Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Г. Складенко, О локально свободных абелевых группах,
Матем. заметки, 2005, том 77, выпуск 1, 121–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2475>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 17:58:08

УДК 512.54

О ЛОКАЛЬНО СВОБОДНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ

Е. Г. Складенко

В статье доказан следующий результат: абелева группа A Lw_1 , w -эквивалентна свободной абелевой группе счетного ранга тогда и только тогда, когда она является счетно свободной абелевой группой.

Библиография: 14 названий.

Группа, в которой все конечно порожденные подгруппы свободны, называется *локально свободной* [1, § 37а]. Предназначенное для некоммутативных групп, это определение, очевидно, не представляет интереса в классе абелевых групп. В настоящей работе рассматриваются исключительно абелевы группы, не имеющие кручения. Таковую группу Σ будем называть локально свободной, если в ней свободны все подгруппы конечного ранга. Эквивалентно, для любой конечно порожденной подгруппы $E \subset \Sigma$ все содержащие E подгруппы $M \subset \Sigma$, имеющие тот же ранг, что и E , свободны.

В этом определении нельзя ограничиться подгруппами ранга 1: существуют группы без кручения ранга 2, не являющиеся свободными, все подгруппы ранга 1 в которых – свободные циклические (ср. с теоремой 88.4 в [2]).

В настоящей работе доказывается, что локально свободные абелевы группы – это в точности пределы простых индуктивных систем абелевых групп. Индуктивная система групп $\{M_\lambda, i_\mu^\lambda\}$ называется *простой*, если составляющие ее группы M_λ свободные конечно порожденные, а отвечающие парам индексов $\lambda < \mu$ отображения $i_\mu^\lambda: M_\lambda \rightarrow M_\mu$ – вложения на прямые слагаемые. Здесь λ – элементы некоторого частично упорядоченного множества, направленного в сторону возрастания.

В соответствии с [3] в случае, если базисные элементы в M_λ могут быть выбраны одновременно таким образом, что для любой пары индексов $\lambda < \mu$ базис в M_μ распадается на подмножества $I(a)$, отвечающие элементам a базиса в M_λ и такие, что элементы $i_\mu^\lambda(a)$ совпадают с суммами элементов из $I(a)$, предельная группа $\varinjlim_\lambda \{M_\lambda\}$ оказывается свободной. Этот результат был использован в [3], в частности, для того, чтобы установить свободу нульмерной группы когомологий с компактными носителями с коэффициентами в кольце главных идеалов любого локально компактного пространства и, как следствие, равенство нулю формально фигурировавшей в теории гомологий Бореля–Мура группы гомологий степени -1 . Результат имеет первостепенное значение

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00705.

в конструкции свободных коцепей типа Чеха с компактными носителями в категории локально компактных пространств (см. [4, § 3], [5, примечание к § 1], замечания после теоремы 3.1 в [6]).

Разумеется, класс локально свободных групп существенно шире класса свободных групп. В силу теоремы 19.2 в [7] к нему относятся, например, все прямые произведения бесконечных циклических групп (и подгруппы таких произведений). В работе строятся локально свободные группы Σ , для которых $\text{Hom}(\Sigma, Z) = 0$. Такие группы не содержат прямых слагаемых, изоморфных прямым произведениям бесконечных циклических групп (и не являются сепарабельными в смысле [2, § 87]).

Определенный интерес представляют проективные системы групп, дуальные к простым индуктивным системам (см. конец работы).

Следующее определение и связанные с ним простые наблюдения содержатся в [7, § 16].

Абелева группа M называется *существенным расширением* своей подгруппы E , если $E \cap B \neq 0$ для всякой другой подгруппы $B \subset M$. Очевидно достаточно, чтобы это свойство выполнялось для всех циклических подгрупп $B \subset M$. Нетрудно убедиться в том, что ранг существенного расширения M группы E тот же, что и у E . Группа M без кручения тогда и только тогда является существенным расширением подгруппы E , когда факторгруппа M/E – группа кручения. В ситуации, когда E – подгруппа некоторой абелевой группы Σ , в Σ имеется единственная подгруппа $M(E)$, служащая максимальным существенным расширением E в Σ .

