Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. И. Сазонов, Двумерные операторы Тёплица с измеримыми символами, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 1, 88–98

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm248>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 15:41:01

УДК 517.9

ДВУМЕРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ТЁПЛИЦА С ИЗМЕРИМЫМИ СИМВОЛАМИ

Л. И. Сазонов

Для полной алгебры двумерных операторов Тёплица с измеримыми ограниченными символами установлены необходимые условия фредгольмовости и результаты о разделении особенностей в символах. В качестве следствий получены достаточные условия фредгольмовости для символов, удовлетворяющих условиям типа локальной секториальности.

Библиография: 11 названий.

1. Пусть $\Gamma = \{z; |z| = 1\}$ – единичная окружность в комплексной плоскости $\mathbb{C}$; P – проектор Рисса в пространстве $L_p(\Gamma)$ ($1 < p < \infty$), связанный с оператором сингулярного интегрирования

$$(Sf)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

формулой $P = \frac{1}{2}(I + S)$; $H_p(\Gamma) = PL_p(\Gamma)$ – пространство Харди.

Обозначим через TO_p банахову подалгебру в алгебре $\text{End } H_p(\Gamma)$ всех линейных ограниченных операторов, действующих в пространстве $H_p(\Gamma)$, порожденную всеми операторами Тёплица $T(a) = PaI$ с символами $a \in L_{\infty}(\Gamma)$. Отметим, что алгебра TO_p содержит идеал $\mathcal{K}_p$ всех компактных операторов из $\text{End } H_p(\Gamma)$. Аналогично для пространств Харди $H_p(\Gamma \times \Gamma) = (P \otimes P)L_p(\Gamma \times \Gamma)$ введем банахову алгебру $TO_p^{(2)}$, порожденную всеми двумерными операторами Тёплица $T^{(2)}(a) = (P \otimes P)aI$ с символами $a \in L_{\infty}(\Gamma \times \Gamma)$.

Алгебра $TO_p^{(2)}$ содержит идеал всех компактных операторов $\mathcal{K}_p^0 = \mathcal{K}_p \hat{\otimes} \mathcal{K}_p$ и банахову подалгебру $TO_p \hat{\otimes} TO_p$ с замкнутыми двусторонними идеалами $\mathcal{K}_p^1 = \mathcal{K}_p \hat{\otimes} TO_p$, $\mathcal{K}_p^2 = TO_p \hat{\otimes} \mathcal{K}_p$. (Здесь через $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}$, где $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ – банаховы подалгебры в $\text{End } H_p(\Gamma)$, обозначается банахова подалгебра в $\text{End } H_p(\Gamma \times \Gamma)$, являющаяся замыканием множества всех операторов вида $\sum A_i \otimes B_i$, где $A_i \in \mathcal{A}$, $B_i \in \mathcal{B}$.)

В исследованиях фредгольмовости двумерных операторов Тёплица (см. [1] и приведенную там библиографию) рассматривались различные классы операторов Тёплица из алгебры $TO_p \hat{\otimes} TO_p$. При этом в некоторых случаях применялась схема билокализации, впервые предложенная в [2]. Ее основные положения применительно к алгебре

$TO_p \hat{\otimes} TO_p$ можно кратко сформулировать следующим образом: ввиду соотношений $\mathcal{K}_p^1 \cdot \mathcal{K}_p^2 \subset \mathcal{K}_p^0$ обратимость фактор-класса $[A]_0 = A + \mathcal{K}_p^0$ оператора A из $TO_p \hat{\otimes} TO_p$ эквивалентна одновременной обратимости фактор-классов $[A]_i = A + \mathcal{K}_p^i$ в фактор-алгебрах $TO_p \hat{\otimes} TO_p / \mathcal{K}_p^i$ ($i = 1, 2$); в свою очередь, обратимость в фактор-алгебрах $TO_p \hat{\otimes} TO_p / \mathcal{K}_p^i$ исследуется с помощью локальных методов; обратимость фактор-класса $[A]_0$ в фактор-алгебре $TO_p \hat{\otimes} TO_p / \mathcal{K}_p^0$ влечет его обратимость в полной алгебре $\text{End } H_p(\Gamma \times \Gamma) / \mathcal{K}_p^0$, которая эквивалентна фредгольмовости оператора A , но доказательство необходимости этого условия требует дополнительных исследований.

Отметим, что непосредственно применить указанную схему к полной алгебре $TO_p^{(2)}$ нельзя ввиду того, что множества $\mathcal{K}_p^i$ не являются идеалами в этой алгебре. Выход за рамки тензорного произведения (в данном случае $TO_p \hat{\otimes} TO_p$) был предложен в [3], [4], где была исследована фредгольмовость характеристических бисингулярных операторов с коэффициентами, имеющими разрывы вдоль гладких кривых. Применительно к алгебре $TO_p^{(2)}$ этот подход состоит в рассмотрении ее наибольшей подалгебры, в которой $\mathcal{K}_p^i$ ($i = 1, 2$) остаются двусторонними идеалами. Такая подалгебра содержит операторы Тёплица с символами, выходящими за рамки тензорного произведения $L_\infty(\Gamma) \hat{\otimes} L_\infty(\Gamma)$, но не совпадает с полной алгеброй $TO_p^{(2)}$.

