Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Степанов, О разрешении трехмерных терминальных особенностей, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 1, 127–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2476>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 13:56:24

УДК 512

О РАЗРЕШЕНИИ ТРЕХМЕРНЫХ ТЕРМИНАЛЬНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ

Д. А. Степанов

В работе показано, что над трехмерной терминальной точкой типа cD существует не более одного нерационального исключительного дивизора с дискрепантностью 1. Если такой дивизор существует, то он бирационально изоморфен поверхности $\mathbb{P}^1 \times C$, где C – гиперэллиптическая (если $g(C) > 1$) кривая.

Библиография: 12 названий.

1. Введение. Терминальные особенности естественным образом возникают в теории минимальных моделей. В размерности 3 они классифицированы Ридом, Мори, Колларом и Шеферд-Барроном (см. [1]–[3]). Относящиеся к этой тематике определения, терминология и основные факты подробно изложены в ряде обзоров ([4], [5]), поэтому мы пользуемся ими без особых оговорок. Далее везде, где идет речь о терминальных особенностях, они предполагаются трехмерными и определенными над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

В соответствии с классификацией любая трехмерная терминальная особенность аналитически изоморфна либо составной двувалевской точке (типы cA , cD и cE), либо ее фактору по некоторой конечной циклической группе (типы cA/r , $cAx/2$, $cAx/4$, $cD/2$, $cD/3$, $cE/2$). Однако разрешения таких особенностей, бирациональные и комбинаторные свойства исключительных дивизоров до сих пор не описаны. В этой работе изучаются разрешения трехмерных терминальных особенностей типа cD .

Пусть $f_i: X_i \rightarrow X$, $i = 1, 2$, – два разрешения терминальной особенности X и $E_i \subseteq \text{Exc}(f_i)$ – простые исключительные дивизоры. Если соответствующие этим дивизорам дискретные нормирования поля $k(X)$ совпадают, то поверхности E_i бирационально изоморфны. Поэтому говорят, что дивизор E_1 (E_2) входит как в разрешение X_1 , так и в X_2 . Для трехмерной терминальной особенности дивизоры с дискрепантностью $a < 1$ входят в любое разрешение. Дивизоры с дискрепантностью $a \leq 1$ и центром в данной терминальной точке появляются в каждом дивизориальном разрешении.

Известно, что исключительные дивизоры разрешений трехмерных терминальных особенностей являются бирационально-линейчатыми поверхностями, т.е. покрываются рациональными кривыми. Это следует из [6, 2.14]. В работе [7] Ю. Г. Прохоров получил

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00441, фонда INTAS, грант INTAS-OPEN 2000 № 269, а также программы поддержки ведущих научных школ, грант № НШ-489.2003.1.

более сильный результат для особенностей типа cA/r . Он доказал, что для терминальной особенности (X, o) типа cA/r , $r \geq 1$, все дивизоры с центром в o и дискрепантностью $a \leq 1$ рациональны. Аналогичное утверждение для других типов терминальных особенностей неверно (см. примеры в разделе 4).

Мы получили описание нерациональных исключительных дивизоров с дискрепантностью 1 над горенштейновыми (индекс $r = 1$) терминальными особыми точками типа cD . Наш результат точно сформулирован ниже в теореме 1.1. Сначала введем некоторые обозначения.

Пусть $\mathbb{C}\{x, y, z, t\}$ – кольцо сходящихся степенных рядов с комплексными коэффициентами от четырех переменных и пусть с каждой переменной связано некоторое положительное рациональное число: $w(x), w(y), w(z), w(t)$, называемое ее весом. Тогда можно определить вес любого монома $M = x^a y^b z^c t^d$ как

$$w(M) = aw(x) + bw(y) + cw(z) + dw(t)$$

и вес любой функции (ряда) $g \in \mathbb{C}\{x, y, z, t\}$, $g = \sum_I a_I M_I$, где $a_I \in \mathbb{C}$, M_I – мономы, как

$$w(g) = \min\{w(M_I) \mid a_I \neq 0\}.$$

Через $g_{w=n}(x, y, z, t)$, где n – рациональное число, будем обозначать многочлен

$$\sum_{M_I : w(M_I)=n} a_I M_I$$

– часть g веса n , а через $g_{w>n}(x, y, z, t)$ – ряд

$$\sum_{M_I : w(M_I)>n} a_I M_I.$$

В случае, когда веса совпадают с обычной степенью ($w(x) = w(y) = w(z) = w(t) = 1$), будем писать просто $g_n(x, y, z, t)$, $g_{>n}(x, y, z, t)$.

Согласно [8] особенность типа cD_4 аналитически изоморфна гиперповерхности в $\mathbb{C}^4$ с уравнением

$$x^2 + g(y, z, t) = 0, \quad (1)$$

где ряд g начинается с членов степени 3 и уравнение $g_3(y, z, t) = 0$ определяет приведенную кубику в $\mathbb{P}^2$. Особенность типа cD_{n+1} , $n \geq 4$, аналитически изоморфна гиперповерхности в $\mathbb{C}^4$ с уравнением

$$x^2 + y^2 z + g(y, z, t) = 0, \quad (2)$$

где ряд g начинается с членов степени 4 или больше. Ниже (лемма 2.5) мы покажем, что можно считать выполненными следующие условия. Присвоим переменным такие веса: $w(x) = n/2$, $w(y) = (n-1)/2$, $w(z) = w(t) = 1$. Тогда

- а) вес функции g равен $w(g) = n$;
- б) если $n = 2k-1$, $k > 2$, то многочлен $y^2 z + g_{w=2k-1}(y, z, t)$ определяет в $\mathbb{P}(k-1, 1, 1)$ приведенную кривую.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть трехмерная терминальная особенность $(X, 0) \subset \mathbb{C}^4$ типа cD_{n+1} , $n \geq 3$, задана уравнением (1) или (2), причем выполнены условия а) и б). Существует не более одного нерационального дивизора E с дискрепантностью 1 и центром в 0. Если такой дивизор существует, то в случае $n = 2k - 1$ он реализуется как один из исключительных дивизоров взвешенного раздутия с весами $(k, k - 1, 1, 1)$, а в случае $n = 2k$ — как один из исключительных дивизоров взвешенного раздутия с весами $(k, k, 1, 1)$. В обоих случаях E представляет собой бирационально-линейчатую поверхность над гиперэллиптической кривой рода не более $k - 1$.

