Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Э. Абрамян, Обоснование сходимости метода прямоугольников для полного сингулярного интегрального уравнения с непрерывными коэффициентами на окружности, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 2, 163–175

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2480>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 14:50:34

УДК 517.9

ОБОСНОВАНИЕ СХОДИМОСТИ МЕТОДА ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ ДЛЯ ПОЛНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НА ОКРУЖНОСТИ

М. Э. Абрамян

Для интегрального уравнения на единичной окружности Γ вида $(aI + bS + K)f = g$, где a и b – гёльдеровские функции, S – оператор сингулярного интегрирования, K – интегральный оператор с гёльдеровским ядром, рассматривается метод решения, основанный на дискретизации интегральных операторов по формуле прямоугольников. Дается обоснование этого метода в предположении, что уравнение разрешимо в $L_2(\Gamma)$, а коэффициенты a и b удовлетворяют условию сильной эллиптичности.

Библиография: 13 названий.

Работа посвящена исследованию приближенного метода решения сингулярных интегральных уравнений в классах гёльдеровских функций, в котором аппроксимация сингулярного интеграла осуществляется с помощью составной квадратурной формулы типа прямоугольников. Ранее подобные методы изучались в монографии [1, гл. 5, § 1; гл. 6, § 1]. В ней приведено описание варианта формулы прямоугольников, в котором подынтегральная функция f вычисляется на концах участка разбиения (отрезка или дуги окружности), а само приближенное значение сингулярного интеграла Sf находится в средних точках участков разбиения. Такая схема применима в случае уравнения первого рода $Sf = g$ на отрезке или на окружности. Однако из-за того, что дискретизация функций f и g проводится по разным наборам узлов, перенос подобной схемы на более сложные сингулярные интегральные уравнения оказывается невозможным.

В предлагаемом методе используется вариант формулы прямоугольников для сингулярного интеграла на единичной окружности Γ , в котором и подынтегральная функция, и приближенное значение интеграла вычисляются на одном и том же множестве точек (образующем равномерное разбиение окружности), что позволяет применять эту формулу для полных сингулярных интегральных уравнений.

Работа состоит из восьми пунктов. В первом пункте дается описание дискретизаций интегральных операторов и формулируется основной результат (теорема 1). Остальные пункты посвящены доказательству основного результата.

1. Пусть Γ – единичная окружность в комплексной плоскости $\mathbb{C}$: $\Gamma = \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$. Обозначим через $H_\alpha(\Gamma)$ множество всех определенных на Γ комплекснозначных функций f , удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем $\alpha \in (0, 1)$:

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq A|t_1 - t_2|^\alpha, \quad t_1, t_2 \in \Gamma,$$

где A не зависит от выбора точек t_1, t_2 . Через $H_\alpha(\Gamma \times \Gamma)$ будем обозначать множество всех определенных на Γ комплекснозначных функций двух переменных, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем $\alpha \in (0, 1)$ по совокупности переменных:

$$|f(t_1, \tau_1) - f(t_2, \tau_2)| \leq A(|t_1 - t_2|^\alpha + |\tau_1 - \tau_2|^\alpha), \quad t_1, t_2, \tau_1, \tau_2 \in \Gamma.$$

Положим

$$H(\Gamma) = \bigcup_{\alpha \in (0,1)} H_\alpha(\Gamma), \quad H(\Gamma \times \Gamma) = \bigcup_{\alpha \in (0,1)} H_\alpha(\Gamma \times \Gamma).$$

Через $\mathbb{H}_\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$, будем обозначать множество всех интегральных операторов с ядром из класса $H_\alpha(\Gamma \times \Gamma)$, определенных на функциях класса $H(\Gamma)$. Положим

$$\mathbb{H} = \bigcup_{\alpha \in (0,1)} \mathbb{H}_\alpha.$$

Пусть S – оператор сингулярного интегрирования на Γ :

$$(Sf)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\tau) d\tau}{\tau - t}, \quad t \in \Gamma,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Рассмотрим полное сингулярное интегральное уравнение

$$(aI + bS + K)x = y, \quad (1)$$

где $a, b, y \in H_\alpha(\Gamma)$, I – единичный оператор, $K \in \mathbb{H}_\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$. Будем предполагать, что оператор $D = aI + bS + K$ является обратимым в $L_2(\Gamma)$. Это, в частности, означает, что для любой функции $y \in H_\alpha(\Gamma)$ существует единственное решение $\tilde{x}$ уравнения (1), также принадлежащее $H_\alpha(\Gamma)$.

Зафиксируем число $n \in \mathbb{N}$ и определим на контуре Γ точки $t_n^m = (t_n)^m$, $m \in \mathbb{N}$, где $t_n = \exp(2\pi i/n)$.

Будем называть n -мерной дискретизацией непрерывной на Γ функции f вектор $[f]^{(n)} = (f(t_n^0), f(t_n^1), \dots, f(t_n^{n-1})) \in \mathbb{C}^n$, а n -мерной дискретизацией оператора сингулярного интегрирования S по формуле прямоугольников оператор умножения на матрицу $S_n = \|s_{ml}^{(n)}\|_{m,l=0}^{n-1}$ с элементами

$$s_{ml}^{(n)} = \begin{cases} 0, & m = l, \\ \frac{1}{\pi i} \frac{t_n^{l+1} - t_n^l}{t_n^l - t_n^m}, & m \neq l. \end{cases}$$

Определим также n -мерную дискретизацию оператора $K \in \mathbb{H}$ с ядром k как оператор умножения на матрицу $[K]_n = \|k_{ml}^{(n)}\|_{m,l=0}^{n-1}$ с элементами

$$k_{ml}^{(n)} = k(t_n^m, t_n^l) \cdot (t_n^{l+1} - t_n^l), \quad m, l = 0, \dots, n-1.$$

Для непрерывной на Γ функции f обозначим через $d_n(f)$ диагональную матрицу порядка n с диагональными элементами $f(t_n^0), f(t_n^1), \dots, f(t_n^{n-1})$; $d_n(1) = I_n$ – единичная матрица порядка n .