Ниже реализуется другая возможность, состоящая в расширении множеств $\mathcal{K}_p^i$ ($i = 1, 2$) до двусторонних идеалов $\mathcal{J}_p^i$ ($i = 1, 2$) в алгебре $TO_p^{(2)}$, для которых выполняется соотношение $\mathcal{J}_p^1 \cdot \mathcal{J}_p^2 \subset \mathcal{K}_p^0$. Это позволяет применить к алгебре $TO_p^{(2)}$ с идеалами $\mathcal{J}_p^1$ и $\mathcal{J}_p^2$ схему билокализации.

2. Определим множество $\mathcal{J}_p^i$ ($i = 1, 2$) как замыкание в алгебре $TO_p^{(2)}$ множества всех операторов вида $\sum A_j K_j B_j$, где $A_j, B_j \in TO_p^{(2)}$, $K_j \in \mathcal{K}_p^i$.

Справедлива

ЛЕММА 1. *Множества $\mathcal{J}_p^i$ ($i = 1, 2$) являются замкнутыми двусторонними идеалами в алгебре $TO_p^{(2)}$, причем*

$$\mathcal{J}_p^1 \cdot \mathcal{J}_p^2, \mathcal{J}_p^2 \cdot \mathcal{J}_p^1 \subset \mathcal{K}_p^0. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, в проверке нуждается лишь соотношение (1). В свою очередь, для этого достаточно установить компактность операторов вида $(K_1 \otimes I)A(I \otimes K_2)$, $(I \otimes K_2)A(K_1 \otimes I)$, где K_1, K_2 – компактные операторы в пространстве $H_p(\Gamma)$, а оператор A имеет вид $A = \Pi A_j$, где $A_j = T^{(2)}(a_j)$, $a_j \in L_\infty(\Gamma \times \Gamma)$. Не нарушая общности, будем считать, что операторы K_j определяются формулами

$$(K_j f)(t) = \phi_j(t) \int_\Gamma \psi_j(s) f(s) ds,$$

где $\phi_j, \psi_j \in L_\infty(\Gamma)$. В этом случае неравенство

$$\begin{aligned} \|(K_1 \otimes I)f\|_{L_p(\Gamma_1, L_q(\Gamma_2))} &\leq \|\phi_1\|_{L_p} \left\| \int_\Gamma \psi_1(s) f(s, t_2) ds \right\|_{L_q(\Gamma_2)} \\ &\leq c \|\phi_1\|_{L_p} \|\psi_1\|_{L_\infty} \|f\|_{L_q(\Gamma_2, L_r(\Gamma_1))} \end{aligned}$$

устанавливает ограниченность оператора

$$K_1 \otimes I: L_q(\Gamma_2, L_r(\Gamma_1)) \rightarrow L_p(\Gamma_1, L_q(\Gamma_2))$$

при любых q, r, p из $(1, \infty)$. Здесь $\Gamma = \Gamma_1 = \Gamma_2$ снабжено индексами для различения пространств со смешанными нормами.

Аналогично, при любых $p, q, r \in (1, \infty)$ ограничен оператор

$$I \otimes K_2: L_q(\Gamma_1, L_r(\Gamma_2)) \rightarrow L_p(\Gamma_2, L_q(\Gamma_1)).$$

Далее, заметим, что для каждой функции $a \in L_\infty(\Gamma \times \Gamma)$ существует последовательность функций $a_n \in L_\infty(\Gamma) \otimes L_\infty(\Gamma)$ такая, что

$$\|a_n\|_{L_\infty} \leq \|a\|_{L_\infty}, \quad \lim \|a_n - a\|_{L_p} = 0$$

при любом $p \in [1, \infty)$.

Действительно, достаточно положить $a_n = (Q_n \otimes Q_n)a$, где Q_n – проектор вида

$$(Q_n f)(t) = \sum_{j=1}^n \frac{n\chi_j(t)}{2\pi} \int_{\Gamma_j} f(\tau) d\tau,$$

где $\Gamma = \bigcup_{j=1}^n \Gamma_j$ – разбиение окружности на n равных дуг, χ_j – характеристическая функция дуги Γ_j . Известно [5, с. 20], что проекторы $Q_n \otimes Q_n$ сильно сходятся к единичному оператору I при $n \rightarrow \infty$ в любом пространстве $L_p(\Gamma \times \Gamma)$ ($1 < p < \infty$).