Для доказательства теоремы 1.1 мы покажем, что для любой терминальной особенности типа cD существует дивизориальное разрешение, содержащее не более одного нерационального дивизора с дискрепантностью 1. Для особенностей типа cD_4 доказательство фактически содержится в работе [9, 2.13], поэтому далее мы этот случай не рассматриваем.

Автор признателен Ю. Г. Прохорову за постановку задачи и обсуждения по ходу работы. Также автор благодарен В. А. Исковских и С. А. Кудрявцеву, чьи консультации были очень полезны.

2. Предварительные сведения. Основным техническим средством нашей работы является взвешенное раздутие. С этим понятием можно познакомиться по статьям [2], [10]. Нам потребуется вычислять дискрепантности исключительных дивизоров взвешенных раздутий. Для этого мы будем применять следующую лемму.

ЛЕММА 2.1. Пусть $X = \{f(x, y, z, t) = 0\}$ — нормальная гиперповерхность в $\mathbb{C}^4$, $\sigma: \mathbb{C}_\sigma^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ — взвешенное раздутие с весами (w_1, w_2, w_3, w_4) , $\mathbb{C}_\sigma^4 \supset Y$ — собственный прообраз X , E — исключительный дивизор σ . Предположим, что Y тоже нормальна и $E|_Y = \sum t_i E_i$, E_i — простые дивизоры, t_i — их кратности в $E|_Y$. Тогда дискрепантность

$$a(E_i, X) = t_i(w_1 + w_2 + w_3 + w_4 - 1 - w(f)),$$

где $w(f)$ — вес функции f при весах переменных $w(x) = w_1, \dots, w(t) = w_4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [11, 2.3], или [10, 3.9].

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Как известно, гиперповерхность в $\mathbb{C}^n$ нормальна тогда и только тогда, когда ее особенности лежат в коразмерности 2. Нормальность сохраняется при факторизации по конечной группе; следовательно, то же верно для гиперповерхностей в $\mathbb{C}^n/G$. Все многообразия, которые мы будем рассматривать, являются гиперповерхностями в $\mathbb{C}^n/G$ и, как будет ясно, их особенности лежат в коразмерности 2. Поэтому далее мы не будем всякий раз отдельно проверять условия применимости леммы 2.1.

Часто необходимо вычислить дискрепантность $a(E, X)$ некоторого дивизора E над особенностью X , когда известна его дискрепантность $a(E, Y)$ над некоторым раздутием $\sigma: Y \rightarrow X$.

ЛЕММА 2.3. Пусть $\sigma: Y \rightarrow X$ — такое же взвешенное раздутие, как в лемме 2.1, и $K_Y \equiv \sigma^* K_X + \sum_{i=1}^n a_i E_i$. Пусть еще $\pi: Z \rightarrow Y$ — некоторое разрешение,

F_j – его исключительные дивизоры и выполнены равенства

$$K_Z \equiv \pi^* K_Y + \sum b_j F_j,$$

$$\pi^* E_i \equiv E'_i + \sum m_{ij} F_j, \quad i = 1, \dots, n,$$

где E'_i – собственный прообраз E_i . Тогда $a(F_j, X) = b_j + \sum_i a_i m_{ij}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. $\pi^* K_Y$ и $\pi^* E_i$ определены, ибо в условиях леммы 2.1 K_Y и E_i – $\mathbb{Q}$ -Картье дивизоры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Надо сравнить K_Z и $\pi^*(\sigma^* K_X)$. См. также [10, 5.3] и [9, 2.15].

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Пусть в обозначениях лемм 2.1 и 2.3 особенность $(X, 0)$ терминальна, дивизор $E|_Y$ приведен и $a(E_i, X) = 1$ для любой его компоненты E_i . Известно [5, 6.4], что общий член F линейной системы $| -K_X |$ – поверхность с дювалевской особенностью. Тогда по теореме об обращении формулы присоединения пара (X, F) лог-терминальна. Учитывая, что $K_X + F \equiv 0$, получаем, что пара (X, F) канонична и $a(E_i, X, F) = 0$. Но тогда и пара (Y, F') , где F' – собственный прообраз F , канонична. Поэтому многообразие Y имеет не хуже, чем канонические особенности.

Теперь покажем, как можно добиться выполнения условий а) и б) (см. также [8, § 2, следствие 2]).

ЛЕММА 2.5. Пусть трехмерная терминальная особенность $(X, 0) \subset \mathbb{C}^4$ типа cD_{n+1} , $n \geq 4$, задана уравнением

$$x^2 + y^2 z + g(y, z, t) = 0,$$

где ряд g начинается с членов степени 4 или выше. Присвоим переменным следующие веса: $w(x) = n/2$, $w(y) = (n-1)/2$, $w(z) = w(t) = 1$. Существует такая аналитическая замена координат, что в новых переменных уравнение особенности имеет тот же вид, вес новой функции g равен $w(g) = n$ и многочлен $y^2 z + g_{w=n}(y, z, t)$ не содержит в своем разложении на неприводимые кратных множителей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что если cDV -особенность имеет тип cD_{n+1} , то все ее гиперплоские сечения имеют тип D_{n+1} или хуже (в смысле порядка, введенного в [11]). Пусть сначала $w(g) = k$. Ясно, что если $k < n$, то $g_{w=k} = yf(z, t) + h(z, t)$ (если n четное, то $f = 0$ или $h = 0$). Если $g_{w=k}$ делится на z , $g_{w=k} = z(yf_1 + h_1)$ и $y^2 + yf_1 + h_1 = (y + a(z, t))^2$ – квадрат, то замена вида $y_1 = y + a(z, t)$ сохраняет вид уравнения особенности, но вес функции g увеличивается. Продолжая таким же образом, мы придем в одну из следующих ситуаций:

- 1) $k = w(g) < n$ и либо $g_{w=k}$ не делится на z , либо $y^2 + yf_1 + h_1$ не квадрат, или
- 2) $w(g) \geq n$.