В пространстве $\mathbb{C}^n$ будем рассматривать, наряду со стандартной нормой

$$\|z^{(n)}\|_{(\infty, n)} = \max_{0 \leq m \leq n-1} |z_m^{(n)}|,$$

норму следующего вида (дискретный аналог L_2 -нормы):

$$\|z^{(n)}\|_{(n)} = n^{-1/2} \left(\sum_{m=0}^{n-1} |z_m^{(n)}|^2 \right)^{1/2}. \quad (2)$$

Для комплексных матриц A_n порядка n будем использовать *спектральную норму*:

$$\|A_n\|_{(n)} = \max_{0 \leq m \leq n-1} \sigma_m^{(n)},$$

где $\{\sigma_m^{(n)}\}_{m=0}^{n-1}$ – набор сингулярных чисел матрицы A_n , совпадающий с набором арифметических квадратных корней из собственных значений матрицы $A_n^* A_n$. Данная матричная норма является *подчиненной* по отношению к векторной норме (2) [2, п. 14.58], т.е. удовлетворяет следующему соотношению:

$$\|A_n\|_{(n)} = \sup_{z^{(n)} \neq 0} \frac{\|A_n z^{(n)}\|_{(n)}}{\|z^{(n)}\|_{(n)}}.$$

Поставим уравнению (1) в соответствие систему линейных уравнений

$$(d_n(a) + d_n(b)S_n + [K]_n)x^{(n)} = [y]^{(n)}, \quad (3)$$

где $[y]^{(n)}$ – n -мерная дискретизация функции $y \in H_\alpha(\Gamma)$.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема о сходимости решения системы уравнений (3) к решению уравнения (1).

ТЕОРЕМА 1. Пусть оператор D является обратимым в $L_2(\Gamma)$, а для функций a и b выполняется условие сильной эллиптичности:

$$a(t) + \lambda b(t) \neq 0, \quad \lambda \in [-1, 1], \quad t \in \Gamma.$$

Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого $n_0 = n_0(D)$, система (3) имеет единственное решение $\tilde{x}^{(n)}$, которое связано с решением $\tilde{x}$ уравнения (1) следующим образом:

$$\|[\tilde{x}]^{(n)} - \tilde{x}^{(n)}\|_{(n)} \leq C n^{-\alpha} (\ln n + 1), \quad (4)$$

где $C = C(D, y)$ не зависит от n .

2. Вначале рассмотрим вопрос о сходимости последовательности векторов $S_n[y]^{(n)}$ к функции Sy при $y \in H_\alpha(\Gamma)$.

ЛЕММА 1. Пусть $f \in H_\alpha(\Gamma)$, $\alpha \in (0, 1)$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$\|[Sf]^{(n)} - S_n[f]^{(n)}\|_{(\infty, n)} \leq Cn^{-\alpha}(\ln n + 1)\|f\|_\alpha,$$

где $C > 0$ – константа, не зависящая от f , n и α ; $\|\cdot\|_\alpha$ – гёльдеровская норма порядка α :

$$\|f\|_\alpha = \max_{t \in \Gamma} |f(t)| + \sup_{\substack{t, \tau \in \Gamma \\ t \neq \tau}} \frac{|t(t) - f(\tau)|}{|t - \tau|^\alpha}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО данного утверждения носит технический характер и проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 1.2.1 в [1, гл. 1, § 2]. Подробности доказательства изложены в [3, п. 4, лемма 1].

ЗАМЕЧАНИЕ. Если функция f обладает большей гладкостью, то дискретизация по предложенной схеме не обеспечивает, вообще говоря, более быстрой сходимости последовательности векторов $S_n[f]^{(n)}$ к функции Sf , чем та, которая обоснована в лемме 1. Действительно, для постоянной функции $f(z) \equiv 1$ имеем

$$\begin{aligned} & \|[Sf]^{(n)} - S_n[f]^{(n)}\|_{(\infty, n)} \\ &= \max_{0 \leq m \leq n-1} \left| \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\tau}{\tau - t_n^m} - \frac{1}{\pi i} \exp \frac{\pi i}{n} \sin \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\exp(\pi i m/n)}{\sin(\pi m/n)} \right| \\ &= \left| 1 - \frac{n-1}{\pi} \exp \frac{\pi i}{n} \sin \frac{\pi}{n} \right| = O^*\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, даже для постоянных функций скорость сходимости имеет порядок n^{-1} . Это, в частности, означает, что оценка (4), по-видимому, не может быть существенно улучшена при дополнительных предположениях о большей гладкости коэффициентов a, b , ядра оператора K и правой части y исходного уравнения (1).