Пусть $A_n = \prod_j A_{j,n}$, где $A_{j,n} = T^{(2)}(a_{j,n})$, $\{a_{j,n}\}$ – соответствующая последовательность для символа a_j . Так как оператор $P \otimes P$ ограничен в любом пространстве $L_p(\Gamma, L_q(\Gamma))$ ($1 < p, q < \infty$) (см., например, [6, с. 338]), то имеет место оценка

$$\|A - A_n\|_{L_p(\Gamma_1, L_q(\Gamma_2)) \rightarrow L_{p_1}(\Gamma_1, L_{q_1}(\Gamma_2))} \leq \epsilon_n(p, p_1, q, q_1), \quad (2)$$

где $\epsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для любых фиксированных p, p_1, q, q_1 , удовлетворяющих условиям $1 < p_1 < p < \infty$, $1 < q_1 < q < \infty$.

Действительно, для одного оператора имеем

$$\begin{aligned} \|T^{(2)}(a - a_n)f\|_{L_{p_1}(\Gamma_1, L_{q_1}(\Gamma_2))} &\leq c \| \|(a - a_n)f\|_{L_{q_1}(\Gamma_2)} \|_{L_{p_1}(\Gamma_1)} \\ &\leq c \| \|a - a_n\|_{L_\mu(\Gamma_2)} \|f\|_{L_q(\Gamma_2)} \|_{L_{p_1}(\Gamma_1)} \\ &\leq c \|a - a_n\|_{L_\nu(\Gamma_1, L_\mu(\Gamma_2))} \|f\|_{L_p(\Gamma_1, L_q(\Gamma_2))} \\ &\leq c_1 \|a - a_n\|_{L_\sigma(\Gamma \times \Gamma)} \|f\|_{L_p(\Gamma_1, L_q(\Gamma_2))}, \end{aligned}$$

где $1/\mu = 1/q_1 - 1/q$, $1/\nu = 1/p_1 - 1/p$, $\sigma = \max(\mu, \nu)$.

Здесь использованы неравенство Гёльдера и непрерывность вложения

$$L_p(\Gamma_1, L_q(\Gamma_2)) \subset L_{p_1}(\Gamma_1, L_{q_1}(\Gamma_2))$$

при $p_1 \leq p$, $q_1 \leq q$. Для произведения операторов доказательство соотношения (2) аналогично предыдущему.

После этого получаем

$$\begin{aligned} \|(K_1 \otimes I)(A - A_n)(I \otimes K_2)f\|_{L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2)} &\leq c_1 \|(A - A_n)(I \otimes K_2)f\|_{L_p(\Gamma_2, L_r(\Gamma_1))} \\ &\leq c_1 \epsilon_n \|(I \otimes K_2)f\|_{L_{p_1}(\Gamma_2, L_{r_1}(\Gamma_1))} \\ &\leq c_2 \epsilon_n \|f\|_{L_{r_1}(\Gamma_1, L_p(\Gamma_2))}. \end{aligned}$$

Так как r – любое число из $(1, \infty)$, а r_1 – любое число, меньшее r , можно положить $r_1 = p$ и, следовательно, справедливо соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(K_1 \otimes I)(A - A_n)(I \otimes K_2)\|_{L_p(\Gamma \times \Gamma) \rightarrow L_p(\Gamma \times \Gamma)} = 0,$$

влекущее компактность оператора $(K_1 \otimes I)A(I \otimes K_2)$, так как компактны операторы $(K_1 \otimes I)A_n(I \otimes K_2)$. Лемма доказана.

Учитывая, что для функции $a \in C(\Gamma)$ операторы $Pa(I - P)$, $(I - P)aP$ компактны в любом пространстве $L_p(\Gamma)$ ($1 < p < \infty$), приходим к следующему утверждению.

ЛЕММА 2. Пусть $a \in C(\Gamma)$. Тогда для любого оператора $A \in TO_p^{(2)}$ справедливы соотношения

$$[T(a) \otimes I, A] \in \mathcal{J}_p^1, \quad [I \otimes T(a), A] \in \mathcal{J}_p^2,$$

где $[A, B] = AB - BA$ – коммутатор операторов A и B .

Идеалы $\mathcal{J}_p^j$ допускают следующее внутреннее описание.

ЛЕММА 3. Пусть M_t – множество всех функций из $C(\Gamma)$ таких, что каждая из них равна единице в некоторой окрестности точки t и принимает значение в $[0, 1]$. Оператор $A \in TO_p^{(2)}$ принадлежит идеалу $\mathcal{J}_p^1$ ($\mathcal{J}_p^2$) тогда и только тогда, когда для каждой точки t выполняется соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(b_n \otimes I)A\| = 0 \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \|(I \otimes b_n)A\| = 0 \right), \quad (3)$$

где $\{b_n\}$ – любая последовательность функций из M_t такая, что $\text{supp } b_n$ стягиваются в точку t при $n \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай идеала $\mathcal{J}_p^1$.

Необходимость. Достаточно установить выполнение соотношения (3) для операторов вида

$$A_N = T^{(2)}(a_N)T^{(2)}(a_{N-1}) \dots T^{(2)}(a_2)K_1, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где $K_1 \in \mathcal{K}_p^1$, $a_j \in L_\infty(\Gamma \times \Gamma)$.