Но ситуация 1) невозможна. Действительно, рассмотрим сечение $t = \alpha z$ для достаточно общего α . Уравнение сечения имеет вид $x^2 + y^2 z + g'(y, z) = 0$, $w(g') = k < n$. Применяя стандартные методы теории особенностей [12], получим, что это сечение имеет тип D_{k+1} , $k < n$, – противоречие. Но и случай $w(g) > n$ невозможен, ибо тогда наша особенность имела бы тип cD_{n+2} или хуже. Следовательно, $w(g) = n$. Если бы при этом многочлен $g_{w=n}$ делился на z и соответствующий многочлен $y^2 + yf_1 + h_1$ был полным квадратом, то мы снова могли бы сделать замену переменных и получить $w(g) > n$, что невозможно. Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 1.1.

3.1. *Случай cD_{2k} .* Пусть терминальная особенность $(X, 0)$ задана в $\mathbb{C}^4$ уравнением

$$x^2 + y^2 z + g(y, z, t) = 0,$$

где при весах переменных, указанных перед теоремой 1.1, вес функции g равен $2k - 1$, $k > 2$, и многочлен $f = y^2 z + g_{w=2k-1}(y, z, t)$ не содержит в своем разложении на неприводимые кратных множителей. Рассмотрим взвешенное раздутие σ пространства $\mathbb{C}^4$ с весами $(k, k - 1, 1, 1)$. Обозначим через X_1 собственный прообраз X при этом раздутии и через E – исключительный дивизор ограничения σ на X_1 . Тогда E лежит во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}_{(x, y, z, t)}(k, k - 1, 1, 1)$ и задается уравнением

$$f = y^2 z + g_{w=2k-1}(y, z, t) = 0.$$

(Мы обозначили координаты во взвешенном проективном пространстве теми же буквами, что и в $\mathbb{C}^4$.) Ниже мы увидим, что на X_1 лежат только изолированные особенности. Поэтому X_1 нормально и по лемме 2.1 можно посчитать дискрепантность $a(X, E_i) = 1$ для любой компоненты E (по условию б) E приведен). Ясно, что E представляет собой бирационально-линейчатую поверхность над кривой $\{f(y, z, t) = 0\}$ в $\mathbb{P}_{(y, z, t)}(k-1, 1, 1)$. Если эта кривая (квази)гладкая, то, как нетрудно вычислить, ее род равен $k - 1$. В общем случае эта кривая может иметь особенности и быть приводимой. Если она приводима, то либо $f = z f_1$, либо $f = y f_2$, где многочлен f_2 линеен по y . Многочлен f_1 в свою очередь может разлагаться на два линейных по y множителя. Отсюда видно, что данная кривая, а вместе с ней и поверхность E , имеет не более одной нерациональной компоненты C . Переменная y входит в ее уравнение в степени 2; следовательно, кривая C гиперэллиптическая.

Для доказательства теоремы 1.1 достаточно показать, что других нерациональных дивизоров с дискрепантностью 1 над особенностью X нет. Для этого мы исследуем особенности на X_1 . Раздутие $\mathbb{C}^4$ и X_1 покрываются четырьмя аффинными картами, каждую из которых мы рассмотрим отдельно.

В первой карте $U_1 \simeq \mathbb{C}^4 / \mathbb{Z}_k(1, 1, -1, -1)$ отображение σ задается формулами

$$x = x_1^k, \quad y = x_1^{k-1} y_1, \quad z = x_1 z_1, \quad t = x_1 t_1.$$

Поэтому X_1 определяется уравнением

$$f_1 = x_1 + y_1^2 z_1 + g_{w=2k-1}(y_1, z_1, t_1) + x_1^{-(2k-1)} g_{w>2k-1}(x_1^{k-1} y_1, x_1 z_1, x_1 t_1) = 0.$$

Особенности X_1 могут лежать только на исключительном дивизоре $\{x_1 = 0\}$. Ниже мы полностью исследуем третью и четвертую карты, так что здесь можно ограничиться рассмотрением множества $\{z_1 = t_1 = 0\}$, которое ими не покрывается. Из этих условий с учетом того, что многочлен $g_{w=2k-1}$ не содержит мономов, зависящих только от y_1 , следует, что на нашем множестве $\partial f_1 / \partial x_1 = 1$. Значит, f_1 определяет гиперповерхность, гладкую на $\{x_1 = z_1 = t_1 = 0\}$. Группа $\mathbb{Z}_k$ имеет на этой гиперповерхности

только одну неподвижную точку $-(0, 0, 0, 0)$. Следовательно, X_1 имеет в первой карте только одну изолированную циклическую факторособенность (по [5, 5.2] она терминальна). Такая особенность тороидална, поэтому можно построить ее дивизориальное разрешение, имеющее только рациональные исключительные дивизоры.

Во второй карте $U_2 \simeq \mathbb{C}^4 / \mathbb{Z}_{k-1}(-1, 1, -1, -1)$ отображение σ задается формулами

$$x = y_2^k x_2, \quad y = y_2^{k-1}, \quad z = y_2 z_2, \quad t = y_2 t_2.$$

Многообразие X_1 определяется уравнением

$$f_2 = x_2^2 y_2 + z_2 + g_{w=2k-1}(1, z_2, t_2) + y_2^{-(2k-1)} g_{w>2k-1}(y_2^{k-1}, y_2 z_2, y_2 t_2) = 0.$$

Как и в первой карте, ограничимся рассмотрением множества $\{y_2 = z_2 = t_2 = 0\}$. Тогда $\partial f_2 / \partial z_2 = 1$, т.е. f_2 определяет гладкую гиперповерхность. Мы снова получаем, что X_1 имеет во второй карте единственную изолированную циклическую (терминальную) факторособенность. Эту особенность можно дивизориально разрешить, вклеив только рациональные дивизоры.