3. Обратимся к характеристическому уравнению с постоянными коэффициентами

$$(aI + bS)x = y,$$

где $a, b \in \mathbb{C}$, $y \in H_\alpha(\Gamma)$, $\alpha \in (0, 1)$. Ему соответствует система уравнений

$$(aI_n + bS_n)x^{(n)} = [y]^{(n)}. \quad (5)$$

Исследуем разрешимость этой системы в предположении, что для чисел a и b выполняется условие

$$a + \lambda b \neq 0, \quad \lambda \in [-1, 1]. \quad (6)$$

ЛЕММА 2. Собственные значения матрицы $aI_n + bS_n$ вычисляются по формуле

$$\lambda_m^{(n)} = a + \frac{b}{\pi}(n - 2m - 1) \exp \frac{\pi i}{n} \sin \frac{\pi}{n}, \quad m = 0, \dots, n - 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на теории циркулянтов [4, ч. I, п. 4.9]. Напомним, что матрица C_n порядка n называется *циркулянтом*, порожденным набором чисел $\{c_m\}_{m=0}^{n-1}$, если она имеет вид

$$C_n = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \dots & c_{n-2} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 & \dots & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_0 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения этой матрицы вычисляются по формуле

$$\lambda_m = \sum_{k=0}^{n-1} c_k t_n^{km}, \quad m = 0, \dots, n-1. \quad (7)$$

Матрица $aI_n + bS_n$ является циркулянтом. Из (7) получаем следующее выражение для ее собственных значений:

$$\lambda_m^{(n)} = a + \frac{b \exp(\pi i/n) \sin(\pi/n)}{\pi i} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\exp(\pi i k(2m+1)/n)}{\sin(\pi k/n)}.$$

Для завершения доказательства осталось воспользоваться формулой

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\exp(\pi i k(2m+1)/n)}{\sin(\pi k/n)} = i(n-2m-1), \quad m = 0, \dots, n-1,$$

доказательство которой приведено в [3, п. 3, следствие 1].

Так как любой циркулянт является нормальной матрицей, его спектральная норма равна максимальному из модулей его собственных значений. Поэтому в силу леммы 2 для любых $a, b \in \mathbb{C}$ нормы $\|aI_n + bS_n\|_{(n)}$ равномерно по n ограничены, а при выполнении для a и b условия (6) найдется такое целое $n_0 = n_0(a, b)$, что для всех $n \geq n_0$ матрицы $aI_n + bS_n$ обратимы, и нормы обратных матриц равномерно ограничены. Тем самым, доказана разрешимость системы уравнений (5) для всех $n \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого n_0 .

Из леммы 2 также вытекает равномерная ограниченность норм дискретизаций оператора сингулярного интегрирования:

$$\|S_n\|_{(n)} \leq C_s, \quad (8)$$

где $C_s > 0$ не зависит от $n \in \mathbb{N}$.

Обратимся к матрице S_n^2 . Это циркулянт, порожденный числами

$$s'_m = \frac{\exp(\pi i(m+2)/n) \sin^2(\pi/n)}{\pi^2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^{n-1} \frac{1}{\sin(\pi k/n) \sin(\pi(k-m)/n)}, \quad m = 0, \dots, n-1.$$

Последняя сумма при $m = 0$ равна $(n^2 - 1)/3$ [5, формула 4.4.6.5]. В случае $m = 1, \dots, n - 1$ имеет место формула

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^{n-1} \frac{1}{\sin(\pi k/n) \sin(\pi(k-m)/n)} = \frac{2 \cos(\pi m/n)}{\sin^2(\pi m/n)},$$

доказанная в [3, п. 3, следствие 2].

Из полученных формул следует, что элементы S_n^2 не стремятся к элементам единичной матрицы I_n при $n \rightarrow \infty$ (в то время как $S^2 = I$). Тем не менее, как нетрудно установить, имеет место соотношение

$$\sum_{m=0}^{n-1} s'_m = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

и для функций $f \in H_\alpha(\Gamma)$, $\alpha \in (0, 1)$, можно доказать следующую оценку:

$$\|(I_n - S_n^2)[f]^{(n)}\|_{(\infty, n)} \leq C n^{-\alpha} \|f\|_\alpha,$$

где $C > 0$ – константа, не зависящая от f , n и α ; $\|\cdot\|_\alpha$ – гёльдеровская норма порядка α . Подробное доказательство данной оценки приводится в [3, п. 4, лемма 3].

4. Перечислим некоторые свойства дискретизаций интегральных операторов с гёльдеровскими ядрами, используемые в дальнейшем. Вначале отметим следующее простое предложение.

ЛЕММА 3. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \|a_{ml}^{(n)}\|_{m,l=0}^{n-1}$ – матрица порядка n , элементы которой имеют вид

$$a_{ml}^{(n)} = \tilde{a}_{ml}^{(n)} \cdot (t_n^{l+1} - t_n^l).$$

Тогда

$$\|A_n\|_{(n)} \leq 2\pi \max_{0 \leq m, l \leq n-1} |\tilde{a}_{ml}^{(n)}|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства леммы достаточно заметить, что требуемая оценка справедлива для евклидовой матричной нормы

$$\|A_n\|_{(E, n)} = \left(\sum_{m, l=0}^{n-1} |a_{ml}^{(n)}|^2 \right)^{1/2},$$

и учесть соотношение $\|A_n\|_{(n)} \leq \|A_n\|_{(E, n)}$, справедливое для любой матрицы A_n порядка n [2, п. 14.49].

Из леммы 3 легко получить следующие соотношения:

- для $K_1, K_2 \in \mathbb{H}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|[K_1 K_2]_n - [K_1]_n [K_2]_n\|_{(n)} = 0; \quad (9)$$

- для $f \in H_\alpha(\Gamma)$, $K \in \mathbb{H}_\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$,

$$\|[Kf]^{(n)} - [K]_n [f]^{(n)}\|_{(\infty, n)} \leq C n^{-\alpha}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (10)$$

где $C = C(K, f)$ не зависит от n .

