Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Герко, Согласованные решения линейных уравнений в вариационных производных, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 2, 176–187

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2483>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 13:48:48

УДК 517.9

СОГЛАСОВАННЫЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ВАРИАЦИОННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

А. И. Герко

В заметке для линейных уравнений в вариационных производных рассматривается классическая задача о существовании у уравнения согласованных и равномерно согласованных решений. В частности, мы обобщаем некоторые результаты В. В. Жикова и Б. А. Щербакова о существовании почти периодических, согласованных и равномерно согласованных решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. Настоящие исследования проведены в рамках разрабатываемой в Кипине программы по изучению многомерных дифференциальных уравнений [1] методами топологической динамики. Основные направления этой программы отражены в обзорной статье [2]. Дополнительно к имеющейся в [2] информации можно добавить вышедшие позже работы [3]–[7]. Во всех перечисленных работах (кроме [7]) рассматриваются многомерные уравнения, у которых независимая переменная (“время”) принимает значения из конечномерного векторного пространства. Автором ставится задача качественного исследования систем уравнений в вариационных производных [8], [9], которые мы записываем в виде одного уравнения

$$\frac{\delta y(x)}{\delta x(t)} = f(x, t, y(x)), \quad (1)$$

где $f: P \times D \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ – заданное отображение, $y: P \rightarrow \mathbb{R}^m$ – неизвестное отображение, D – телесное компактное подмножество из $\mathbb{R}^n$, $D = \overline{\text{int } D}$, P – пространство непрерывных отображений $D \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой $\sup$, $\delta y(x)/\delta x(t)$ – вариационная производная отображения y . Роль независимой переменной у таких уравнений играет отображение – элемент бесконечномерного векторного пространства.

Напомним, что *вариационной производной* функционала $y: P \rightarrow \mathbb{R}$ в точке x_0 называется функционал $g: D \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющий равенству

$$\delta y(x_0; h) = \int_D g(t)h(t) dt, \quad h \in P,$$

где $\delta y(x_0; h)$ – вариация функционала y в точке x_0 в направлении $h \in P$, т.е.

$$\delta y(x_0; h) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^{-1}(y(x_0 + \tau h) - y(x_0)), \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Некоторые вопросы общей теории линейных уравнений в вариационных производных изложены в [8] и [9]. Там, а также в [1], имеется и библиография по уравнениям в вариационных производных и их приложениям. Отметим лишь, что уравнения в вариационных производных широко используются в различных разделах теоретической физики.

В статье разрабатывается задача о существовании у уравнения согласованных и равномерно согласованных решений [10] – классическая задача о существовании у уравнений решений, обладающих свойствами возвращаемости, которыми обладает “правая часть” уравнения. В частности, мы на линейные уравнения в вариационных производных распространяем соответствующие результаты В. В. Жикова и Б. А. Шербакова для обыкновенных дифференциальных уравнений из [11, теорема 3, гл. 8] и [10, теоремы 4.3.2–4.3.4].

2. Основные соглашения и вспомогательные утверждения. Известно [9], [8], что уравнение (1) в случае непрерывной функции f равносильно уравнению в полных производных

$$y'h = F(x, y)h, \quad (2)$$

где

$$F(x, y)h = \int_D f(x, t, y(x))h(t) dt, \quad h \in P.$$

В дальнейшем считаем, что правые части f уравнений вида (1) принадлежат пространству $C_c(P \times D \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ непрерывных отображений $P \times D \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, снабженному равномерностью компактной сходимости (компактно-открытой топологией). Считаем, что решения уравнения (1) принадлежат пространству $C_c(P, \mathbb{R}^m)$ непрерывных отображений $P \rightarrow \mathbb{R}^m$, снабженному равномерностью компактной сходимости. Правые части F уравнений вида (2) считаем принадлежащими пространству $C_c(P \times D, L_b(P, \mathbb{R}^m))$ непрерывных отображений $P \times D \rightarrow L_b(P, \mathbb{R}^m)$, снабженному равномерностью компактной сходимости. Здесь $L_b(P, \mathbb{R}^m)$ – пространство непрерывных линейных отображений $P \rightarrow \mathbb{R}^m$, снабженное равномерностью ограниченной сходимости. Естественно, решения уравнения (2) принадлежат $C_c(P, \mathbb{R}^m)$.

