Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Потеряхин, Нормальные формы вблизи инвариантно-го тора и асимптотические собственные значения оператора $\langle V, \nabla \rangle - \epsilon \Delta$, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 1, 152–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2477>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 13:44:46

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ВБЛИЗИ ИНВАРИАНТНОГО ТОРА И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ОПЕРАТОРА $\langle V, \nabla \rangle - \varepsilon \Delta$

М. А. Потеряхин

В работе рассматривается спектральная задача для стационарного уравнения диффузии

$$\hat{L}u = \lambda u, \quad \hat{L} = \langle V, \nabla \rangle - \varepsilon \Delta, \quad \varepsilon > 0, \quad (1)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, а $V(x)$ – гладкое в $\mathbb{R}_x^n$ векторное поле, обладающее k -мерным инвариантным тором Λ_x^k , $k < n$, с почти периодическим движением на нем, задаваемым уравнением $x = X(\varphi_0 + \omega t)$, где $X(\varphi)$ – гладкая n -мерная вектор-функция, 2π -периодическая по каждой из угловых переменных φ_j , $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$. Предполагается, что частоты $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_k)$ удовлетворяют условию сильной нерезонансности:

$$\sum_{i=1}^k \omega_i m_i \geq C|m|^{-r}, \quad C > 0, \quad r > 0, \quad m_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \dots, k.$$

В работе [1] были построены последовательности функций $u_\nu(x, \varepsilon)$ и комплексных чисел λ_ν со следующими свойствами:

$$\hat{L}u_\nu = \lambda_\nu u_\nu + O(\varepsilon^{1/2}), \quad (2)$$

где $\text{supp } u_\nu \rightarrow \Lambda_x^k$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\|u_\nu\|_C = O(1)$, в случае, когда порождаемая тором Λ_x^k система уравнений в вариациях с почти периодическими коэффициентами

$$\dot{z} = V_x(X(\varphi_0 + \omega t))z, \quad (3)$$

является приводимой, а движение в окрестности тора Λ_x^k является асимптотически устойчивым. Здесь ${}^tV_x \equiv {}^t(\partial V / \partial x_1, \dots, \partial V / \partial x_n) - n \times n$ матрица.

Целью данной работы является установление соответствия между полученными в [1], [2] асимптотическими собственными значениями и собственными функциями (λ_ν, u_ν) и нормальной формой гамильтониана [3], [4]

$$H = \langle V(x), p \rangle + p^2 \quad (4)$$

в окрестности его инвариантного изотропного тора [5]–[7]

$$\Lambda = \{(x, p) \mid x = X(\varphi), p = 0\}$$

в $2n$ -мерном фазовом пространстве $\mathbb{R}_{x,p}^{2n}$, полученного из тора Λ_x^k с помощью тривиальной процедуры поднятия.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 04-01-00735, и фонда INTAS, грант № 00-257.

ЗАМЕЧАНИЕ. Гамильтониан (4) возникает в случае, когда u_ν имеет вид “затухающей” экспоненты $u_\nu(x, \varepsilon) = \exp(-S(x)/\varepsilon)A(x, \varepsilon)$. Традиционные для квантовой механики и метода ВКБ “быстроосциллирующие” решения (см. [5]) $u_\nu(x, \varepsilon) = \exp(iS(x)/\varepsilon)A(x, \varepsilon)$ порождают комплексный гамильтониан

$$H_C = i\langle V(x), p \rangle + p^2. \quad (5)$$

Именно на основе такой “модификации” фазой комплексного метода ВКБ строятся спектральные серии (λ_ν, u_ν) в окрестности изотропного тора Λ в работе [1].

Напомним, что система (3) называется *приводимой* (см., например, [8], [9]), если существует линейное преобразование $z = \tilde{\Phi}(\varphi^0 + \omega t)\tilde{\xi}$, $\tilde{\xi} \in \mathbb{R}^n$, задаваемое невырожденной $n \times n$ матрицей $\tilde{\Phi}$, гладко зависящей от φ и 2π -периодической по каждому углу, приводящее систему (3) к виду

$$\dot{\tilde{\xi}} = \widetilde{M}\tilde{\xi},$$

где $\widetilde{M} - n \times n$ постоянная матрица (вообще говоря, не диагональная). В противном случае система (3) является неприводимой.