Далее, учитывая, что для $K \in \mathbb{H}$ операторы SK и KS также принадлежат классу $\mathbb{H}$ [6, гл. 1, § 18], и используя отмеченные выше свойства матриц S_n, S_n^2 , а также лемму 3, получаем следующие предельные соотношения:

- для $K \in \mathbb{H}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|[SK]_n - S_n[K]_n\|_{(n)} = 0, \quad (11)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|[KS]_n - [K]_n S_n\|_{(n)} = 0, \quad (12)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(I_n - S_n^2)[K]_n\|_{(n)} = 0. \quad (13)$$

Подробные доказательства указанных выше свойств дискретизаций интегральных операторов с гёльдеровскими ядрами приводятся в [7, п. 3].

5. Пусть $\mathfrak{A}_n$ – банахова алгебра комплексных квадратных матриц порядка n , $\mathfrak{A}$ – множество всех последовательностей матриц $\{A_n\} = \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $A_n \in \mathfrak{A}_n$, с конечной нормой

$$\|\{A_n\}\|_{\mathfrak{A}} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\|_{(n)}.$$

Множество $\mathfrak{A}$ с “покоординатно” выполняемыми операциями и указанной нормой образует банахову алгебру. Пусть $\mathfrak{I}_0 \subset \mathfrak{A}$ – подалгебра с элементами $\{\Delta_n\}$, для которых

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\|_{(n)} = 0.$$

Множество $\mathfrak{I}_0$ является собственным замкнутым двусторонним идеалом алгебры $\mathfrak{A}$.

Пусть $X \subset \mathbb{N}$, $\{A_n\}_{n \in X}$ – семейство квадратных матриц $A_n \in \mathfrak{A}_n$. Данное семейство матриц будем называть *равномерно обратимым*, если все матрицы обратимы, а спектральные нормы обратных к ним матриц ограничены в совокупности. Имеет место утверждение [8].

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Следующие условия эквивалентны:

- (1) существует такое n_0 , что семейство матриц $\{A_n\}_{n \geq n_0}$ равномерно обратимо;
- (2) смежный класс $\{A_n\} + \mathfrak{I}_0$ обратим в фактор-алгебре $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}_0$.

Введем обозначение для основной матрицы системы линейных уравнений (3):

$$D_n = d_n(a) + d_n(b)S_n + [K]_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В силу утверждения 1 разрешимость системы линейных уравнений (3) для всех $n \geq n_0$ следует из обратимости смежного класса $\{D_n\} + \mathfrak{I}_0$. Для доказательства обратимости смежного класса (при выполнении условий теоремы 1) воспользуемся схемой, предложенной в [9], и введем в рассмотрение два вспомогательных идеала.

Пусть $\mathfrak{J}_k \subset \mathfrak{A}$ – замыкание в $\mathfrak{A}$ множества $\mathfrak{J}_k^0$, состоящего из элементов $\{A_n\}$ вида $A_n = [K]_n + \Delta_n$, где $K \in \mathbb{H}$, $\{\Delta_n\} \in \mathfrak{I}_0$. Стандартными рассуждениями, с использованием предельного соотношения (9), можно показать, что множество $\mathfrak{J}_k$ является замкнутой подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}$.

Для любого семейства матриц $\{\|a_{ml}^{(n)}\|_{m,l=0}^{n-1}\} \in \mathcal{I}_k$ справедливо следующее свойство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{ml}^{(n)}| = 0 \quad \forall m, l \in \mathbb{N}. \quad (14)$$

Для семейств матриц $\{[K]_n\}$, где $K \in \mathbb{H}$, этот факт проверяется непосредственно; для семейств матриц $\{\Delta_n\} \in \mathcal{I}_0$ он следует из оценки

$$\max_{0 \leq m, l \leq n-1} |a_{ml}| \leq \|A\|_{(n)},$$

справедливой для любой матрицы $A = \|a_{ml}\|_{m,l=0}^{n-1}$ [2, п. 14.49]. Таким образом, свойство (14) выполняется для элементов множества $\mathcal{I}_k^0$. Оно, очевидно, остается справедливым и для замыкания данного множества.

Отметим, что $\mathcal{I}_k \neq \mathcal{I}_0$. Действительно, рассмотрим интегральный оператор K_0 с ядром $k_0(t, \tau) \equiv 1$. Очевидно, $\{[K_0]_n\} \in \mathcal{I}_k$. Непосредственные вычисления показывают, что $\|[K_0]_n\|_{(n)} = 2n \sin(\pi/n)$, и, следовательно, $\{[K_0]_n\} \notin \mathcal{I}_0$.

Обозначим через $\mathcal{A}'$ максимальную подалгебру алгебры $\mathcal{A}$, для которой множество $\mathcal{I}_k$ является двусторонним идеалом. Для любой функции $f \in H(\Gamma)$ семейство диагональных матриц $\{d_n(f)\}$ принадлежит алгебре $\mathcal{A}'$. Из предельных соотношений (11), (12) вытекает, что $\{S_n\}$ также принадлежит $\mathcal{A}'$. Поскольку $\{I_n\} \notin \mathcal{I}_k$ (так как диагональные элементы I_n не стремятся к 0 при $n \rightarrow \infty$ и, следовательно, свойство (14) не выполняется), заключаем, что $\mathcal{I}_k$ является собственным идеалом алгебры $\mathcal{A}'$.

Пусть $\mathcal{I}_s \subset \mathcal{A}'$ — множество таких семейств матриц $\{A_n\}$, для которых $\{A_n\} \cdot \{B_n\} \in \mathcal{I}_0$ при любых $\{B_n\} \in \mathcal{I}_k$. Это замкнутая подалгебра алгебры $\mathcal{A}'$. Данное множество называется *левым частным идеалом* $\mathcal{I}_0$ и $\mathcal{I}_k$ и является двусторонним идеалом в $\mathcal{A}'$ [10, гл. 13, § 95]. Заметим, что $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I}_k \cap \mathcal{I}_s$ и идеал $\mathcal{I}_s$ является собственным, так как для $\{I_n\} \in \mathcal{A}'$ и $\{[K_0]_n\} \in \mathcal{I}_k \setminus \mathcal{I}_0$ имеем $\{I_n\} \cdot \{[K_0]_n\} \notin \mathcal{I}_0$.

Имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 4. Пусть $\mathcal{A}$ — кольцо с единицей e ; $\mathcal{I}_0, \mathcal{I}_1 \subset \mathcal{A}$ — собственные двусторонние идеалы, $\mathcal{I}_2 \subset \mathcal{A}$ — собственный двусторонний идеал, являющийся левым частным идеалом $\mathcal{I}_0$ и $\mathcal{I}_1$:

$$\mathcal{I}_2 = \{x \in \mathcal{A} : \forall a \in \mathcal{I}_1, xa \in \mathcal{I}_0\}.$$

Если смежный класс $x + \mathcal{I}_j$ обратим в $\mathcal{A}/\mathcal{I}_j$, $j = 1, 2$, то смежный класс $x + \mathcal{I}_0$ обратим в $\mathcal{A}/\mathcal{I}_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО данного утверждения проводится аналогично доказательству леммы 7 из [9]: выбрав $y_j \in (x + \mathcal{I}_j)^{-1}$ ($\in \mathcal{A}/\mathcal{I}_j$), $j = 1, 2$, и положив $y = y_1 + y_2 - y_1 x y_2$, легко установить, что $xy - e \in \mathcal{I}_0$, $yx - e \in \mathcal{I}_0$, что и обеспечивает обратимость смежного класса $x + \mathcal{I}_0$ в $\mathcal{A}/\mathcal{I}_0$.

Следующие два пункта будут посвящены доказательству обратимости смежных классов $\{D_n\} + \mathcal{I}_k$ и $\{D_n\} + \mathcal{I}_s$ в фактор-алгебрах $\mathcal{A}'/\mathcal{I}_k$ и $\mathcal{A}'/\mathcal{I}_s$ соответственно (при выполнении условий теоремы 1).

6. Обратимость смежного класса $\{D_n\} + \mathcal{I}_k$ в $\mathcal{A}'/\mathcal{I}_k$ будет доказана с помощью локального принципа Гохберга–Крупника [11, гл. 12, § 1], основные положения которого приводятся ниже.

Пусть $\mathcal{A}$ – банахова алгебра с единицей. Множество $M \subset \mathcal{A}$ называется *локализирующим классом*, если $0 \notin M$ и для любых элементов $a_1, a_2 \in M$ найдется элемент $a \in M$ такой, что $a_1 a = a a_1 = a$, $a_2 a = a a_2 = a$.

Элементы $x, y \in \mathcal{A}$ называются *M-эквивалентными*, если

$$\inf_{a \in M} \|(x - y)a\| = 0 \quad \text{и} \quad \inf_{a \in M} \|a(x - y)\| = 0.$$

Локальным представителем элемента $x \in \mathcal{A}$ относительно локализирующего класса M называется любой элемент $y \in \mathcal{A}$, *M-эквивалентный* элементу x .

Элемент $x \in \mathcal{A}$ называется *M-обратимым*, если существуют элементы $y_1, y_2 \in \mathcal{A}$, $a_1, a_2 \in M$ такие, что $y_1 x a_1 = a_1$, $a_2 x y_2 = a_2$. Если элементы $x_1, x_2 \in \mathcal{A}$ являются *M-эквивалентными*, то они одновременно *M-обратимы* или нет.

Система локализирующих классов $\{M_\tau\}_{\tau \in T}$ называется *покрывающей*, если из любого множества $\{a_\tau\}_{\tau \in T}$ элементов $a_\tau \in M_\tau$ можно выделить конечное подмножество элементов, сумма которых является обратимым элементом в $\mathcal{A}$. Приведем основное утверждение локального принципа.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $\{M_\tau\}_{\tau \in T}$ – покрывающая система локализирующих классов в банаховой алгебре $\mathcal{A}$ и элемент $x \in \mathcal{A}$ *M*_τ-эквивалентен элементу $y_\tau \in \mathcal{A}$ для любого $\tau \in T$. Если элемент x коммутирует со всеми элементами из $\bigcup_{\tau \in T} M_\tau$, то он обратим в $\mathcal{A}$ в том и только том случае, когда для любого $\tau \in T$ элемент y_τ является *M*_τ-обратимым.

Построим для фактор-алгебры $\mathcal{A}'/\mathcal{I}_k$ покрывающую систему локализирующих классов. Зафиксируем $\xi \in \Gamma$. Через Ψ_ξ обозначим семейство дважды непрерывно дифференцируемых на Γ функций ψ_ξ , удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) множество $\psi_\xi^{-1}(\{1\})$ является окрестностью точки ξ на Γ ;
- 2) $0 \leq \psi_\xi(t) \leq 1$ для любого $t \in \Gamma$.

Через $\mathcal{M}_\xi$, $\xi \in \Gamma$, обозначим семейство смежных классов фактор-алгебры $\mathcal{A}'/\mathcal{I}_k$ вида $\{d_n(\psi_\xi)\} + \mathcal{I}_k$, $\psi_\xi \in \Psi_\xi$. Очевидно, что для любого $\xi \in \Gamma$ множество $\mathcal{M}_\xi$ является локализирующим классом и система локализирующих классов $\{\mathcal{M}_\xi\}_{\xi \in \Gamma}$ является покрывающей.