В дальнейшем S – подполугруппа аддитивной группы P , $0 \in S$. Каждому отображению f из рассматриваемых нами функциональных пространств и каждому $s \in S$ можно сопоставить с помощью так называемого отображения сдвига σ по аргументу из P некоторое отображение f_s , которое определяется следующим образом. Если $f: P \rightarrow Y$, то $f_s(p) = f(s + p)$, $p \in P$. Если $f: P \times D \rightarrow Y$, то $f_s(p, t) = f(s + p, t)$, $p \in P$, $t \in D$. Через fS обозначаем множество $\{f_s \mid s \in S\}$ и соответственно $(f, \varphi)S = \{(f_s, \varphi_s) \mid s \in S\}$.

Основные результаты мы получим для линейных уравнений в вариационных производных

$$\frac{\delta y(x)}{\delta x(t)} = a(x, t)y(x) + b(x, t), \quad (3)$$

где $a \in C_c(P \times D, L_b(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m))$, $b \in C_c(P \times D, \mathbb{R}^m)$.

Наряду с уравнением (3) для любых $(c, d) \in (a, b)S$ мы рассматриваем также уравнения

$$\frac{\delta y(x)}{\delta x(t)} = c(x, t)y(x), \quad (4)$$

$$\frac{\delta y(x)}{\delta x(t)} = c(x, t)y(x) + d(x, t) \quad (5)$$

(здесь $(a, b)S = \{(a_s, b_s) \mid s \in S\}$).

Нам понадобится понятие согласованности решения уравнения с “правой частью” уравнения. Обычно [10], [3] при определении понятия согласованности используются динамические системы. Наше определение не связано с динамическими системами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\varphi \in C_c(P, \mathbb{R}^m)$ и $(a, b) \in C_c(P \times D, L_b(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^m)$. Говорим, что отображение φ *S-согласовано* с (a, b) , если для произвольного окружения α равномерной структуры пространства $C_c(P, \mathbb{R}^m)$ существует окружение β равномерной структуры пространства $C_c(P \times D, L_b(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^m)$ такое, что из $s \in S$ и $((a, b), (a_s, b_s)) \in \beta$ следует соотношение $(\varphi, \varphi_s) \in \alpha$. Говорим, что отображение φ *равномерно S-согласовано* с (a, b) , если для произвольного окружения α равномерной структуры пространства $C_c(P, \mathbb{R}^m)$ существует окружение β равномерной структуры пространства $C_c(P \times D, L_b(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^m)$ такое, что из $s, t \in S$ и $((a_t, b_t), (a_s, b_s)) \in \beta$ следует соотношение $(\varphi_t, \varphi_s) \in \alpha$.

Понятно, что отображение φ *S-согласовано* с (a, b) тогда и только тогда, когда для произвольных $\varepsilon > 0$ и компакта $A \subset P$ существуют число $\delta > 0$, компакт $M \times Q \subset P \times D$ и ограниченное множество $T \subset \mathbb{R}^m$ такие, что для любого $s \in S$, для которого

$$\|a(m, q)h - a_s(m, q)h\| < \delta \quad \text{и} \quad \|b(m, q) - b_s(m, q)\| < \delta$$

при всех $(m, q, h) \in M \times Q \times T$, выполняется для всех $p \in A$ соотношение

$$\|\varphi(p) - \varphi_s(p)\| < \varepsilon.$$

Отображение φ *равномерно S-согласовано* с (a, b) тогда и только тогда, когда для произвольных $\varepsilon > 0$ и компакта $A \subset P$ существуют число $\delta > 0$, компакт $M \times Q \subset P \times D$ и ограниченное множество $T \subset \mathbb{R}^m$ такие, что для любых $s, t \in S$, для которых

$$\|a_t(m, q)h - a_s(m, q)h\| < \delta \quad \text{и} \quad \|b_t(m, q) - b_s(m, q)\| < \delta$$

при всех $(m, q, h) \in M \times Q \times T$, выполняется для всех $p \in A$ соотношение

$$\|\varphi_t(p) - \varphi_s(p)\| < \varepsilon.$$

Суть понятия *S-согласованности* состоит в том, что если φ *S-согласовано* (равномерно *S-согласовано*) с f и f обладает определенным свойством возвращаемости, то и φ обладает этим свойством возвращаемости. Поясним сказанное более подробно.

Пусть X и Y – некоторые пространства отображений, на которых определено действие полугруппы S с помощью отображения сдвига σ , $\mathcal{U}[X]$ и $\mathcal{U}[Y]$ – равномерные структуры пространств X и Y соответственно, $[S]$ – некоторый класс подмножеств из S , $f \in X$ (либо $f \in Y$).

Отображение f называем *[S]-рекурсивным*, если для произвольного окружения $\alpha \in \mathcal{U}[X]$ существует множество $A \in [S]$, для которого $(f, f_a) \in \alpha$ при всех $a \in A$. Множество fS называем *[S]-рекурсивным*, если для произвольного окружения $\alpha \in \mathcal{U}[X]$ существует множество $A \in [S]$, для которого $(f_s, f_{s+a}) \in \alpha$ при всех $s \in S$ и $a \in A$.