Применим индукцию по N . Для оператора K_1 ($N = 1$) утверждение верно, так как оператор K_1 , как и все операторы из $\mathcal{K}_p^1$, равномерно аппроксимируется операторами вида $\sum L_i \otimes A_i$, где L_i – компактные операторы, а для любого компактного в $H_p(\Gamma)$ оператора L ввиду сильной сходимости операторов $b_n I$ к нулю имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \|b_n L\| = 0$.

Предположим, что соотношение (3) верно для всех операторов K_{m-1} вида (4) с $N = m - 1$. Тогда для функции $b \in M_t$ такой, что $bb_n = b_n$, получаем представление

$$\begin{aligned} b_n K_m &= -((b_n P b (I - P)) \otimes P) a_m K_{m-1} \\ &\quad + ((b_n (I - P) b P) \otimes I) K_m + ((b_n P) \otimes P) a_m b K_{m-1}, \end{aligned}$$

из которого вытекает неравенство

$$\|b_n K_m\| \leq c(\|b_n P b(I - P)\| + \|b_n(I - P)bP\| + \|bK_{m-1}\|),$$

где константа c не зависит от b_n и b . По предположению индукции $\|bK_{m-1}\|$ сколь угодно мало при достаточно малом носителе функции b ; первые два слагаемых стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$ вследствие компактности операторов $Pb(I - P)$ и $(I - P)bP$.

Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|b_n K_m\| = 0,$$

что и доказывает необходимость.

Достаточность. Ввиду соотношения (3) для любого $\epsilon > 0$ существует непрерывное разложение единицы $\{b_{\epsilon,j}\}$ на Γ такое, что

$$\|(b_{\epsilon,j} \otimes I)A\| < \epsilon,$$

и система функций $\{b'_{\epsilon,j}\}$ такая, что $b'_{\epsilon,j} \in \bigcup M_t$, $b'_{\epsilon,j}$ равна единице на $\text{supp } b_{\epsilon,j}$ и система множеств $\text{supp } b'_{\epsilon,j}$ имеет кратность пересечения равную двум. Тогда вследствие леммы 2 оператор A с точностью до оператора из идеала $\mathcal{J}_p^1$ совпадает с оператором $A_\epsilon = \sum (T(b_{\epsilon,j}) \otimes I)A(T(b'_{\epsilon,j}) \otimes I)$, для которого аналогично лемме 1.5 из [7] устанавливается оценка $\|A_\epsilon\| \leq c\epsilon$, где c не зависит от ϵ . Отсюда в силу замкнутости идеала $\mathcal{J}_p^1$ имеем $A \in \mathcal{J}_p^1$, что и завершает доказательство леммы 3.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Множество $\mathcal{K}_p^1$ ($\mathcal{K}_p^2$) выделяется в $TO_p^{(2)}$ следующим образом: оператор $A \in TO_p^{(2)}$ принадлежит $\mathcal{K}_p^1$ ($\mathcal{K}_p^2$) тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(P_n \otimes I)A(P_n \otimes I) - A\| = 0 \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \|(I \otimes P_n)A(I \otimes P_n) - A\| = 0 \right)$$

для любой системы конечномерных проекторов $\{P_n\}$ таких, что

$$s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = I, \quad s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} P_n^* = I.$$

Здесь $s\text{-}\lim$ означает сильный предел, а операция $*$ – переход к сопряженному оператору.

3. Оператор $A \in TO_p^{(2)}$ будем называть *фредгольмовым* (частично *i -фредгольмовым* ($i = 1, 2$)) в алгебре $TO_p^{(2)}$, если его фактор-класс $[A]_0$ ($[A]_i$) обратим в фактор-алгебре $TO_p^{(2)}/\mathcal{K}_p^0$ ($TO_p^{(2)}/\mathcal{J}_p^i$). Заметим, что это эквивалентно существованию его левого и правого регуляризаторов (частичных i -регуляризаторов), т.е. таких операторов R_1 и R_2 из $TO_p^{(2)}$, что операторы $R_1 A - I$, $A R_2 - I$ принадлежат идеалу $\mathcal{K}_p^0$ ($\mathcal{J}_p^i$).

Из леммы 1 непосредственно вытекает

ЛЕММА 4. Оператор A фредгольмов в алгебре $TO_p^{(2)}$ тогда и только тогда, когда он одновременно частично 1- и 2-фредгольмов в алгебре $TO_p^{(2)}$.

Установим некоторые необходимые условия фредгольмовости (частичной фредгольмовости) в алгебре $TO_p^{(2)}$.

Предварительно сформулируем некоторые известные факты о вектор- и оператор-функциях.

Пусть X – банахово сепарабельное пространство; (S, μ) – пространство с мерой. *Вектор-функцией* называется отображение $x: S \rightarrow X$, обозначаемое также $\{x(s)\}$ или $\{s \rightarrow x(s)\}$. Вектор-функция называется *слабо* (*сильно*) *измеримой*, если для любого функционала f из сопряженного пространства X^* числовая функция $f(x(s))$ μ -измерима (существует последовательность μ -простых вектор-функций $\{x_n(s)\}$ такая, что почти для всех s $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x(s) - x_n(s)\| = 0$).