ЛЕММА 5. Элемент $\{D_n\} + \mathcal{I}_k$ коммутирует со всеми элементами локализирующих классов $\mathcal{M}_\xi$, $\xi \in \Gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $\xi \in \Gamma$ и выберем произвольный элемент $\{d_n(\psi_\xi)\} + \mathcal{I}_k \in \mathcal{M}_\xi$. Достаточно показать, что $\{D_n d_n(\psi_\xi) - d_n(\psi_\xi) D_n\} \in \mathcal{I}_k$. Имеем

$$\begin{aligned} & (d_n(a) + d_n(b)S_n + [K]_n)d_n(\psi_\xi) - d_n(\psi_\xi)(d_n(a) + d_n(b)S_n + [K]_n) \\ &= d_n(b)(S_n d_n(\psi_\xi) - d_n(\psi_\xi)S_n) + ([K]_n d_n(\psi_\xi) - d_n(\psi_\xi)[K]_n). \end{aligned}$$

Слагаемое $[K]_n d_n(\psi_\xi) - d_n(\psi_\xi)[K]_n$ является дискретизацией интегрального оператора $K\psi_\xi I - \psi_\xi K \in \mathbb{H}$, и, следовательно, соответствующее семейство матриц принадлежит идеалу $\mathcal{I}_k$. Осталось показать, что этому же идеалу принадлежит семейство

$\{S_n d_n(\psi_\xi) - d_n(\psi_\xi) S_n\}$. Рассмотрим интегральный оператор $S\psi_\xi I - \psi_\xi S$, ядро которого имеет вид

$$k(t, \tau) = \frac{\psi_\xi(\tau) - \psi_\xi(t)}{\tau - t}.$$

Так как ψ_ξ дважды непрерывно дифференцируема, функция k имеет непрерывные частные производные $\partial k / \partial t$ и $\partial k / \partial \tau$ на Γ и, следовательно, принадлежит классу $H(\Gamma \times \Gamma)$. Дискретизацию оператора $S\psi_\xi I - \psi_\xi S \in \mathbb{H}$ представим в виде

$$[S\psi_\xi I - \psi_\xi S]_n = K_n + \Delta_n,$$

где $K_n = \|k_{ml}^{(n)}\|_{m,l=0}^{n-1}$ — матрица с элементами

$$k_{ml}^{(n)} = \begin{cases} 0, & m = l, \\ \frac{\psi_\xi(t_n^l) - \psi_\xi(t_n^m)}{t_n^l - t_n^m} (t_n^{l+1} - t_n^l), & m \neq l, \end{cases}$$

а Δ_n является диагональной матрицей:

$$\Delta_n = \text{diag} \left(\frac{d\psi_\xi(t_n^0)}{dt} \cdot (t_n^1 - t_n^0), \frac{d\psi_\xi(t_n^1)}{dt} \cdot (t_n^2 - t_n^1), \dots, \frac{d\psi_\xi(t_n^{n-1})}{dt} \cdot (t_n^0 - t_n^{n-1}) \right).$$

Очевидно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\|_{(n)} = 0.$$

Так как $S_n d_n(\psi_\xi) - d_n(\psi_\xi) S_n = K_n$, получаем

$$S_n d_n(\psi_\xi) - d_n(\psi_\xi) S_n = [S\psi_\xi I - \psi_\xi S]_n - \Delta_n,$$

где $S\psi_\xi I - \psi_\xi S \in \mathbb{H}$, $\{\Delta_n\} \in \mathcal{J}_0$. Принадлежность семейства матриц $\{S_n d_n(\psi_\xi) - d_n(\psi_\xi) S_n\}$ идеалу $\mathcal{J}_k$ доказана. Тем самым, доказано и утверждение леммы.

Положим $D_n^{(\xi)} = a(\xi)I_n + b(\xi)S_n$, $\xi \in \Gamma$, $n \in \mathbb{N}$.

ЛЕММА 6. Для любого $\xi \in \Gamma$ смежные классы $\{D_n\} + \mathcal{J}_k$ и $\{D_n^{(\xi)}\} + \mathcal{J}_k$ фактор-алгебры $\mathfrak{A}'/\mathcal{J}_k$ являются $\mathfrak{M}_\xi$ -эквивалентными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $\xi \in \Gamma$. В силу коммутирования $\{D_n\} + \mathcal{J}_k$ с элементами локализующих классов $\{d_n(\psi_\xi)\} + \mathcal{J}_k$, $\psi_\xi \in \Psi_\xi$, достаточно доказать справедливость следующего равенства:

$$\inf_{\psi_\xi \in \Psi_\xi} \left\| (\{d_n(\psi_\xi)\} + \mathcal{J}_k) \cdot (\{D_n - D_n^{(\xi)}\} + \mathcal{J}_k) \right\|_k = 0,$$

где через $\| \cdot \|_k$ обозначается норма в фактор-алгебре $\mathfrak{A}'/\mathcal{J}_k$:

$$\| \{A_n\} + \mathcal{J}_k \|_k = \inf_{\{B_n\} \in \mathcal{J}_k} \| \{A_n + B_n\} \|_{\mathfrak{A}}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \|(\{d_n(\psi_\xi)\} + \mathfrak{I}_k) \cdot (\{D_n - D_n^{(\xi)}\} + \mathfrak{I}_k)\|_k \\ &= \inf_{\{B_n\} \in \mathfrak{I}_k} \|\{d_n(a_\xi) + d_n(b_\xi)S_n + d_n(\psi_\xi)[K]_n + B_n\}\|_{\mathfrak{A}} \\ &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \|d_n(a_\xi) + d_n(b_\xi)S_n\|_{(n)}, \end{aligned}$$

где $a_\xi(t) = \psi_\xi(t) \cdot (a(t) - a(\xi))$, $b_\xi(t) = \psi_\xi(t) \cdot (b(t) - b(\xi))$. Учитывая (8), оценим полученное выражение:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|d_n(a_\xi) + d_n(b_\xi)S_n\|_{(n)} \leq \max_{t \in \Gamma} |a_\xi(t)| + C_s \max_{t \in \Gamma} |b_\xi(t)|.$$

В силу непрерывности функций a и b , выражение в правой части оценки можно сделать сколь угодно малым за счет выбора функции $\psi_\xi \in \Psi_\xi$. Лемма доказана.