ЛЕММА 1. *В группе без кручения Σ подгруппы типа $M(E)$ сервантны.*

В самом деле, из сказанного выше следует, что в группе Σ без кручения $M(E)$ – максимальная содержащая E подгруппа, для которой $M(E)/E$ – группа кручения. Если $nx \in M(E)$ для некоторого натурального числа n и какого-то элемента $x \in \Sigma$, то порожденная nx циклическая подгруппа имеет ненулевое пересечение с E и потому для некоторого (кратного n) числа m элемент mx попадает в E . В силу указанного выше свойства максимальной $M(E)$ элемент x должен содержаться в этой группе.

Группу без кручения Σ будем называть локально свободной, если ее подгруппы $M(E)$ свободны для всех конечно порожденных подгрупп $E \subset \Sigma$.

Для элемента x группы без кручения Σ такого, что $nx \in E$ при некотором n , пусть $h(x)$ – минимальное число среди всех таких n . Верхнюю грань в множестве всех таких чисел $h(x)$ будем обозначать через $h(E)$ (не исключено, вообще говоря, что $h(E) = \infty$) и называть *высотой* подгруппы E в группе Σ .

ТЕОРЕМА 1. *Для абелевой группы Σ без кручения эквивалентны утверждения:*

- 1) Σ – локально свободная группа;
- 2) подгруппы конечного ранга в Σ свободны;
- 3) счетные подгруппы группы Σ свободны;
- 4) группы $M(E)/E$ конечны для всех конечно порожденных подгрупп $E \subset \Sigma$;
- 5) $h(E) < \infty$ для всех конечно порожденных подгрупп $E \subset \Sigma$;
- 6) Σ – предел простой индуктивной системы групп.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Факторгруппа группы M конечного ранга по конечно порожденной подгруппе E такого же ранга – группа кручения, поэтому M – некоторое существенное расширение E , содержащееся в $M(E)$. Это обеспечивает эквивалентность первых двух утверждений. Эквивалентность утверждений 2) и 3) – следствие того, что, с одной стороны, группы конечного ранга счетны, и, с другой стороны, всякая счетная группа, все подгруппы конечного ранга в которой свободны, сама свободна (теорема Понтрягина [7, теорема 19.1]). В [7, § 19] группы, для которых справедливо утверждение 3) теоремы, названы $\aleph_1$ -свободными.

Для конечно порожденной подгруппы E группы без кручения Σ группа $M(E)$ тогда и только тогда конечно порождена, когда группа кручения $M(E)/E$ конечна. Это означает эквивалентность утверждений 1) и 4). Из 4) следует 5): конечность $M(E)/E$ влечет, очевидно, конечность высоты $h(E)$. Из 5) следует 1). Группа $M(E)$, если она не свободна, есть объединение счетной последовательности содержащих E и вложенных друг в друга свободных подгрупп $M_1 \subset M_2 \subset \dots$ одного и того же конечного ранга, равного рангу E . Вследствие этого порядки элементов факторгрупп $M_i/E \subset M(E)/E$ с ростом i возрастают, что означает неограниченность определяющих $h(E)$ чисел $h(x)$, т.е. бесконечность высоты $h(E)$ подгруппы E в Σ .