Согласно теореме Петтиса [8, с. 187] для сепарабельного пространства X оба типа измеримости совпадают, поэтому будем говорить просто об измеримости. Ясно, что можно рассматривать вектор-функции, которые заданы почти всюду. Банаховы пространства $L_p(S, X)$ ($1 \leq p \leq \infty$) определяются как множества всех измеримых вектор-функций с конечной нормой

$$\|x\|_{L_p(S, X)} = \left\{ \int_S \|x(s)\|_X^p d\mu(s) \right\}^{1/p}, \quad 1 < p < \infty, \quad \|x\|_{L_\infty(S, X)} = \text{ess sup } \|x(s)\|.$$

Обычные пространства функций $L_{p,q}(S \times T)$ со смешанной нормой

$$\|x\| = \left\{ \int_S \left\{ \int_T |x(s, t)|^q d\nu(t) \right\}^{p/q} d\mu(s) \right\}^{1/p}$$

отождествляется с пространством вектор-функций $L_p(S, L_q(T))$.

Оператор-функция $\{A(s)\}$, определенная почти для всех s и принимающая значения в $\text{End } X$, называется *измеримой*, если для любого $x \in X$ измерима вектор-функция $\{A(s)x\}$.

Оператор-функции $A: S \rightarrow \text{End } X$ сопоставим оператор $M(\{A(s)\})$, называемый *оператором умножения* на оператор-функцию и определяемый соотношением

$$(M(\{A(s)\})f)(s) = \{A(s)f(s)\}.$$

Этот оператор ограничен в любом пространстве $L_p(S, X)$ ($1 < p < \infty$) тогда и только тогда, когда $\|A(s)\|$ – существенно ограниченная функция, и его норма определяется формулой

$$\|M(\{A(s)\})\| = \|\|A(s)\|\|_{L_\infty(S)}. \quad (5)$$

Множество всех измеримых существенно ограниченных оператор-функций $A: S \rightarrow \text{End } X$ образует банахово пространство $L_\infty(S, \text{End } X)$, более того, оно является банаховой алгеброй относительно умножения оператор-функций. Ввиду (5) эта алгебра изометрически изоморфна подалгебре в $\text{End } L_p(S, X)$, состоящей из операторов умножения на оператор-функции из $L_\infty(S, \text{End } X)$.

Перечисленные свойства оператор-функций установлены в случае гильбертова пространства в [9], но без труда переносятся на более общий случай сепарабельного банахова пространства.

ЛЕММА 5. *Отображения, определяемые на операторах вида*

$$A = \sum_i \prod_j T^{(2)}(a_{ij}), \quad a_{ij} \in L_\infty(\Gamma \times \Gamma), \quad (6)$$

соотношениями

$$\Phi(A) = \sum_i \prod_j a_{ij}, \quad \Phi^1(A) = \left\{ \sum_i \prod_j T(a_{ij}(t, \cdot)) \right\}, \quad \Phi^2(A) = \left\{ \sum_i \prod_j T(a_{ij}(\cdot, t)) \right\},$$

и сопоставляющие оператору соответственно функцию из $L_\infty(\Gamma \times \Gamma)$ и оператор-функцию из $L_\infty(\Gamma, TO_p)$, продолжаются до непрерывных гомоморфизмов

$$\Phi: TO_p^{(2)} \rightarrow L_\infty(\Gamma \times \Gamma), \quad \Phi^i: TO_p^{(2)} \rightarrow L_\infty(\Gamma, TO_p).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть U – оператор в $L_p(\Gamma)$ вида $(Uf)(t) = tf(t)$. Тогда из соотношения

$$s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} U^{-n} P U_n = I$$

вытекает справедливость для операторов вида (6) равенств

$$s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} (U^{-n} \otimes U^{-n}) A (P U^n \otimes P U^n) = M(\Phi(A)), \quad (7)$$

$$s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} (U^{-n} \otimes I) A (P U_n \otimes I) = M(\Phi^1(A)), \quad (8)$$

$$s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} (I \otimes U^{-n}) A (I \otimes P U^n) = M(\Phi^2(A)), \quad (9)$$

где $M(\Phi(A))$ и $M(\Phi^i(A))$ – соответственно операторы умножения на функцию $\Phi(A) \in L_\infty(\Gamma \times \Gamma)$ и оператор-функцию $\Phi^i(A) \in L_\infty(\Gamma, TO_p)$.