Однако для дальнейших вычислений нам удобнее приводить систему (3) к специальному виду. Очевидно, что вектор-функции $X_{\varphi_j}(\varphi^0 + \omega t)$, $j = 1, \dots, k$, являются решениями системы (3). Возьмем в качестве первых k вектор-столбцов матрицы преобразования Φ векторы $\partial X(\varphi)/\partial \varphi_j$, $j = 1, \dots, k$: $\Phi = (X_\varphi, Q)$. Здесь Q — гладкая $n \times (n - k)$ матричная функция на торе Λ такая, что

$$({}^tQQ)^{-1}({}^tQ)(V_xQ - \dot{Q}) \equiv M,$$

где M является $(n - k) \times (n - k)$ постоянной матрицей с собственными значениями $-\mu_{k+1}, \dots, -\mu_n$. Выберем матрицу Q так, что будут выполнены следующие условия: ${}^tX_\varphi Q = {}^tQX_\varphi \equiv 0$. Тогда преобразование, заданное матричной функцией Φ , приводит систему к виду

$$\dot{\tilde{\xi}} = \widetilde{M}\tilde{\xi}$$

с матрицей

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} 0 & M_1 \\ 0 & M \end{pmatrix},$$

где M_1 — некоторая, необязательно постоянная, матрица размера $k \times (n - k)$. Отделим в векторе $\tilde{\xi}$ последние $n - k$ компонент и составим из них вектор, который обозначим ξ . Он, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\dot{\xi} = M\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^{n-k}. \quad (6)$$

Теперь можно легко сформулировать критерий асимптотической устойчивости движения в окрестности тора Λ_x^k : оно будет асимптотически устойчивым, если любое решение ξ системы (6) стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Это, в частности, означает, что $\operatorname{Re} \mu_j > 0$, $j = k + 1, \dots, n$. Кроме этого, как и в работе [1], предполагается, что матрица M диагональна.

Рассмотрим полную систему уравнений в вариациях для гамильтониана (4) в некоторой не зависящей от ε окрестности $U(\Lambda)$ тора Λ :

$$\dot{z} = V_x z + 2w, \quad \dot{w} = -{}^tV_x w. \quad (7)$$

Пусть $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{n-k}$ — решения систем $\dot{\xi} = M\xi$ и $\dot{\eta} = -{}^tM\eta$ соответственно. Введем следующие гладкие матричные 2π -периодические по углам функции на торе Λ :

$$Z^0(\varphi) = 2 \int_{-\infty}^0 e^{-\tau M} ({}^tQ(\varphi + \omega\tau)Q(\varphi + \omega\tau))^{-1} e^{-\tau {}^tM} d\tau, \\ {}^tG^+ \equiv {}^t(Q, 0), \quad {}^tG^- \equiv {}^t(QZ^0, Q({}^tQQ)^{-1}).$$

ЛЕММА 1. Вектор-функции ${}^t(z, w) = {}^t(G^+\xi)$ и ${}^t(z, w) = {}^t(G^-\eta)$ являются решениями системы (7).

Следуя [10], введем в окрестности тора Λ канонические переменные ${}^tr = {}^t(x, p) \rightarrow {}^tY = {}^t(\varphi, \xi, I, \eta)$

$$r = Y^0(\varphi) + Y^I(\varphi)g(\varphi, \xi, I, \eta) + G^+(\varphi)\xi + G^-(\varphi)\eta, \quad (8)$$

где $Y^0 = {}^t(X, 0)$ и $Y^I = {}^t(0, X_\varphi({}^tX_\varphi X_\varphi)^{-1}) - 2n \times k$ матрицы и вектор-функция g является решением системы уравнений

$$\begin{aligned} -g_j + \langle g, {}^tY^I \hat{J}G_{\varphi_j}^+ \xi \rangle + \langle g, {}^tY^I \hat{J}G_{\varphi_j}^- \eta \rangle + \frac{1}{2} \langle \xi, {}^tG^+ \hat{J}G_{\varphi_j}^+ \xi \rangle \\ + \langle \eta, {}^tG^- \hat{J}G_{\varphi_j}^+ \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle \eta, {}^tG^- \hat{J}G_{\varphi_j}^- \eta \rangle = -I_j, \quad j = 1, \dots, k, \end{aligned}$$

где

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{E} \\ -\hat{E} & 0 \end{pmatrix},$$

$\hat{E} - n \times n$ единичная матрица.