Из 1) следует 6). В самом деле, включение $E_1 \subset E_2$ влечет, очевидно, $M(E_1) \subset M(E_2)$. Для конечно порожденных подгрупп $E_1, E_2 \subset \Sigma$ имеем $M(E_i) \subset M(E_1 + E_2)$, $i = 1, 2$. Следовательно, система подгрупп $\{M(E)\}$, отвечающая всем конечно порожденным подгруппам $E \subset \Sigma$, направлена по включению и

$$\Sigma = \bigcup_{E \subset \Sigma} M(E) = \varinjlim_{E \subset \Sigma} \{M(E)\}.$$

В силу леммы 1 подгруппы $M(E)$ сервантны в Σ , а потому и в $M(E')$ для включений $E \subset E'$. Так как группы $M(E)$ конечно порождены, включения $M(E) \subset M(E')$ расщепляются [7, следствие 28.3], т.е. индуктивная система $\{M(E)\}$ является простой.

Наоборот, пусть

$$\Sigma = \varinjlim_{\lambda} \{M_{\lambda}\}$$

– предел простой индуктивной системы. В этом случае можно считать, что Σ – объединение своих подгрупп M_{λ} . Для любой конечно порожденной подгруппы E в Σ найдется индекс λ , для которого $E \subset M_{\lambda}$. Для элемента $x \in \Sigma$ включение $px \in E$ возможно, очевидно, лишь для $x \in M_{\lambda}$. Следовательно, $M(E) \subset M_{\lambda}$, и потому группа $M(E)$ свободна. Этим установлено, что утверждение 6) влечет 1). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Существуют локально свободные группы Σ , для которых $\text{Hom}(\Sigma, Z) = 0$.*

Заметим, что в соответствии с утверждением 3) теоремы 1 всякая такая группа Σ не содержит счетных прямых слагаемых. В частности, для любых конечно порожденных (а также для любых счетных) подгрупп $E \subset \Sigma$ сервантны в соответствии с леммой 1 подгруппы $M(E) \subset \Sigma$ не являются прямыми слагаемыми.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы начнем с описания некоторых вспомогательных конструкций, позволяющих на их основе строить нужные примеры.

Пусть $\mathcal{J}$ – некоторое несчетное множество мощности $p = p(\mathcal{J})$ и $\mathcal{L} = \{\lambda\}$ – частично упорядоченное по включению множество, состоящее из всех конечных подмножеств $\lambda \subset \mathcal{J}$ и имеющее, следовательно, ту же мощность p . В соответствии с [8] существует проективная система $\{N_\lambda, \Pi_\mu^\lambda\}$ бесконечных множеств N_λ , имеющих мощности $p(N_\lambda) \leq p$, с сюръективными проекциями $\Pi_\mu^\lambda: N_\lambda \rightarrow N_\mu$ для всех пар $\mu < \lambda$ и с пустым обратным пределом $\varprojlim_\lambda \{N_\lambda\} = \emptyset$. Аналогичная проективная система, состоящая из счетных множеств N_λ , определена в [9] над упорядоченным множеством $\mathcal{L}$ всех счетных трансфинитных чисел. Ниже предполагается, что $\{N_\lambda, \Pi_\mu^\lambda\}$ – одна из подобных проективных систем.

Пусть $Z(N_\lambda)$, $\lambda \in \mathcal{L}$, – свободные группы с образующими элементами N_λ . Эти группы образуют проективную систему $\{Z(N_\lambda)\}$ с эпиморфными (и потому расщепляющимися) проекциями $\Pi_\mu^\lambda: Z(N_\lambda) \rightarrow Z(N_\mu)$ для всех $\mu < \lambda$.