Из соотношений (7)–(9) следует, что

$$\|M(\Phi(A))\| \leq \|P\|^2 \|A\|, \quad \|M(\Phi^i(A))\| \leq \|P\| \|A\|.$$

Но ввиду изометрической изоморфности алгебры операторов умножения на функции из $L_\infty(\Gamma \times \Gamma)$ (оператор-функции из $L_\infty(\Gamma, TO_p)$) алгебре $L_\infty(\Gamma \times \Gamma)$ ($L_\infty(\Gamma, TO_p)$) имеем

$$\|\Phi(A)\|_{L_\infty(\Gamma \times \Gamma)} \leq \|P\|^2 \|A\|, \quad \|\Phi^i(A)\|_{L_\infty(\Gamma, TO_p)} \leq \|P\| \|A\|.$$

Поэтому отображения Φ, Φ^i продолжаются по непрерывности на всю алгебру $TO_p^{(2)}$.

Следствием леммы 5 является

ТЕОРЕМА 1. Пусть A – фредгольмов (частично i -фредгольмов) оператор в алгебре $TO_p^{(2)}$. Тогда функции $\Phi(A)$ (оператор-функция $\Phi^i(A)$) обратима в алгебре $L_\infty(\Gamma \times \Gamma)$ ($L_\infty(\Gamma, TO_p)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что идеал $\mathcal{K}_p^0(\mathcal{J}_p^i)$ содержится в ядре гомоморфизма $\Phi(\Phi^i)$. В свою очередь, это следует из соотношения $s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} K U^n = 0$, верного для любого компактного оператора K в пространстве $L_p(\Gamma)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отображения Φ, Φ^i введены по аналогии с одномерным случаем [1].

4. Для исследования частичной i -фредгольмовости будем применять к фактор-алгебре $TO_p^{(2)}/\mathcal{J}_p^i$ локальный принцип Гохберга–Крупника [10], краткая формулировка которого приводится ниже для полноты изложения.

Пусть $\mathfrak{A}$ – банахова алгебра с единицей e . Множество ее элементов M , не содержащее нуля, называется *локализирующим классом*, если

- 1) $\sup_{a \in M} \|a\| < \infty$;
- 2) для любых a_1, a_2 из M существует $a \in M$ такой, что

$$aa_i = a_i a = a, \quad i = 1, 2.$$

Элементы $x, y \in \mathfrak{A}$ называются M -эквивалентными, если

$$\inf_{a \in M} \|(x - y)a\| = \inf_{a \in M} \|a(x - y)\| = 0.$$

Элемент $x \in \mathfrak{A}$ называется M -обратимым слева (справа), если существуют такие элементы $z \in \mathfrak{A}$, $a \in M$, что

$$zxa = a \quad (axz = a).$$

Элемент x называется M -обратимым, если он одновременно M -обратим слева и справа.

Система локализирующих классов $\{M_\tau\}_{\tau \in T}$ называется *покрывающей*, если из любого семейства элементов $\{a_\tau\}_{\tau \in T}$ ($a_\tau \in M_\tau$) можно выбрать конечное число элементов a_{τ_j} , $j = 1, 2, \dots, N$, таких, что элемент $\sum a_{\tau_j}$ обратим в алгебре $\mathfrak{A}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\{x_\tau\}_{\tau \in T}$ – семейство локальных представителей элемента $x \in \mathfrak{A}$, т.е. для каждого $\tau \in T$ элементы x и x_τ M_τ -эквивалентны. Если элемент x коммутирует со всеми элементами из $\bigcup_{\tau \in T} M_\tau$, то x обратим в алгебре $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда для любого $\tau \in T$ элемент x_τ M_τ -обратим.

Для фактор-алгебры $TO_p^{(2)}/\mathcal{J}_p^1$ справедлива

ЛЕММА 6. Пусть M_t^1 – множество всех фактор-классов вида $[T(a) \otimes I]_1$, где $a \in M_t$. Тогда $\{M_t^1\}_{t \in \Gamma}$ – покрывающая система локализирующих классов в алгебре $TO_p^{(2)}/\mathcal{J}_p^1$, причем каждый класс принадлежит центру алгебры $TO_p^{(2)}/\mathcal{J}_p^1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Принадлежность каждого класса M_t^1 центру алгебры следует из определения идеала $\mathcal{J}_p^1$ и компактности операторов $Pa(I - P)$, $(I - P)aP$ в пространстве $L_p(\Gamma)$ для символа $a \in C(\Gamma)$.

Далее, установим неравенство

$$1 \leq \inf_{[A]_1 \in M_t^1} \|[A]_1\| \leq \sup_{[A]_1 \in M_t^1} \|[A]_1\| \leq c_p, \quad (10)$$

где c_p – норма проектора Рисса P в пространстве $L_p(\Gamma)$.

Пусть $K_\epsilon \in \mathcal{J}_p^1$ – такой оператор, что

$$\|[A]_1\| + \epsilon \geq \|A + K_\epsilon\|.$$

Пусть B – оператор умножения на функцию b из M_t ; тогда вследствие леммы 3 найдется такая функция b , что

$$\|A + K_\epsilon\| \geq \|B(A + K_\epsilon)\| \geq \|ba\|_{L_\infty} - \|b(I - P)aP\| - \|BK_\epsilon\| \geq 1 - \epsilon.$$

Таким образом, справедлива левая часть неравенства (10); его правая часть очевидна.