И пусть $\varphi \in X$, $f \in Y$. Тогда

- 1) если φ *S-согласовано* с f и отображение f *[S]-рекурсивно*, то отображение φ *[S]-рекурсивно*;
- 2) если φ *равномерно S-согласовано* с f и множество fS *[S]-рекурсивно*, то множество φS *[S]-рекурсивно*.

Последние определения и утверждение хорошо согласуются с известными понятиями и фактами для динамических систем [12].

В качестве конкретизаций $[S]$ -рекурсивности могут выступать различные типы устойчивости по Пуассону отображений, в частности, SQ -устойчивость по Пуассону, S -устойчивость по Пуассону, SQ -рекуррентность в смысле Биркгофа, SQ -почти периодичность в смысле Бора (здесь Q – подмножество из S) (подробнее см. [12], [13]).

Таким образом, если установлено, что некоторое решение φ уравнения S -согласовано (равномерно S -согласовано) с “правой частью” f этого уравнения и отображение f SQ -устойчиво по Пуассону, либо S -устойчиво по Пуассону, либо SQ -рекуррентно в смысле Биркгофа (SQ -почти периодически в смысле Бора), то и решение φ соответственно SQ -устойчиво по Пуассону, либо S -устойчиво по Пуассону, либо SQ -рекуррентно в смысле Биркгофа (соответственно SQ -почти периодически в смысле Бора).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция $\varphi \in C_c(P, \mathbb{R}^m)$ называется *ограниченной*, если ограничено множество $\varphi(P)$. Функция $\varphi \in C_c(P, \mathbb{R}^m)$ (соответственно $a \in C_c(P \times D, L_b(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m))$, $(a, b) \in C_c(P \times D, L_b(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^m)$) называется *S -устойчивой по Лагранжу*, если компактно множество $\overline{\varphi S}$ (соответственно $\overline{aS}$, $\overline{(a, b)S}$).

Имеет место следующая

ЛЕММА 1. Если отображение φ равномерно S -согласовано с S -устойчивым по Лагранжу отображением (a, b) , то оно S -устойчиво по Лагранжу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть α – произвольное окружение равномерной структуры пространства $C_c(P, \mathbb{R}^m)$ и β – соответствующее ему в силу равномерной S -согласованности φ с (a, b) окружение равномерной структуры пространства $C_c(P \times D, L_b(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^m)$. И пусть $\{\varphi_{s_n}\}$ – произвольная направленность в φS . Так как множество $\overline{(a, b)S}$ компактно, то из направленности $\{(a_{s_n}, b_{s_n})\}$ можно выделить сходящуюся поднаправленность $\{(a_{s_{n_k}}, b_{s_{n_k}})\}$. Тогда для окружения β найдется k_0 такое, что для произвольных $k > k_0$ и $m > k_0$ выполняется соотношение

$$((a_{s_{n_k}}, b_{s_{n_k}}), (a_{s_{n_m}}, b_{s_{n_m}})) \in \beta.$$

В таком случае $(\varphi_{s_{n_k}}, \varphi_{s_{n_m}}) \in \alpha$ для произвольных $k > k_0$ и $m > k_0$. Это означает, что направленность $\{\varphi_{s_{n_k}}\}$ является направленностью Коши. Итак, из произвольной направленности в φS можно выделить поднаправленность Коши. Поэтому множество φS , а следовательно, и $\overline{\varphi S}$ вполне ограничено. Но тогда компактность $\overline{\varphi S}$ следует из его полноты.

3. Результаты. Важную роль в наших доказательствах будет играть следующая лемма замкнутости, которая вытекает из леммы 2 из [7] и сделанного выше замечания о эквивалентности уравнения типа (1) уравнению в полных производных типа (2).

ЛЕММА 2. Пусть I – направленное множество, $K \subset \mathbb{R}^m$ – компактное множество и для всех $i \in I$ отображение $\varphi_i: P \rightarrow K$ – решение уравнения

$$\frac{\delta y(x)}{\delta x(t)} = f_i(x, t, y(x)). \quad (6)$$

Если $\lim_i f_i = f$ в $C_c(P \times D \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, то

- 1) семейство $\{\varphi_i \mid i \in I\}$ компактно;

- 2) предел φ произвольной поднаправленности направленности $\{\varphi_i\}$ является решением уравнения

$$\frac{\delta y(x)}{\delta x(t)} = f(x, t, y(x)). \quad (7)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть для уравнения (3), имеющего ограниченное решение φ , выполнены условия

- 1) отображение a S -устойчиво по Лагранжу;
- 2) для всех $c \in \overline{aS}$ уравнение (4) не имеет ненулевых ограниченных решений.