ЛЕММА 2. *Имеет место соотношение*

$$\varprojlim_\lambda \{Z(N_\lambda)\} = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что предел отличен от нуля. Пусть z – некоторый отличный от нуля элемент этого предела, z_λ – образ z в группе $Z(N_\lambda)$ и $|z_\lambda|$ – носитель z_λ в множестве N_λ , т.е. конечное множество элементов в N_λ , входящих в разложение z_λ с ненулевыми коэффициентами. Имеем $|z_\mu| \subset \Pi_\mu^\lambda(|z_\lambda|)$ при $\mu < \lambda$. Фиксируем некоторое $\mu \in \mathcal{L}$, для которого $z_\mu \neq 0$ и, следовательно, $|z_\mu| \neq \emptyset$. Пусть $\mathcal{L}'$ – конфинальная часть $\mathcal{L}$, отвечающая всем $\lambda \geq \mu$, и пусть s_λ – прообразы в $|z_\lambda|$ множества $|z_\mu|$ при отображениях Π_μ^λ . Множества s_λ , $\lambda \in \mathcal{L}'$, составляют проективную систему $\{s_\lambda\}$, состоящую из компактных (конечных) множеств, поэтому $\varprojlim_\lambda \{s_\lambda\} \neq \emptyset$ [10, теорема 3.6 гл. VIII]. Поскольку $\mathcal{L}'$ – конфинальная часть $\mathcal{L}$ и $s_\lambda \subset N_\lambda$ при $\lambda \geq \mu$, это противоречит тому, что $\varprojlim_\lambda \{N_\lambda\} = \emptyset$. Лемма доказана.

Для свободной группы $Z(N)$ с множеством образующих N пусть $P(N) = Z(N)^* = \text{Hom}(Z(N), Z)$ – дуальная группа. Как правило, группы $Z(N)$ и $P(N)$ взаимно дуальны, т.е. $Z(N) = P(N)^*$. Более точно [2, следствие 94.6], пока не известно примеров, когда это не так, причем, если взаимная дуальность групп $Z(N)$ и $P(N)$ имеет место для множеств N некоторой мощности p , то она имеет место для всех множеств любой меньшей мощности [2, § 94]. В конструкциях ниже условимся использовать проективные системы $\{N_\lambda, \Pi_\mu^\lambda\}$, для множеств N_λ , в которых имеет место указанная взаимная дуальность.

Вместе с включениями $\rho_\lambda^\mu = (\Pi_\mu^\lambda)^*: P(N_\mu) \rightarrow P(N_\lambda)$ группы $P(N_\lambda) = Z(N_\lambda)^*$ образуют индуктивную систему (над тем же частично упорядоченным множеством индексов $\mathcal{L}$). Определим группу Σ как предел этой системы:

$$\Sigma = \varinjlim_\lambda \{P(N_\lambda)\}.$$

Применяя к случаю $X_\lambda = P(N_\lambda)$ и $Y = Z$ известное соотношение

$$\text{Hom}\left(\varprojlim_{\lambda} \{X_\lambda\}, Y\right) = \varprojlim_{\lambda} \{\text{Hom}(X_\lambda, Y)\} \quad (*)$$

убеждаемся, что $\text{Hom}(\Sigma, Z) = 0$. Остается убедиться, что Σ – локально свободная группа.

Как замечено во введении, в соответствии с теоремой 19.2 в [7] группы $P(N_\lambda)$ локально свободны. Кроме того, для всех пар индексов $\mu < \lambda$ отображения ρ_λ^μ индуктивной системы этих групп – расщепляющиеся включения. С учетом этого аргументы, примененные в заключительной части доказательства теоремы 1, подтверждают, что Σ – локально свободная группа. Теорема 2 доказана.

Заметим, что $\text{Hom}(X, Z) = 0$ для группы $X = \Pi_1^\infty Z / \bigoplus_1^\infty Z$ (это следует из взаимной дуальности $\Pi_1^\infty Z$ и $\bigoplus_1^\infty Z$ при дуализации точной последовательности $0 \rightarrow \bigoplus_1^\infty Z \rightarrow \Pi_1^\infty Z \rightarrow X \rightarrow 0$). Однако группа X не локально свободна: образ в X элемента $\{x_n\} \in \Pi_1^\infty Z$, для которого $x_n = n!$, имеет в X бесконечную высоту.

В заключение отметим очевидную связь аппроксимации локально свободных групп простыми индуктивными системами с задачей описания обратных пределов свободных конечно порожденных групп.