Для завершения доказательства обратимости смежного класса $\{D_n\} + \mathfrak{I}_k$ в $\mathfrak{A}'/\mathfrak{I}_k$ согласно локальному принципу (утверждение 2) достаточно установить обратимость смежных классов $\{D_n^{(\xi)}\} + \mathfrak{I}_k$, $\xi \in \Gamma$, которая, в свою очередь, обеспечивается равномерной обратимостью семейства матриц $\{a(\xi)I_n + b(\xi)S_n\}_{n \geq n_0}$ при любом $\xi \in \Gamma$. Так как по условию теоремы 1 для любого $\xi \in \Gamma$ числа $a(\xi)$ и $b(\xi)$ удовлетворяют условию сильной эллиптичности (6), равномерная обратимость данного семейства матриц вытекает из леммы 2. Обратимость смежного класса $\{D_n\} + \mathfrak{I}_k$ в $\mathfrak{A}'/\mathfrak{I}_k$ доказана.

7. Для доказательства обратимости смежного класса $\{D_n\} + \mathfrak{I}_s$ в фактор-алгебре $\mathfrak{A}'/\mathfrak{I}_s$ воспользуемся обратимостью оператора D .

Учитывая свойства регуляризаторов для полного сингулярного интегрального уравнения [12, гл. 3, § 22] и утверждение о том, что для обратимого оператора $I + K$, где K – интегральный оператор с непрерывным ядром, обратный к нему имеет вид $I + K'$, где K' также является интегральным оператором с непрерывным ядром [13, гл. 2, § 4, п. 4.2], нетрудно показать [7, п. 6], что оператор D^{-1} представим в виде

$$D^{-1} = \tilde{a}I + \tilde{b}S + \tilde{K},$$

где $\tilde{a}(t) = a(t)/(a^2(t) - b^2(t))$, $\tilde{b}(t) = -b(t)/(a^2(t) - b^2(t))$, а оператор $\tilde{K}$ является интегральным оператором с гёльдеровским ядром, т.е. принадлежит множеству $\mathbb{H}$.

ЛЕММА 7. *Смежный класс $\{D_n\} + \mathfrak{I}_s$ ($\in \mathfrak{A}'/\mathfrak{I}_s$) обратим, и обратным к нему является смежный класс $\{\tilde{D}_n\} + \mathfrak{I}_s$, где*

$$\tilde{D}_n = d_n(\tilde{a}) + d_n(\tilde{b})S_n + [\tilde{K}]_n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что для любого семейства матриц $\{B_n\} \in \mathfrak{I}_k$ семейства $\{(\tilde{D}_n D_n - I_n)B_n\}$, $\{(D_n \tilde{D}_n - I_n)B_n\}$ принадлежат идеалу $\mathfrak{I}_0$.

Поскольку идеал $\mathcal{I}_k$ содержит в качестве плотного множества семейства матриц вида $\{[B]_n + \Delta_n\}$, где $B \in \mathbb{H}$, $\{\Delta_n\} \in \mathcal{I}_0$, можно ограничиться элементами $\{[B]_n\}$ идеала $\mathcal{I}_k$ при $B \in \mathbb{H}$. В этом случае для элементов первого семейства матриц получаем

$$\begin{aligned} (\tilde{D}_n D_n - I_n)[B]_n &= d_n(\tilde{b}\tilde{b})(S_n^2 - I_n)[B]_n + (d_n(\tilde{a}) + d_n(\tilde{b})S_n)[K]_n[B]_n \\ &\quad + [\tilde{K}]_n(d_n(a) + d_n(b)S_n)[B]_n + [\tilde{K}]_n[K]_n[B]_n \\ &\quad + d_n(\tilde{b})(S_n d_n(a) - d_n(a)S_n)[B]_n \\ &\quad + d_n(\tilde{b})(S_n d_n(b) - d_n(b)S_n)S_n[B]_n. \end{aligned} \quad (15)$$

Первое слагаемое в правой части полученного равенства принадлежит $\mathcal{I}_0$ в силу (13). В прочих слагаемых раскроем скобки и проанализируем их по отдельности, воспользовавшись стандартной схемой, которую опишем на примере слагаемого $d_n(\tilde{b})S_n[K]_n[B]_n$. Имеем

$$\begin{aligned} &\|d_n(\tilde{b})S_n[K]_n[B]_n - \tilde{b}SKB\|_{(n)} \\ &= \|d_n(\tilde{b})(S_n[K]_n[B]_n - [SKB]_n) + d_n(\tilde{b})[SKB]_n - \tilde{b}SKB\|_{(n)} \\ &\leq \max_{t \in \Gamma} |\tilde{b}(t)| \cdot \|S_n[K]_n[B]_n - [SKB]_n\|_{(n)} + \|d_n(\tilde{b})[SKB]_n - \tilde{b}SKB\|_{(n)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Так как $d_n(\tilde{b})[SKB]_n = \tilde{b}SKB$, последняя норма в (16) равна 0 для любого n . Обратимся к первой норме правой части оценки (16). Для нее с учетом (8) получаем