В третьей карте $U_3 \simeq \mathbb{C}^4$ отображение σ задается формулами

$$x = z_3^k x_3, \quad y = z_3^{k-1} y_3, \quad z = z_3, \quad t = z_3 t_3.$$

Многообразие X_1 определяется уравнением

$$f_3 = x_3^2 z_3 + y_3^2 + g_{w=2k-1}(y_3, 1, t_3) + z_3 g_{w=2k}(y_3, 1, t_3) + z_3^{-(2k-1)} g_{w>2k}(z_3^{k-1} y_3, z_3, z_3 t_3) = 0.$$

Особенности X_3 лежат на исключительном дивизоре $\{z_3 = 0\}$. Их можно найти из системы

$$\begin{aligned} y_3^2 + g_{w=2k-1}(y_3, 1, t_3) &= 0, & 2y_3 + \frac{\partial}{\partial y_3} g_{w=2k-1}(y_3, 1, t_3) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t_3} g_{w=2k-1}(y_3, 1, t_3) &= 0, & x_3^2 + g_{w=2k}(y_3, 1, t_3) &= 0, & z_3 &= 0. \end{aligned}$$

Из этой системы видно, что для того, чтобы X_1 имело особенности в третьей карте, необходимо, чтобы имела особенности кривая

$$\{y_3^2 + g_{w=2k-1}(y_3, 1, t_3) = 0\} \subset \mathbb{C}_{(y_3, t_3)}^2.$$

Кратность ее особенностей равна 2. Отсюда следует, что у X_1 в третьей карте может быть только конечное число изолированных cDV -точек. Дискрепантность $a(F, X_1)$ любого дивизора F над такой точкой ≥ 1 , а следовательно (по лемме 2.3), $a(F, X) > 1$ и он нас не интересует.

В четвертой карте $U_4 \simeq \mathbb{C}^4$ отображение σ задается формулами

$$x = t_4^k x_4, \quad y = t_4^{k-1} y_4, \quad z = t_4 z_4, \quad t = t_4.$$

Многообразие X_1 определяется уравнением

$$f_4 = x_4^2 t_4 + y_4^2 z_4 + y_4 f(z_4, 1) + h(z_4, 1) + t_4 g_{w=2k}(y_4, z_4, 1) \\ + t_4^{-(2k-1)} g_{w>2k}(t_4^{k-1} y_4, t_4 z_4, t_4) = 0,$$

где мы положили $g_{w=2k-1} = yf(z, t) + h(z, t)$. Особенности лежат на исключительном дивизоре $\{t_4 = 0\}$; кроме этого, так как третью карту мы исследовали полностью, можно считать, что $z_4 = 0$.

Чтобы многообразие X_1 имело особенности, необходимо $f(0, 1) = h(0, 1) = 0$. Линейной заменой y_4 приведем уравнение X_1 к виду

$$x_4^2 t_4 + y_4^2 z_4 + z_4 h_1(z_4) + t_4 g_{w=2k}(y_4, z_4, 1) + t_4^2 h'(y_4, z_4, t_4) = 0,$$

где h' – некоторая функция, а h_1 – многочлен. Далее нетрудно показать, что если выполнено одно из условий $\partial h_1 / \partial z_4(0) \neq 0$, $\partial^2 h_1 / \partial z_4^2(0) \neq 0$, или в $t_4 g_{w=2k}(y_4, z_4, 1)$ входит хотя бы один моном степени 2, то X_1 имеет в четвертой карте только изолированные cDV -точки. Если же ни одно из этих условий не выполнено, то X_1 имеет в начале координат изолированную особенность вида

$$x_4^2 t_4 + y_4^2 z_4 + g'(y_4, z_4, t_4) = 0,$$

где ряд g' начинается с членов степени 3 или выше. Эта особенность не терминальна, но, как мы знаем из замечания (2.4), она канонична. Следовательно, по лемме 2.3 для завершения доказательства теоремы 1.1 достаточно показать, что все дивизоры дискрепантности 0 над такой особенностью рациональны.

Во-первых заметим, что заменой переменных можно добиться, чтобы часть g' степени 3 имела вид

$$g'_3 = a_1 z_4^3 + a_2 t_4 z_4^2 + a_3 t_4^2 y_4 + a_4 t_4^2 z_4 + a_5 t_4^3, \quad (3)$$

где $a_i, i = 1, \dots, 5$, – некоторые числа. Сделаем обыкновенное раздутие σ_1 начала координат карты U_4 и обозначим X_2 собственный прообраз X_1 , а E_1 – исключительный дивизор ограничения отображения σ_1 на X_2 . Поверхность E_1 задается в $\mathbb{P}^3$ уравнением

$$x_4^2 t_4 + y_4^2 z_4 + g'_3(y_4, z_4, t_4) = 0.$$

По переменным x_4 и y_4 степень этого уравнения 2. В аффинном куске $\{t_4 \neq 0\}$ рассмотрим сечения плоскостями $z_4 = \text{const}$. Если общее сечение – неприводимая коника, то E_1 – рациональная поверхность. В противном случае уравнение E_1 имеет вид

$$x_4^2 + z_4(y_4 + (\dots))^2 = 0,$$

где под $(\dots)$ понимаются некоторые линейные по z_4 и t_4 члены. Очевидно, E_1 снова рациональна.

Теперь исследуем новые особенности, которые могут появиться на многообразии X_2 . Для этого снова нужно рассмотреть четыре карты $V_i \simeq \mathbb{C}^4, i = 1, 2, 3, 4$.

В первой карте V_1 уравнение многообразия X_2

$$f'_1 = t'_1 + (y'_1)^2 z'_1 + g'_3(y'_1, z'_1, t'_1) + (x'_1)^{-3} g'_{>3}(x'_1 y'_1, x'_1 z'_1, x'_1 t'_1) = 0.$$

Особенности лежат на исключительном дивизоре $\{x'_1 = 0\}$ и определяются из системы

$$\begin{aligned} f'_1(0, y'_1, z'_1, t'_1) &= t'_1 + (y'_1)^2 z'_1 + g'_3(y'_1, z'_1, t'_1) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y'_1} f'_1(0, y'_1, z'_1, t'_1) &= 2y'_1 z'_1 + a_3(t'_1)^2 = 0, \\ \frac{\partial}{\partial z'_1} f'_1(0, y'_1, z'_1, t'_1) &= (y'_1)^2 + 3a_1(z'_1)^2 + 2a_2 t'_1 z'_1 + a_4 t'_1 = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t'_1} f'_1(0, y'_1, z'_1, t'_1) &= 1 + a_2(z'_1)^2 + 2t'_1(a_3 y'_1 + a_4 z'_1 + a_5 t'_1) + a_5(t'_1)^2 = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x'_1} f'_1(0, y'_1, z'_1, t'_1) &= g'_4(y'_1, z'_1, t'_1) = 0. \end{aligned}$$

Домножим второе, третье и четвертое уравнения соответственно на y'_1 , z'_1 и t'_1 , сложим и сравним с первым. Учитывая (3), получим, что $t'_1 = 0$. Тогда y'_1 и z'_1 находятся из системы

$$2y'_1 z'_1 = 0, \quad (y'_1)^2 + 3a_1(z'_1)^2 = 0, \quad 1 + a_2(z'_1)^2 = 0.$$

Из нее следует, что X_2 имеет особенности в первой карте, только если $a_1 = 0$, а $a_2 \neq 0$. Все эти особенности – изолированные точки типа cA . По лемме 2.3 исключительные дивизоры над ними имеют дискрепантность > 1 над X .