Теперь заметим, что система классов $\{M_t^1\}_{t \in \Gamma}$ образует покрывающую систему локализирующих классов в алгебре $C(\Gamma)$ и, следовательно, $\{M_t^1\}_{t \in \Gamma}$ – покрывающая система локализирующих классов в алгебре $TO_p^{(2)}/\mathcal{J}_p^1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Аналогичным образом определяется покрывающая система локализуемых классов $\{M_t^2\}_{t \in T}$ в фактор-алгебре $TO_p^{(2)}/\mathcal{J}_p^2$.

Для операторов Тёплица справедлива следующая теорема о разделении особенностей.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $a, b \in L_\infty(\Gamma \times \Gamma)$ и операторы $T^{(2)}(a)$ и $T^{(2)}(b)$ частично 1-фредгольмовы в алгебре $TO_p^{(2)}$. Если существуют замкнутые непересекающиеся множества F и G из Γ такие, что $a \in C(\Gamma \setminus F \times \Gamma)$, $b \in C(\Gamma \setminus G \times \Gamma)$, то оператор $T^{(2)}(ab)$ также является частично 1-фредгольмовым в алгебре $TO_p^{(2)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой точки $\xi \in \Gamma$ одна из функций a или b непрерывна в некоторой окрестности кривой $\xi \times \Gamma$. Пусть это будет функция a . Тогда оператор $T^{(2)}(ab)$ M_ξ^1 -эквивалентен оператору $T^{(2)}(a_\xi b)$, где $a_\xi(t, \tau) = a(\xi, \tau)$, т.е. a_ξ – непрерывная функция одного переменного τ . M_ξ^1 -обратимость оператора $T^{(2)}(a_\xi)$ есть обратимость одномерного оператора Тёплица $\hat{T}(a_\xi)$ в алгебре TO_p .

Действительно, после применения к соотношению

$$RT^{(2)}(a_\xi)(T(a) \otimes I) = (T(a) \otimes I) + K,$$

где $K \in \mathcal{J}_p^1$, $a \in M_\xi$, означающую левую M_ξ^1 -обратимость фактор-класса $[T^{(2)}(a_\xi)]_1$, гомоморфизма Φ^1 имеем для почти всех t

$$\Phi^1(R)(t)\Phi^1(T^{(2)}(a_\xi))(t)a(t)I = a(t)I. \quad (11)$$

Остается заметить, что $\Phi^1(T^{(2)}(a_\xi))(t) = T(a_\xi)$, поэтому из (11) следует левая обратимость $T(a_\xi)$.

Аналогично устанавливается правая обратимость этого оператора в алгебре TO_p .

Из результатов об обратимости одномерных операторов Тёплица с непрерывными символами [11] следует, что для любого $\epsilon > 0$ функция a_ξ допускает факторизацию

$$a_\xi = a_\xi^+ da_\xi^-,$$

где

$$\|1 - d\| < \epsilon, \quad (a_\xi^+)^{\pm 1} \in C_+(\Gamma), \quad (a_\xi^-)^{\pm} \in C_-(\Gamma).$$

Вследствие этого оператор $T^{(2)}(a_\xi b)$ может быть представлен в виде

$$T^{(2)}(a_\xi b) = (I \otimes T(a_\xi^-))T^{(2)}(bd)(I \otimes T(a_\xi^+)).$$

Но операторы $I \otimes T(a_\xi^\pm)$ обратимы в алгебре $TO_p^{(2)}$, а оператор $T^{(2)}(bd)$ при достаточно малом ϵ частично 1-фредгольмов в алгебре $TO_p^{(2)}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $a, b \in L_\infty(\Gamma \times \Gamma)$ и существуют замкнутые множества F_1, G_1, F_2, G_2 из Γ такие, что $F_i \cap G_i = \emptyset$, $i = 1, 2$, и $a \in C((\Gamma \times \Gamma) \setminus (F_1 \times F_2))$, $b \in C((\Gamma \times \Gamma) \setminus (G_1 \times G_2))$. Если операторы $T^{(2)}(a)$ и $T^{(2)}(b)$ фредгольмовы в алгебре $TO_p^{(2)}$, то оператор $T^{(2)}(ab)$ также фредгольмов в этой алгебре.

Утверждение очевидным образом вытекает из теоремы 3, ее аналога для частичной 2-фредгольмовости и леммы 4.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $b \in C(\Gamma \times \Gamma)$, $a \in L_\infty(\Gamma \times \Gamma)$ и $T^{(2)}(a)$ – фредгольмов оператор в алгебре $TO_p^{(2)}$. Оператор $T^{(2)}(ab)$ фредгольмов в алгебре $TO_p^{(2)}$ тогда и только тогда, когда $b \neq 0$ на $\Gamma \times \Gamma$ и имеет нулевые частные индексы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность очевидна ввиду следствия 1 и критерия фредгольмовости для двумерных операторов Тёплица с непрерывными символами.