ТЕОРЕМА 1. В окрестности $\mathbf{U}(\Lambda)$ тора Λ замена переменных (8) является канонической и приводит гамильтониан (4) к виду

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + O(|I|^2 + |\xi + \eta|^3), \quad \mathcal{H}_0 = \omega I + \langle \eta, M\xi \rangle. \quad (9)$$

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Каноничность замены переменных доказывается аналогично теореме 1.1 из [10]. Для этого в [10] следует заменить $V\xi \rightarrow G^+\xi$, $\bar{V}\bar{\xi} \rightarrow G^-\eta$. Очевидно, что для матриц G^+ , G^- выполнены следующие свойства: ${}^tG^+ \hat{J}G^- = \hat{E}$, ${}^tG^+ \hat{J}Y^I = 0$, ${}^tG^- \hat{J}Y^I = 0$. Также учтем, что в системе уравнений, определяющих g , слагаемое $\langle g, {}^tY^I \hat{J}Y_{\varphi_j}^I g \rangle = 0$. Остальные тождества в [10], используемые для доказательства каноничности, совпадают с соответствующими тождествами для матриц V и $\bar{V}$.

Равенство (9) означает, что с точностью $\text{mod } O(|I|^2 + |\xi + \eta|^3)$ гамильтонова система для $\mathcal{H}$ является “почти интегрируемой”, а переменные “почти разделяются”. Построим теперь по гамильтониану $\mathcal{H}_0$ дифференциальный оператор $\widehat{\mathcal{H}}_0$, собственные значения и собственные функции которого будут давать решения задачи (2) в некоторой малой, но не зависящей от ε , окрестности тора Λ_x^k .

Рассмотрим каноническое преобразование $y_j = \xi_j + \eta_j$, $P_j = \eta_j$, $j = k+1, \dots, n$. Тогда

$$\langle \eta, M\xi \rangle \equiv \sum_{j=k+1}^n \mu_j (-\xi_j \eta_j) = \sum_{j=k+1}^n \mu_j h_j(y_j, P_j).$$

Гамильтонианам $h_j(y_j, P_j) = (-y_j P_j + P_j^2)$ соответствуют одномерные операторы с малой диффузией

$$\tilde{L}_j \equiv -y_j \frac{\partial}{\partial y_j} - \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} = -\left(\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_j}\right) \left(\frac{y_j}{\sqrt{\varepsilon}} + \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_j}\right) + 1.$$

Тогда “проквантуем” переменные I, ξ, η , заменив I_j на $\partial/\partial \varphi_j$, ξ_l на операторы “уничтожения”

$$\tilde{a}_l = \frac{y_l}{\sqrt{\varepsilon}} + \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_l}$$

и η_l на операторы “рождения”

$$\tilde{a}_l^+ = \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_l},$$

$l = k + 1, \dots, n$. Такая замена переменных на операторы позволяет построить по нормальной форме (9) оператор

$$\widehat{\mathcal{H}}_0 = \sum_{j=1}^k \omega_j \frac{\partial}{\partial \varphi_j} + \langle \bar{a}^+, M \bar{a} \rangle + \sum_{j=k+1}^n \mu_j.$$

Легко проверить, что набор чисел

$$\lambda_\nu = i\omega\nu^{(1)} + \sum_{j=k+1}^n \mu_j(\nu_j^{(2)} + 1),$$

и функций

$$\psi_\nu = e^{i\nu^{(1)}\varphi(\bar{a}^+)^{\nu^{(2)}}}\psi_0(y),$$

где $\psi_0(y) = \exp(-\langle y, y \rangle / 2\varepsilon)$ (основное состояние), $\nu = (\nu^{(1)}, \nu^{(2)})$, $\nu^{(1)} = (\nu_1, \dots, \nu_k)$, $\nu^{(2)} = (\nu_{k+1}, \dots, \nu_n)$ – мультииндексы, дает набор собственных значений и собственных функций спектральной задачи $\widehat{\mathcal{H}}_0\psi_\nu = \lambda_\nu\psi_\nu$.

Теперь на основе построенных канонических замен переменных необходимо построить унитарное преобразование T , с помощью которого можно получить из спектральных серий для $\widehat{H}_0$ спектральные серии для исходного оператора $\widehat{L}$ по формулам $u_\nu = T\psi_\nu$, $a = T\bar{a}T^{-1}$ и $a^+ = T\bar{a}^+T^{-1}$. Для этого удобно воспользоваться комплексными аналогами формулы (8), приводящими гамильтониан (5) к нормальной форме (9). Вместе с заменой $(\xi, \eta) \rightarrow (y, P)$ мы имеем

$$y \equiv i({}^tQQ)^{-1}({}^tQ)(x - X(\varphi)) + {}^tQp - Z^0({}^tQ)p, \quad P \equiv ({}^tQ)p, \\ \varphi = \varphi(x, p), \quad I = I(x, p).$$

