f_1, p, p) < \infty$, и по теореме 2 для случая $\tau = \theta = p$ имеем $B(f_1, \delta_1, \delta_2, p, p) \asymp A(\varphi_1, \delta_1, \delta_2, p, p)$, где $\lambda = \{\lambda_{n_1 n_2} = n_1^{r_1} n_2^{r_2} \times \gamma_1(n_1) \gamma_2(n_2)\}$ и функция φ_1 имеет ряд Фурье

$$\sigma(\lambda, f_1) = \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \prod_{j=1}^2 (n_j^{-(\beta_j+1-1/p)} \ln^{-(1+\varepsilon_j)/p}(2n_j) \cos n_j x_j).$$

Тогда по лемме 4 б)

$$\omega_{\beta_1, \beta_2} \left(\varphi_1, \frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2} \right)_p \asymp m_1^{-\beta_1} m_2^{-\beta_2}.$$

Несложно показать, что

$$\begin{aligned} B^p(f_1, \delta_1, \delta_2, p, p) &\asymp \delta_1^{\beta_1 p} \delta_2^{\beta_2 p} \gamma_1^p \left(\frac{1}{\delta_1} \right) \gamma_2^p \left(\frac{1}{\delta_2} \right) \int_{\delta_1}^1 \int_{\delta_2}^1 \frac{t_1^{-\beta_1 p-1}}{\mu_1^p(\frac{1}{t_1})} \frac{t_2^{-\beta_2 p-1}}{\mu_2^p(\frac{1}{t_2})} \\ &\quad \times \omega_{\beta_1 \beta_2}^p(\varphi_1, t_1, t_2)_p dt_1 dt_2 \\ &\asymp \delta_1^{\beta_1 p} \delta_2^{\beta_2 p} \gamma_1^p \left(\frac{1}{\delta_1} \right) \gamma_2^p \left(\frac{1}{\delta_2} \right), \end{aligned}$$

но при этом

$$\begin{aligned} \delta_1^{\beta_1 p} \gamma_1^p \left(\frac{1}{\delta_1} \right) \int_{\delta_1}^1 \frac{t_1^{-\beta_1 p-1}}{\mu_1^p(\frac{1}{t_1})} \omega_{\beta_1 \beta_2}^p(\varphi_1, t_1, \delta_2)_p dt_1 &\asymp \delta_1^{\beta_1 p} \delta_2^{\beta_2 p} \gamma_1^p \left(\frac{1}{\delta_1} \right), \\ \delta_2^{\beta_2 p} \gamma_2^p \left(\frac{1}{\delta_2} \right) \int_{\delta_2}^1 \frac{t_2^{-\beta_2 p-1}}{\mu_2^p(\frac{1}{t_2})} \omega_{\beta_1 \beta_2}^p(\varphi_1, \delta_1, t_2)_p dt_2 &\asymp \delta_1^{\beta_1 p} \delta_2^{\beta_2 p} \gamma_2^p \left(\frac{1}{\delta_2} \right), \\ \omega_{\beta_1 \beta_2}^{\tau}(\varphi_1, \delta_1, \delta_2)_p &\asymp \delta_1^{\beta_1 p} \delta_2^{\beta_2 p}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 3. Рассмотрим функцию

$$f_2(x_1, x_2) = \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \prod_{j=1}^2 (n_j^{-(\beta_j+1-1/p)} \cos n_j x_j),$$

где $p \in (1, \infty)$, $\beta_j \in (0, \infty)$, $j = 1, 2$. Тогда по лемме 4 б)

$$\omega_{r_1+\beta_1, r_2+\beta_2} \left(f_2, \frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2} \right)_p \asymp m_1^{-\beta_1} m_2^{-\beta_2},$$

где $r_j > 0$. Следовательно, если функции $\mu_j(t)$ определены следующим образом: $\mu_j(t) = \ln^{1/p+A_j}(2t)$, где $A_j > 0$, то для любых фиксированных $\beta_j > r_j$ справедливо неравенство $I(f_2, p, p) < \infty$, где $\gamma_j(t) = C_j \ln^{A_j}(2t)$. По теореме 2 для случая $\tau = \theta = p$ имеем $B(f_2, \delta_1, \delta_2, p, p) \asymp A(\varphi_2, \delta_1, \delta_2, p, p)$, где $\lambda = \{\lambda_{n_1 n_2} = n_1^{r_1} n_2^{r_2} \gamma_1(n_1) \gamma_2(n_2)\}$ и функция φ_2 имеет ряд Фурье

$$\sigma(\lambda, f_2) = \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \prod_{j=1}^2 (n_j^{-(\beta_j-r_j+1-1/p)} \ln^{A_j p}(2n_j) \cos n_j x_j).$$