Во второй карте V_2 уравнение многообразия X_2

$$(x'_2)^2 t'_2 + z'_2 + g'_3(1, z'_2, t'_2) + (y'_2)^{-3} g'_{>3}(y'_2, y'_2 z'_2, y'_2 t'_2) = 0.$$

Особенности лежат на исключительном дивизоре $\{y'_2 = 0\}$. Кроме этого можно считать $x'_2 = 0$, ибо мы полностью исследовали карту V_1 . Поэтому особенности можно найти из системы

$$\begin{aligned} z'_2 + g'_3(1, z'_2, t'_2) &= 0, \quad 1 + \frac{\partial}{\partial z'_2} g'_3(1, z'_2, t'_2) = 3a_1(z'_2)^2 + 2a_2 z'_2 t'_2 + a_4(t'_2)^2 = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t'_2} g'_3(1, z'_2, t'_2) &= a_2(z'_2)^2 + 2a_3 t'_2 + 2a_4 z'_2 t'_2 + 3a_5(t'_2)^2 = 0, \quad g'_4(1, z'_2, t'_2) = 0. \end{aligned}$$

Домножим второе и третье уравнения соответственно на z'_2 и t'_2 , сложим и сравним с первым. Учитывая (3), получим уравнение

$$2z'_2 + a_3(t'_2)^2 = 0.$$

Если $a_3 = 0$, то $z'_2 = 0$. В этом случае X_2 либо неособо, либо имеет две особые точки типа cA . Если $a_3 \neq 0$, то подставив $z'_2 = -(a_3/2)(t'_2)^2$ во второе уравнение системы, получим нетривиальное уравнение на t'_2 . Поэтому X_2 может иметь во второй карте только конечное число изолированных особых точек $(0, 0, z'_2{}^{(i)}, t'_2{}^{(i)})$. Все они имеют тип cDV и, следовательно, не могут дать дивизоров с дискрепантностью 1 над X .

В третьей карте V_3 уравнение многообразия X_2

$$(x'_3)^2 t'_3 + (y'_3)^2 + g'_3(y'_3, 1, t'_3) + (z'_3)^{-3} g'_{>3}(z'_3 y'_3, z'_3, z'_3 t'_3) = 0.$$

Здесь осталось проверить особенности на оси t'_3 . Очевидно, что гиперплоское сечение вида $t'_3 = \text{const}$ при $\text{const} \neq 0$ неособо или имеет тип A . При $t'_3 = 0$ рассмотрим сечение

вида $t'_3 = \alpha z'_3$ для достаточно общего α : оно имеет тип не хуже cD . Таким образом, в третьей карте X_2 имеет только cDV -точки. Если они изолированы, то доказательство завершается как и в предыдущих случаях. Неизолированный случай рассмотрим ниже.

В четвертой карте V_4 уравнение многообразия X_2

$$(x'_4)^2 + (y'_4)^2 z'_4 + g'_3(y'_4, z'_4, 1) + (t'_4)^{-3} g'_{>3}(t'_4 y'_4, t'_4 z'_4, t'_4) = 0.$$

Тут остается исследовать только точку $(0, 0, 0, 0)$. Гиперплоское сечение вида $t'_4 = \alpha z'_4$ для достаточно общего α имеет тип D . То есть и в четвертой карте X_2 имеет только cDV -особенности. В изолированном случае доказательство заканчивается, как в картах V_1 и V_2 .

Остается рассмотреть случай, когда многообразии X_2 имеет неизолированную cDV -особенность вдоль некоторой проективной прямой l , причем в общей точке этой прямой особенность имеет тип cA . По лемме 2.3 нас интересуют только дивизоры с дискрепантностью 0 над X_2 . Центр любого такого дивизора на многообразии X_2 – прямая l . Поэтому достаточно показать, что особенность в общей точке l можно разрешить, вклеив только рациональные дивизоры.

Так как нас интересует только общая точка прямой l , можно ограничиться одним аффинным куском X_2 , например, лежащим в карте V_3 . Итак, пусть наша особенность задана уравнением

$$(x'_3)^2 t'_3 + (y'_3)^2 + h'(y'_3, z'_3, t'_3) = 0,$$

имеет тип cA_n , причем особенности лежат вдоль оси t'_3 . Сделаем раздутие этой оси. Если $n = 1$ (это означает, что в h' есть хотя бы один моном степени 2 по y'_3 и z'_3), то первое же раздутие разрешает особенность в общей точке l , причем исключительный дивизор рационален. Если $n \geq 2$, то рациональность исключительного дивизора видна из его уравнения в $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{C}^1$:

$$(x'_3)^2 t'_3 + (y'_3)^2 = 0.$$

При $n = 2$ особенность в общей точке прямой l также разрешается за одно раздутие. Пусть дальше $n > 2$.

Раздутое многообразие X_3 покрывается тремя картами $X_3 \cap (W_i \simeq \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^1)$, $i = 1, 2, 3$.

В первых двух картах многообразии X_3 неособо. В третьей карте многообразие X_3 задано уравнением

$$u_3^2 t'_3 + v_3^2 + w_3^{-2} h'(w_3 v_3, w_3, t'_3) = 0.$$

Так как в первых двух картах X_3 неособо, здесь особенности могут лежать только вдоль оси t'_3 . Благодаря делению функции h' на w_3^2 общее сечение $t'_3 = \text{const}$ имеет тип cA_{n-2} , т.е. мы приходим к той же ситуации, с которой начинали, но уже с меньшим n . Поэтому конечное число раздутий прямых разрешает особенность в общей точке l и исключительные дивизоры этих раздутий рациональны, что и требовалось доказать.