Необходимость вытекает из теоремы 1. Применение гомоморфизма Φ дает обратимость функции b в $L_\infty(\Gamma \times \Gamma)$, т.е. выполнение неравенства $b \neq 0$ на $\Gamma \times \Gamma$. Далее, если $b = b_0 t^\kappa \tau^\mu$, где b_0 имеет нулевые частные индексы, то оператор $T^{(2)}(b_0)$ фредгольмов ввиду достаточности, а оператор $T^{(2)}(ab)$, например в случае $\kappa \geq 0$, $\mu \geq 0$, представим в виде

$$T^{(2)}(ab) = T^{(2)}(ab_0)T^{(2)}(t^\kappa \tau^\mu),$$

и применение гомоморфизмов Φ^i приводит к равенствам $\kappa = \mu = 0$.

Введем класс символов $S_p(\Gamma \times \Gamma)$, к которому отнесем все функции из $L_\infty(\Gamma \times \Gamma)$, удовлетворяющие следующему условию:

для любой точки $(t, \tau) \in \Gamma \times \Gamma$ существует ее окрестность U и константа $c \in \mathbb{C}$ такие, что

$$\text{ess sup}_U |\chi_U - ca|_U < \epsilon_p,$$

где χ_U – характеристическая функция множества U , а $\epsilon_p = (\|P\|_{L_p \rightarrow L_p})^{-2}$.

ЛЕММА 7. Функция $a \in L_\infty(\Gamma \times \Gamma)$ содержится в классе $S_p(\Gamma \times \Gamma)$ тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде $a = bs$, где $b \in C(\Gamma \times \Gamma)$, $b \neq 0$ на $\Gamma \times \Gamma$, а s удовлетворяет условию

$$\text{ess sup} |1 - s| < \epsilon_p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность очевидна. Для доказательства необходимости выберем конечное покрытие $\Gamma \times \Gamma$ указанными окрестностями U_α с соответствующими константами c_α , и построим разложение единицы $\{\chi_\alpha\}$, отвечающие этому покрытию и состоящее из непрерывных функций.

Имеем оценку

$$\text{ess sup} |1 - \sum c_\alpha \chi_\alpha a| \leq \sum \text{ess sup} |\chi_\alpha (1 - ac_\alpha)| < \epsilon_p.$$

Ясно, что функция $\sum c_\alpha \chi_\alpha \neq 0$ на $\Gamma \times \Gamma$. Поэтому, полагая $b = (\sum c_\alpha \chi_\alpha)^{-1}$, получаем нужное представление для a с $s = a \sum c_\alpha \chi_\alpha$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В случае $p = 2$ класс $S_p(\Gamma \times \Gamma)$ совпадает с классом локально секториальных функций [1], т.е. для каждой точки из $\Gamma \times \Gamma$ существует ее окрестность, константа c ($|c| = 1$) и число $\epsilon > 0$ такие, что для почти всех точек из этой окрестности $\text{Re}(ca) \geq \epsilon$.

Для функции $a \in S_p(\Gamma \times \Gamma)$ введем частные индексы, полагая $\text{ind}_i a = \text{ind}_i b$, где $a = bs$ – представление, указанное в предыдущей лемме. Ясно, что эти числа не зависят от этого представления и определяются функцией a однозначно.

Следствие 2 приводит к следующему результату.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $a \in S_p(\Gamma \times \Gamma)$. Оператор $T^{(2)}(a)$ является фредгольмовым оператором в алгебре $TO_p^{(2)}$ тогда и только тогда, когда $\text{ind}_i a = 0$ ($i = 1, 2$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что оператор $T^{(2)}(s)$ обратим в алгебре $TO_p^{(2)}$, так как для него справедлива оценка

$$\|I - T^{(2)}(s)\| = \|T^{(2)}(1 - s)\| < 1.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Böttcher A., Silbermann B. Analysis of Toeplitz operators. Berlin: Akademie-Verlag, 1989.
- [2] Пилиди В. С. Многомерных бисингулярных операторах // Докл. АН СССР. 1971. Т. 201. С. 787–789.
- [3] Сазонов Л. И. Бисингулярные характеристические операторы с разрывными коэффициентами в пространстве $L_2(R^2)$ // Функцион. анализ и его прилож. 1985. Т. 12. № 2. С. 90–91.
- [4] Сазонов Л. И. О бисингулярных операторах с измеримыми коэффициентами // Сиб. матем. ж. 1996. Т. 37. № 2. С. 389–398.
- [5] Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.
- [6] Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Спектральная теория. М.: Мир, 1966.
- [7] Симоненко И. Б. Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. Т. 29. № 3. С. 567–586.
- [8] Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
- [9] Наймарк М. Ю. Нормированные кольца. М.: Наука, 1968.
- [10] Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я. Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. Кишинев: Штиинца, 1973.
- [11] Гохберг И. Ц., Фельдман И. А. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М.: Наука, 1971.

Ростовский государственный университет
E-mail: vgov@ms.unird.ac.ru

Поступило
20.12.2000