Производящая функция этого преобразования имеет вид

$$S(x, \varphi, P) = P({}^tQQ)^{-1}({}^tQ)(x - X(\varphi)) - \frac{iP^2}{2} + \frac{i\langle P, Z^0P \rangle}{2} + S_1(x, \varphi).$$

Тогда, следуя [11], [12],

$$u_0(x) \equiv (T\psi_0)(x) = \left(\frac{1}{2}\pi\varepsilon\right)^{n-k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iS(x, P)/\varepsilon} \widetilde{\psi}_0(P) dP \\ = \sqrt{\det R(\varphi)} \exp\left(-\frac{1}{2}\langle {}^tQ(x - X(\varphi)), R(\varphi)({}^tQ(x - X(\varphi))) \rangle\right)\Big|_{\varphi=\varphi(x)},$$

где $R(\varphi) = ({}^tQQ)^{-1}(Z^0)^{-1}({}^tQQ)^{-1}$ – это $(n - k) \times (n - k)$ матричная функция на торе Λ , а

$$\widetilde{\psi}_0(P) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\langle y, P \rangle / \varepsilon} \psi_0(y) dy.$$

Соответственно для операторов $\bar{a}$ и $\bar{a}^+$ мы имеем

$$\hat{a} \equiv T\bar{a}T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}({}^tQQ)^{-1}({}^tQ)(x - X(\varphi)) + \sqrt{\varepsilon}(Z^0({}^tQ))\frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{a}^+ \equiv T\bar{a}^+T^{-1} = \sqrt{\varepsilon}({}^tQ)\frac{\partial}{\partial x},$$

а для собственной функции возбужденного состояния

$$u_\nu(x) = e^{i\nu^{(1)}\varphi(\hat{a}^+)^{\nu^{(2)}}}u_0(x)\Big|_{\varphi=\varphi(x)}.$$

Следующее утверждение устанавливает связь между нормальной формой (9) и асимптотическими собственными значениями и собственными функциями оператора $\widehat{L}$.

ТЕОРЕМА 2. *Набор значений (λ_ν, u_ν) в окрестности $\mathbf{U}(\Lambda)$ тора Λ удовлетворяет (2) и совпадает со значениями, заданными формулами, полученными в [1].*

ЗАМЕЧАНИЕ. При $k = 1$ приведенные асимптотические собственные функции аналогичны собственным функциям оператора Бельтрами–Лапласа на римановых многообразиях, впервые полученным в [13], а для операторов квантовой механики в [5], [6]. Для существования таких собственных функций предполагается, что система уравнений в вариациях (7) должна быть устойчивой в линейном приближении. Для уравнения с малой диффузией система (7) является неустойчивой, но зато ее проекция на конфигурационное пространство – система (3), должна быть асимптотически устойчивой в линейном приближении.

Построенные решения (λ_ν, u_ν) соответствуют задачам теории вероятности с нормальными отклонениями, в отличие от решений, соответствующих большим отклонениям и рассмотренным, например, в [14].

Автор благодарен С. Ю. Доброхотову за постановку задачи и ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Доброхотов С. Ю., Колокольцов В. Н., Оливе В. М. // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 2. С. 301–306.
2. Alberverio S., Dobrokhotoy S. Yu., Poteryakhin M. A. On quasimodes of small diffusion operators, corresponding to stable invariant with nonregular neighborhoods // SFB 611 (№ 51). Bonn: Universität Bonn, 2003.
3. Брюно А. Д. Ограниченная задача трех тел: плоские периодические орбиты. М.: Наука, 1990.
4. Broer H. W., Huitema G. B., Sevryuk M. B. Quasi-Periodic Motions in Families of Dynamical Systems // Lecture Notes in Math. V. 1645. Berlin: Springer, 1996.
5. Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1978.
6. Белов В. В., Доброхотов С. Ю. // ТМФ. 1992. Т. 92. № 2. С. 215–254.
7. Белов В. В., Доброхотов О. С., Доброхотов С. Ю. // Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 4. С. 483–514.
8. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
9. Якубович В. Я., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. М.: Наука, 1972.
10. Белов В. В., Доброхотов С. Ю., Максимов В. А. // ТМФ. 2003. Т. 135. № 3. С. 378–408.
11. Фок В. А. // Вестн. ЛГУ. 1952. № 6. С. 67–73.
12. Егоров Ю. В. // УМН. 1969. Т. 24. № 5. С. 235–236.
13. Бабиш В. М. Собственные функции, сосредоточенные в окрестности замкнутой геодезической // Зап. научн. семин. ЛОМИ. Т. 9. Ленинград, 1968.
14. Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.