3.2. Случай cD_{2k+1} . Пусть терминальная особенность $(X, 0)$ задана в $\mathbb{C}^4$ уравнением

$$x^2 + y^2 z + g(y, z, t) = 0,$$

где при весах переменных, указанных перед теоремой 1.1, вес функции g равен $2k$, $k > 2$. Рассмотрим взвешенное раздутие σ с весами $(k, k, 1, 1)$. Исключительный дивизор E его ограничения на собственный прообраз особенности X задан в $\mathbb{P}(k, k, 1, 1)$ уравнением

$$x^2 + g_{w=2k}(z, t) = 0$$

и представляет собой бирационально-линейчатую поверхность над соответствующей кривой C в $\mathbb{P}(k, 1, 1)$. Заметим, что E либо неприводим и приведен, $a(E, X) = 1$, либо распадается на две приведенные рациональные компоненты. Если кривая C (квази)гладкая, то ее род равен $k - 1$. Переменная x входит в уравнение для C в степени 2, поэтому если кривая C неприводима, то она гиперэллиптическая.

Далее, обозначим через X_1 собственный прообраз X при морфизме σ и изучим его особенности. Многообразие X_1 покрывается четырьмя картами, каждую из которых мы рассмотрим отдельно.

В первой карте $U_1 \simeq \mathbb{C}^4 / \mathbb{Z}_k(1, 0, -1, -1)$ отображение σ задается формулами

$$x = x_1^k, \quad y = x_1^k y_1, \quad z = x_1 z_1, \quad t = x_1 t_1.$$

Многообразие X_1 определяется уравнением

$$1 + x_1 y_1^2 z_1 + g_{w=2k}(z_1, t_1) + x_1^{-2k} g_{w>2k}(x_1^k y_1, x_1 z_1, x_1 t_1) = 0.$$

Его особенности лежат на исключительном дивизоре $\{x_1 = 0\}$. Так как функция $g_{w=2k}$ однородна, в особой точке $g_{w=2k} = 0$. Следовательно, X_1 в первой карте неособо.

Во второй карте $U_2 \simeq \mathbb{C}^4 / \mathbb{Z}_k(0, 1, -1, -1)$ отображение σ задается формулами

$$x = y_2^k x_2, \quad y = y_2^k, \quad z = y_2 z_2, \quad t = y_2 t_2.$$

Многообразие X_1 определяется уравнением

$$x_2^2 + y_2 z_2 + g_{w=2k}(z_2, t_2) + y_2^{-2k} g_{w>2k}(y_2^k, y_2 z_2, y_2 t_2) = 0.$$

Можно считать, что $x_2 = y_2 = 0$, ибо особенности лежат на исключительном дивизоре и мы полностью исследовали первую карту. Кроме этого будем считать, что $z_2 = t_2 = 0$, потому что ниже мы полностью рассмотрим третью и четвертую карты, т.е. нужно проверить только точку $(0, 0, 0, 0)$. Очевидно, что в ней многообразие X_1 имеет особенность типа sA_1/k . Эта особенность может быть неизолированной. В изолированном случае все дивизоры с дискрепантностью $a < 1$ над X_1 рациональны по результату Прохорова [7]. Дивизоры с большими дискрепантностями нас не интересуют (лемма 2.3). Неизолированный случай мы рассмотрим ниже.

В третьей карте $U_3 \simeq \mathbb{C}^4$ отображение σ задается формулами

$$x = z_3^k x_3, \quad y = z_3^k y_3, \quad z = z_3, \quad t = z_3 t_3.$$

Многообразие X_1 определяется уравнением

$$x_3^2 + y_3^2 z_3 + g_{w=2k}(1, t_3) + z_3^{-2k} g_{w>2k}(z_3^k y_3, z_3, z_3 t_3) = 0.$$

По тем же соображениям, что и выше, можно считать, что особенности лежат в множестве $\{x_3 = z_3 = 0\}$. Поэтому особые точки находятся из системы

$$g_{w=2k}(1, t_3) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t_3} g_{w=2k}(1, t_3) = 0, \quad y_3^2 + g_{w=2k+1}(y_3, 1, 0) = 0.$$

Так как $g_{w=2k}(1, t)$ не равно тождественно нулю, отсюда видно, что многообразие X_1 может иметь в карте U_3 только изолированные cDV -точки. Дивизоры над этими точками имеют дискрепантности $a > 1$ над X .

В четвертой карте $U_4 \simeq \mathbb{C}^4$ отображение σ задается формулами

$$x = t_4^k x_4, \quad y = t_4^k y_4, \quad z = t_4 z_4, \quad t = t_4.$$

Многообразие X_1 определяется уравнением

$$x_4^2 + y_4^2 z_4 t_4 + g_{w=2k}(z_4, 1) + t_4^{-2k} g_{w>2k}(t_4^k y_4, t_4 z_4, t_4) = 0.$$

Неисследованными остаются только особенности, лежащие в $\{x_4 = z_4 = t_4 = 0\}$, т.е. на оси y_4 . Представим квазиоднородную часть степени $2k + 1$ функции g следующим образом:

$$g_{w=2k+1} = y h_{w=k+1}(z, t) + h_{w=2k+1}(z, t).$$

Тогда в особой точке должно выполняться равенство (полученное путем дифференцирования уравнения X_1 по t_4)

$$y_4 h_{w=k+1}(0, 1) + h_{w=2k+1}(0, 1) = 0.$$

Если это уравнение на y_4 нетривиально, то X_1 имеет в четвертой карте не более одной особой точки, тип которой cA . Если же

$$\frac{\partial}{\partial t_4} g_{w=2k}(0, 1) = g_{w=2k}(0, 1) = h_{w=k+1}(0, 1) = h_{w=2k+1}(0, 1) = 0,$$

то X_1 обладает неизолитрованной особенностью вдоль оси y_4 . Гиперплоское сечение вида $y_4 = \text{const} = \alpha$ имеет, очевидно, тип A_1 для общего α . Пусть z_4^3 делит $g_{2k}(z_4, 1)$ и мономы $y_4 z_4 t_4$ и $z_4 t_4$ входят в ряд $t_4^{-2k} g_{w>2k}(t_4^k y_4, t_4 z_4, t_4)$ с коэффициентами b и c соответственно. Тогда при тех α , которые являются корнями квадратного уравнения $y_4^2 + b y_4 + c = 0$, сечение $y_4 = \alpha$ имеет худшие, чем A , особенности: если корни данного уравнения различны, то тип этих особенностей D , если же уравнение имеет один двукратный корень α_0 , то особенность в точке $(0, \alpha_0, 0, 0)$ может быть недовалевской. Перенеся начало координат в точку $(0, \alpha_0, 0, 0)$, приведем уравнение многообразия X_1 к виду

$$x_4^2 + y_4^2 z_4 t_4 + g'(y_4, z_4, t_4) = 0, \quad (4)$$

где степени всех мономов ряда g' по z_4 и t_4 не меньше 2. Если в g' входят мономы степени ≤ 3 , то особенность в 0 двовалевская (нужно рассмотреть сечение $t_4 = \beta y_4$ или $z_4 = \beta y_4$).