$$\begin{aligned} \|S_n[K]_n[B]_n - [SKB]_n\|_{(n)} &= \|S_n([K]_n[B]_n - [KB]_n) + S_n[KB]_n - [SKB]_n\|_{(n)} \\ &\leq C_s \| [K]_n[B]_n - [KB]_n \|_{(n)} + \|S_n[KB]_n - [SKB]_n\|_{(n)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Обе нормы в правой части оценки (17) стремятся к 0 при $n \rightarrow \infty$ (первая в силу (9), вторая в силу (11)). Таким образом, доказано следующее соотношение:

$$d_n(\tilde{b})S_n[K]_n[B]_n = \tilde{b}SKB + \Delta'_n,$$

где $\{\Delta'_n\} \in \mathcal{I}_0$. Проводя аналогичные рассуждения для оставшихся слагаемых в правой части (15) и пользуясь аддитивностью операции дискретизации $[\cdot]_n$ операторов из $\mathbb{H}$, получаем

$$\begin{aligned} (\tilde{D}_n D_n - I_n)[B]_n &= [(\tilde{a}I + \tilde{b}S)KB + \tilde{K}(aI + bS)B + \tilde{K}KB \\ &\quad + \tilde{b}(SaI - aS)B + \tilde{b}(SbI - bS)SB]_n + \Delta_n \\ &= [D^{-1}D - I]_n + \Delta_n = \Delta_n, \end{aligned}$$

где $\{\Delta_n\} \in \mathcal{I}_0$. Таким образом, $\{(\tilde{D}_n D_n - I_n)[B]_n\} \in \mathcal{I}_0$.

Аналогичными рассуждениями обосновывается принадлежность идеалу $\mathcal{I}_0$ семейства матриц $\{(D_n \tilde{D}_n - I_n)[B]_n\}$. Лемма доказана.

Учитывая данную лемму и результат предыдущего пункта, получаем в силу леммы 4, что смежный класс $\{D_n\} + \mathcal{I}_0$ обратим в фактор-алгебре $\mathfrak{A}'/\mathcal{I}_0$, а значит, и в фактор-алгебре $\mathfrak{A}/\mathcal{I}_0$. Тем самым, в силу утверждения 1 доказано существование единственного решения системы линейных уравнений (3) для всех $n \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого n_0 .

8. Для завершения доказательства теоремы 1 осталось получить оценку (4).

Пусть $\tilde{x}$ – решение уравнения (1), $\tilde{x}^{(n)}$ – решение системы уравнений (3), существующее для всех $n \geq n_0$. Выполним следующие преобразования:

$$\begin{aligned} D_n[\tilde{x}]^{(n)} - D_n\tilde{x}^{(n)} &= D_n[\tilde{x}]^{(n)} - [y]^{(n)} \\ &= (d_n(a) + d_n(b)S_n + [K]_n)[\tilde{x}]^{(n)} - [a\tilde{x} + bS\tilde{x} + K\tilde{x}]^{(n)} \\ &= d_n(b)(S_n[\tilde{x}]^{(n)} - [S\tilde{x}]^{(n)}) + ([K]_n[\tilde{x}]^{(n)} - [K\tilde{x}]^{(n)}). \end{aligned} \quad (18)$$

Из соотношения (18) с учетом леммы 1, оценки (10), а также оценки $\|z^{(n)}\|_{(n)} \leq \|z^{(n)}\|_{(\infty, n)}$, справедливой для любого вектора $z^{(n)} \in \mathbb{C}^n$, получаем

$$\|D_n[\tilde{x}]^{(n)} - D_n\tilde{x}^{(n)}\|_{(n)} \leq \|D_n[\tilde{x}]^{(n)} - D_n\tilde{x}^{(n)}\|_{(\infty, n)} \leq C'n^{-\alpha}(\ln n + 1),$$

где $C' > 0$ не зависит от n . Осталось применить оценку

$$\|[\tilde{x}]^{(n)} - \tilde{x}^{(n)}\|_{(n)} \leq \|D_n^{-1}\|_{(n)} \cdot \|D_n[\tilde{x}]^{(n)} - D_n\tilde{x}^{(n)}\|_{(n)}$$

и воспользоваться ранее установленной равномерной ограниченностью норм $\|D_n^{-1}\|_{(n)}$ при $n \geq n_0$. Теорема 1 полностью доказана.

Автор глубоко признателен профессору В. С. Пилиди за обсуждение настоящей работы и высказанные при этом многочисленные полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985.
- [2] Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.
- [3] Абрамян М. Э., Пилиди В. С. Обоснование метода прямоугольников для сингулярного интегрального уравнения с постоянными коэффициентами на окружности // Деп. ВИНТИ 27.07.98 № 2385–В98. Ростов-на-Дону, 1998.
- [4] Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1972.
- [5] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981.
- [6] Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
- [7] Абрамян М. Э. Обоснование метода прямоугольников для полного сингулярного интегрального уравнения с непрерывными коэффициентами на окружности // Деп. ВИНТИ 25.10.2001 № 2218–В2001. Ростов-на-Дону, 2001.
- [8] Козак А. В. Локальный принцип в теории проекционных методов // Докл. АН СССР. 1973. Т. 212. С. 1287–1289.
- [9] Пилиди В. С. Критерии равномерной обратимости регулярных аппроксимаций одномерных сингулярных интегральных операторов с кусочно-непрерывными коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 6. С. 1270–1294.
- [10] Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. М.: Наука, 1976.
- [11] Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я. Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. Кишинев: Штиинца, 1973.
- [12] Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
- [13] Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А., Михлин С. Г., Раковщик Л. С., Степенко В. Я. (ред.) Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.