Тогда

$$\begin{aligned} B^p(f_2, \delta_1, \delta_2, p, p) &\asymp \omega_{\beta_1 \beta_2}^p(\varphi_2, \delta_1, \delta_2)_p \asymp \delta_1^{p(\beta_1-r_1)} \gamma_1^p \left(\frac{1}{\delta_1} \right) \delta_2^{p(\beta_2-r_2)} \gamma_2^p \left(\frac{1}{\delta_2} \right) \\ &\asymp \delta_1^{p(\beta_1-r_1)} \ln^{A_1 p} \frac{2}{\delta_1} \delta_2^{p(\beta_2-r_2)} \ln^{A_2 p} \frac{2}{\delta_2}, \end{aligned}$$

НО

$$\begin{aligned}
& \delta_1^{\beta_1 p} \delta_2^{\beta_2 p} \gamma_1^p \left(\frac{1}{\delta_1} \right) \gamma_2^p \left(\frac{1}{\delta_2} \right) \int_{\delta_1}^1 \int_{\delta_2}^1 \frac{t_1^{-\beta_1 p-1}}{\mu_1^p(\frac{1}{t_1})} \frac{t_2^{-\beta_2 p-1}}{\mu_2^p(\frac{1}{t_2})} \omega_{\beta_1 \beta_2}^p(\varphi_2, t_1, t_2)_p dt_1 dt_2 \\
& \asymp \prod_{j=1}^2 \delta_j^{p(\beta_j - r_j)} \ln A_j p^{-1} \frac{2}{\delta_j}, \\
& \delta_1^{\beta_1 p} \gamma_1^p \left(\frac{1}{\delta_1} \right) \int_{\delta_1}^1 \frac{t_1^{-\beta_1 p-1}}{\mu_1^p(\frac{1}{t_1})} \omega_{\beta_1 \beta_2}^p(\varphi_2, t_1, \delta_2)_p dt_1 \\
& \asymp \delta_1^{p(\beta_1 - r_1)} \ln A_1 p^{-1} \frac{2}{\delta_1} \delta_2^{p(\beta_2 - r_2)} \ln A_2 p \frac{2}{\delta_2}, \\
& \delta_2^{\beta_2 p} \gamma_2^p \left(\frac{1}{\delta_2} \right) \int_{\delta_2}^1 \frac{t_2^{-\beta_2 p-1}}{\mu_2^p(\frac{1}{t_2})} \omega_{\beta_1 \beta_2}^p(\varphi_2, \delta_1, t_2)_p dt_2 \\
& \asymp \delta_1^{p(\beta_1 - r_1)} \ln A_1 p \frac{2}{\delta_1} \delta_2^{p(\beta_2 - r_2)} \ln A_2 p^{-1} \frac{2}{\delta_2}.
\end{aligned}$$

Таким образом, $\omega_{\beta_1, \beta_2}(\varphi, \delta_1, \delta_2)_p$ может быть как больше, так и меньше по порядку, чем интегральные слагаемые, входящие в $A(\varphi, \delta_1, \delta_2, p, p)$, причем в оценках $B(f, \delta_1, \delta_2, p, p) \asymp A(\varphi, \delta_1, \delta_2, p, p)$, равно как и в оценках теоремы 1, главную роль могут играть как те, так и другие слагаемые. В этом и проявляется особенность рассматриваемого случая V.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Никольская Н. С. Приближение дифференцируемых функций многих переменных суммами Фурье в метрике L_p // Сиб. матем. ж. 1974. Т. 15. № 2. С. 395–412.
- [2] Потапов М. К., Симонов Б. В., Тихонов С. Ю. О классах Бесова, Бесова–Никольского и об оценках смешанных модулей гладкости дробных производных // Тр. МИАН. 2003. Т. 243. С. 244–256.
- [3] Потапов М. К., Симонов Б. В. О соотношениях между обобщенными классами функций Бесова–Никольского и Вейля–Никольского // Тр. МИАН. 1997. Т. 214. С. 250–266.
- [4] Тихонов С. Ю. Оценки модулей гладкости преобразованного ряда Фурье // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 2002. № 5. С. 58–61.
- [5] Потапов М. К. Исследование некоторых классов функций при помощи приближения “углом” // Тр. МИАН. 1972. Т. 117. С. 256–291.
- [6] Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
- [7] Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.
- [8] Parameswaran S. Partition functions whose logarithms are slowly oscillating // Trans. Amer. Mat. Soc. 1961. V. 100. P. 217–241.
- [9] Tikhonov S. Moduli of smoothness and the interrelation of some classes of functions // Function Spaces. Interpolation Theory and Related Topics. Proc. of the Conf. on Function Spaces, Interpolation Theory And Related Topics in Honour of Jaak Peetre on his 65th Birthday (August 17–22, 2000). Berlin: W. de Gruyter, 2002. P. 413–423.

(М. К. Потапов, С. Ю. Тихонов) Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
14.07.2003

(Б. В. Симонов) Волгоградский технический университет

E-mail: mkpotapov@mail.ru, simonov-b2002@yandex.ru, tikhonov@mccme.ru