Итак, мы установили, что если многообразие X_1 обладает неизолитрованной особенностью, то это особенность типа cA_1 в общей точке некоторой прямой l . Нас интересуют только дивизоры с дискрепантностью < 1 над X_1 . Если центр такого дивизора – прямая l , то его дискрепантность равна 0. Как мы видели в случае cD_{2k} , такой дивизор единствен и рационален. Кроме этого дивизоры с дискрепантностью < 1 могут быть двух видов: дивизоры с дискрепантностью a , $0 < a < 1$, над началом координат карты U_2 (неизолитрованная особенность типа cA/k), и дивизоры с дискрепантностью 0 над точкой $(0, 0, 0, 0)$ вида (4) (если ряд g' начинается с членов степени 4 или выше). Покажем, что все такие дивизоры рациональны.

В неизолированном случае в карте U_2 существует такая совместимая с действием группы аналитическая замена координат, что в окрестности 0 многообразие X_1 будет задаваться уравнением

$$x'^2 + y'z' = 0 \subset \mathbb{C}^4 / \mathbb{Z}_k(0, 1, -1, -1).$$

Сделаем взвешенное раздутие с весами $\frac{1}{k}(k, 1, 2k - 1, 1)$ [10]. Тривиально проверяется, что исключительный дивизор рационален и на исключительном дивизоре раздутого многообразия лежат только циклические факторособенности и cDV -точки. Следовательно, все дивизоры с дискрепантностью < 1 над $0 \in X_1$ рациональны.

Теперь рассмотрим точку вида (4), где ряд g' начинается с членов степени ≥ 4 и все мономы имеют степень ≥ 2 по z_4 и t_4 . Мы хотим показать, что все дивизоры с дискрепантностью 0 и центром в $(0, 0, 0, 0)$ рациональны. Сделаем раздутие с весами $(2, 1, 1, 1)$. Его исключительный дивизор E задан в $\mathbb{P}(2, 1, 1, 1)$ уравнением

$$x_4^2 + y_4^2 z_4 t_4 + g'_4(y_4, z_4, t_4) = 0.$$

Заметим, что степень этого уравнения по x_4 и y_4 равна 2. Поэтому в аффинном куске $t_4 \neq 0$ сечения поверхности E плоскостями $z_4 = \text{const}$ – коники. Если общая коника неприводима, то E рациональна. В противном случае уравнение E в $\{t_4 \neq 0\}$ имеет вид

$$x_4^2 + z_4(y_4 + (\dots))^2 = 0,$$

где под $(\dots)$ подразумевается некоторая линейная функция от z_4 . Очевидно, E снова рациональна.

Теперь исследуем особенности раздутого многообразия X_2 . Оно покрывается четырьмя аффинными картами V_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Тривиально проверяется, что в карте V_1 многообразие X_2 неособо.

Во второй карте $V_2 \simeq \mathbb{C}^4$ многообразие X_2 задано уравнением

$$(x'_2)^2 + z'_2 t'_2 + g'_4(1, z'_2, t'_2) + (y'_2)^{-4} g'_{>4}(y'_2, y'_2 z'_2, y'_2 t'_2) = 0.$$

Для нас важны особенности, которые лежат на исключительном дивизоре $\{y'_2 = 0\}$. Все такие особенности происходят из особенностей кривой $\{z'_2 t'_2 + g'_4(1, z'_2, t'_2) = 0\} \subset \mathbb{C}^2$. Это кривая степени 4 и у нее есть обыкновенная двойная особая точка в 0. Если эта кривая неприводима, то другие ее особые точки также имеют кратность 2. Все они дают cDV точки на многообразии X_2 . Если кривая приводима, то из анализа возможных комбинаций следует, что все особенности на X_2 все равно имеют тип cDV , но может присутствовать неизолированная особенность вдоль некоторой прямой $l \subset E$, причем особенность в общей точке l имеет тип cA . Такая ситуация уже была рассмотрена нами в части 3.1 – мы знаем, что все дивизоры с дискрепантностью 0 и центром в l рациональны.

В третьей карте X_2 задано уравнением

$$(x'_3)^2 + (y'_3)^2 t'_3 + g'_4(y'_3, 1, t'_3) + (z'_3)^{-4} g'_{>4}(z'_3 y'_3, z'_3, z'_3 t'_3) = 0.$$

Остается исследовать особенности, лежащие в $\{x'_3 = y'_3 = z'_3 = 0\}$, т.е. на оси t'_3 . Из уравнения непосредственно видно, что все точки оси t'_3 имеют тип cDV и cA в общей точке (или гладкие). Особенности такого типа уже были изучены нами в части 3.1. Четвертая карта рассматривается совершенно аналогично. Этим завершается доказательство в случае cD_{2k+1} , а вместе с ним и всей теоремы 1.1.

4. Примеры.

ПРИМЕР 4.1. Рассмотрим особенность $X \subset \mathbb{C}^4$ типа cD_{2k} , $k > 1$, заданную уравнением

$$x^2 + y^2 z + z^{2k-1} + t^{2k-1} = 0.$$

При раздутии с весами $(k, k-1, 1, 1)$ в качестве исключительного дивизора E вклеивается бирационально-линейчатая поверхность над кривой

$$C = \{y^2 z + z^{2k-1} + t^{2k-1} = 0\} \subset \mathbb{P}(k-1, 1, 1).$$

Очевидно, это квазигладкая кривая, ее род $g(C) = k-1$. Дискрепантность $a(E, X) = k + k-1 + 1 + 1 - 1 - (2k-1) = 1$ по лемме 2.1. Этот пример показывает, что нерациональный исключительный дивизор E может быть бирационально-линейчатой поверхностью над гиперэллиптической кривой произвольного рода.