Как известно, мощность обратного предела $A = \varprojlim_i \{A_i\}$ нетривиальной башни групп с эпиморфными проекциями $A_{i+1} \rightarrow A_i$ всегда не менее континуума. Это весьма простое наблюдение оказывается существенным при выяснении условий, обеспечивающих изоморфизм гомологий Чеха, обладающих свойством точности, гомологиям Стиррода–Ситникова (см., например, теорему 4 в [4]), как и при выявлении связанных с приложениями свойств функтора $\varprojlim^1$ (см. [11], [12, § 1], [6, § 1]).

Совсем иная картина наблюдается в классе несчетных проективных систем. Поскольку группа $\Pi_1^\infty Z$ локально свободна и дуальна с $\bigoplus_1^\infty Z$, проективная система, дуальная к аппроксимирующей группу $\Pi_1^\infty Z$ простой индуктивной системе, составлена конечно порожденными свободными группами с эпиморфными проекциями друг в друга, но имеет своим пределом (в силу соотношения (*) выше) счетную группу $\bigoplus_1^\infty Z$ [6, пример 1.2]. Отвечая на вопрос, поставленный в [13], авторы [9] предъявляют пример проективной системы (над счетными трансфинитными числами) счетномерных векторных пространств с эпиморфными проекциями, имеющей нулевой предел. Ясно, что векторные пространства в этом примере могут быть заменены на счетно порожденные свободные группы. Используя результат [8] конструкция, примененная в лемме 2 выше, является усовершенствованием примера 1.1 в [6].

При независимом от [8] и [9] подходе Т. Л. Куренковой [14] изучались различные свойства обратных пределов проективных систем однородных вполне разложимых групп конечного ранга с расщепляющимися эпиморфными проекциями. Ею впервые был сконструирован пример такой системы с нулевым пределом, составленной свободными группами конечного ранга. В соответствии с соотношением (*) такими примерами оказываются проективные системы, дуальные к простым индуктивным системам, представляющим любую локально свободную группу Σ , для которой $\text{Hom}(\Sigma, Z) = 0$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Курош А. Г. Теория групп. М.: Наука, 1967.
- [2] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. М.: Мир, 1977.
- [3] Kaup L., Keane M.S. Induktive Limiten endlich erzeugter freier Moduln // Manuscr. Math. 1969. V. 1. № 1. P. 9–21.
- [4] Скляренко Е. Г. Теория гомологий и аксиома точности // УМН. 1969. Т. 24. № 5. С. 87–140.
- [5] Скляренко Е. Г. К теории обобщенных многообразий // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1971. Т. 35. № 4. С. 831–843.
- [6] Скляренко Е. Г. Некоторые применения функтора $\varprojlim^1$ // Матем. сб. 1984. Т. 123. № 3. С. 369–390.
- [7] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. М.: Мир, 1974.
- [8] Henkin L. A problem on inverse mapping systems // Proc. Amer. Math. Soc. 1950. V. 1. № 2. P. 224–225.
- [9] Higman G., Stone A.H. On inverse systems with trivial limits // J. London Math. Soc. 1954. V. 29. P. 233–236.
- [10] Стинрод Н., Эйленберг С. Основания алгебраической топологии. М.: ИЛ, 1958.
- [11] Gray B.I. Space of the same n -type for all n // Topology. 1966. V. 5. № 3. P. 241–243.
- [12] Харлан А. Э. Локальные гомологии и когомологии, гомологическая размерность и обобщенные многообразия // Матем. сб. 1975. Т. 96. № 3. С. 347–373.
- [13] Zelinsky Rings with ideal nuclei // Duke Math. J. 1951. V. 18. P. 431–442.
- [14] Куренкова Т. Л. Счетные группы как обратные пределы групп конечного ранга // Избранные вопросы алгебры, геометрии и дискретной математики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. С. 47–57.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
07.10.2003