ПРИМЕР 4.2. Пусть особенность X типа cD_{2k} задана уравнением

$$x^2 + y^2 z + z^{2k-1} + t^{2k+2} = 0.$$

При взвешенном раздутии $(k, k-1, 1, 1)$ исключительный дивизор состоит из трех рациональных компонент $\{z=0\}$, $\{y=iz^{k-1}\}$, $\{y=-iz^{k-1}\} \subset \mathbb{P}(k, k-1, 1, 1)$. Раздутое многообразие X_1 покрывается четырьмя картами. В четвертой карте, изоморфной $\mathbb{C}^4$, X_1 задано уравнением

$$x_4^2 t_4 + y_4^2 z_4 + z_4^{2k-1} + t_4^3 = 0.$$

Мы получаем изолированную каноническую (не терминальную) особенность в 0; на исследование особенностей такого типа были потрачены основные усилия при доказательстве теоремы 1.1 в случае cD_{2k} . Нерациональных дивизоров с дискрепантностью 1 у данной особенности X нет.

ПРИМЕР 4.3. Соответствующими примерами в случае cD_{2k+1} являются особенности

$$x^2 + y^2 z + z^{2k} + t^{2k} = 0$$

и

$$x^2 + y^2 z + z^{2k} + t^{2k+4} = 0.$$

При взвешенном раздутии $(k, k, 1, 1)$ первой в качестве исключительного дивизора получаем бирационально-линейчатую поверхность над кривой рода $k-1$. На раздутом многообразии имеется единственная терминальная особая точка типа cA/k во второй карте.

При раздутии второй особенности исключительный дивизор распадается на две рациональные компоненты $\{x=iz^k\}$ и $\{x=-iz^k\}$. Раздутое многообразие имеет неизолированную каноническую особенность вдоль прямой. В общей точке этой прямой тип особенности cA_1 , в начале координат второй карты $-cA/k$ и в начале координат четвертой аффинной карты особенность не дювалевская. У данной особенности нерациональных дивизоров с дискрепантностью 1 нет.

ПРИМЕР 4.4. Особенности типа $cE/2$ могут иметь более одного нерационального исключительного дивизора с дискрепантностью $a \leq 1$. Рассмотрим, например, особенность

$$\{x^2 + y^3 + z^4y + t^4y + z^2t^2 + z^6 + t^6 = 0\} \subset \mathbb{C}^4 / \mathbb{Z}_2(1, 0, 1, 1)$$

и два ее взвешенных раздутия: σ_1 с весами $\frac{1}{2}(3, 2, 3, 1)$ и σ_2 с весами $\frac{1}{2}(3, 2, 1, 3)$. По [10, п. 10.22] эти раздутия не изоморфны, их исключительные дивизоры E_1 и E_2 неприводимы и приведены и имеют дискрепантности $1/2$. Дивизоры E_1 и E_2 заданы уравнениями

$$\begin{aligned} \{x^2 + y^3 + t^4y + t^6 = 0\} &\subset \mathbb{P}(3, 2, 3, 1), \\ \{x^2 + y^3 + z^4y + z^6 = 0\} &\subset \mathbb{P}(3, 2, 1, 3) \end{aligned}$$

соответственно. Обе поверхности E_1 и E_2 представляют собой конусы над эллиптическими кривыми.

ПРИМЕР 4.5. У особенностей типа cE могут существовать исключительные дивизоры с дискрепантностью 1, которые являются бирационально-линейчатыми поверхностями над негиперэллиптическими кривыми. Например, рассмотрим особенность

$$X \simeq \{x^2 + y^3 + z^5 + t^{15} = 0\} \subset \mathbb{C}^4$$

и ее взвешенное раздутие с весами $(8, 5, 3, 1)$. В качестве исключительного дивизора вклеивается бирационально-линейчатая поверхность E над кривой

$$\{y^3 + z^5 + t^{15} = 0\} \subset \mathbb{P}(5, 3, 1).$$

Это негиперэллиптическая кривая рода 4. Дискрепантность $a(E, X) = 1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Reid M. Minimal models of canonical 3-folds // Algebraic Varieties and Analytic Varieties. Adv. Studies in Pure Math. V. 1: Kinokuniya, North-Holland, 1983. P. 131–180.
- [2] Mori S. On 3-dimensional terminal singularities // Nagoya Math. J. 1985. V. 98. P. 43–66.
- [3] Kollár J., Shepard-Barron N. Threefolds and deformations of surface singularities // Invent. Math. 1988. V. 91. P. 299–338.
- [4] Исковских В. А. Особенности на минимальных моделях алгебраических многообразий // Тр. сем. под руководством И. Р. Шафаревича (1996–1998). М., 1998. С. 41–61.
- [5] Reid M. Young person's guide to canonical singularities // Proc. Symp. Pure Math. 1987. V. 46. № 1. P. 345–414.
- [6] Reid M. Canonical 3-folds // Journées de Géométrie Algébrique d'Angers / ed. A. Beauville. Alpen aan den Rijn: Sijthoff, Noordhoff, 1980. P. 273–310.
- [7] Прохоров Ю. Г. Замечание о разрешении трехмерных терминальных особенностей // УМН. 2002. Т. 57. № 4. С. 187–188.
- [8] Маркушевич Д. Г. Канонические особенности трехмерных гиперповерхностей // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985. Т. 49. С. 334–368.
- [9] Prokhorov Yu. G. El-blowing ups of terminal singularities // J. Math. Sci. 2003. V. 115. № 3. P. 2395–2427.
- [10] Hayakawa T. Blowing ups of 3-dimensional terminal singularities // Publ. RIMS. Kyoto Univ. 1999. V. 35. P. 515–570.
- [11] Markushevich D. Minimal discrepancy for a terminal cDV singularity is 1 // J. Math. Sci. Univ. Tokyo. 1996. V. 3. P. 445–456.
- [12] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. М.: Наука, 1982.