Тогда для всех $(c, d) \in (\overline{aS})$ уравнение (5) имеет единственное ограниченное решение. Это решение равномерно S -согласовано с (c, d) и является S -устойчивым по Лагранжу, если отображение (a, b) S -устойчиво по Лагранжу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия теоремы следует, что φ – единственное ограниченное решение уравнения (3). Обозначим

$$k_0 = \sup_{\psi \in \overline{\varphi S}} \|\psi\|.$$

Предположим, что φ не равномерно S -согласовано с (a, b) . Тогда существуют число $\varepsilon > 0$ и компакт $A \subset P$ такие, что для произвольных натурального числа $n \in \mathbb{N}$, компакта $M \times Q \subset P \times D$ и ограниченного множества $T \subset \mathbb{R}^m$ существуют элементы $s_n, t_n \in S$ такие, что для всех $(m, q, h) \in M \times Q \times T$

$$\|a_{t_n}(m, q)h - a_{s_n}(m, q)h\| < \frac{1}{n}, \quad \|b_{t_n}(m, q) - b_{s_n}(m, q)\| < \frac{1}{n} \quad (8)$$

и для некоторого $p \in A$

$$\|\varphi_{t_n}(p) - \varphi_{s_n}(p)\| \geq \varepsilon. \quad (9)$$

Рассмотрим для произвольного $n \in \mathbb{N}$ отображение $b_n: P \times D \rightarrow \mathbb{R}^m$, определяемое правилом

$$b_n(x, t) = (a_{t_n}(x, t) - a_{s_n}(x, t))\varphi_{s_n}(x) + b_{t_n}(x, t) - b_{s_n}(x, t),$$

и докажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ в $C_c(P \times D, \mathbb{R}^m)$ равен 0, т.е. нулевому отображению.

Пусть $\delta > 0$ – произвольное число, $T = \{x \mid x \in \mathbb{R}^m \wedge \|x\| \leq 1\}$ и натуральное число n_0 таково, что $(k_0 + 1)/n_0 < \delta$. Тогда для всех $(m, q) \in M \times Q$ и произвольного $n > n_0$ с учетом соотношений (8) получим

$$\begin{aligned} \|b_n(m, q)\| &= \|(a_{t_n}(m, q) - a_{s_n}(m, q))\varphi_{s_n}(x) + b_{t_n}(m, q) - b_{s_n}(m, q)\| \\ &\leq \|a_{t_n}(m, q) - a_{s_n}(m, q)\| \|\varphi_{s_n}(x)\| + \|b_{t_n}(m, q) - b_{s_n}(m, q)\| \\ &< \sup_{h \in T} \|(a_{t_n}(m, q) - a_{s_n}(m, q))h\| \cdot k_0 + \frac{1}{n} \leq \frac{k_0}{n} + \frac{1}{n} < \delta, \end{aligned}$$

т.е. $\|b_n(m, q)\| < \delta$. Доказанное и означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Поскольку отображение a S -устойчиво по Лагранжу, то, не нарушая общности рассуждений, можем считать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{t_n} = c \in \overline{aS}.$$

Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{t_n}, b_n) = (c, 0). \quad (10)$$

Рассмотрим для всех $n \in \mathbb{N}$ уравнение

$$\frac{\delta y(x)}{\delta x(t)} = a_{t_n}(x, t)y(x) + b_n(x, t) \quad (11)$$

и докажем, что отображение $\varphi_n = \varphi_{t_n} - \varphi_{s_n}$ является его решением.

Заметим, что

1) уравнение (3) равносильно уравнению в полных производных

$$y'h = A(x)hy + B(x)h;$$

2) уравнение

$$\frac{\delta y(x)}{\delta x(t)} = a_{t_n}(x, t)y(x) + b_{t_n}(x, t)$$

равносильно уравнению в полных производных

$$y'h = A_{t_n}(x)hy + B_{t_n}(x)h; \quad (12)$$

3) уравнение

$$\frac{\delta y(x)}{\delta x(t)} = a_{s_n}(x, t)y(x) + b_{s_n}(x, t)$$

равносильно уравнению в полных производных

$$y'h = A_{s_n}(x)hy + B_{s_n}(x)h; \quad (13)$$

4) уравнение (11) равносильно уравнению в полных производных

$$y'h = A_{t_n}(x)hy + (A_{t_n}(x) - A_{s_n}(x))h\varphi_{s_n}(x) + (B_{t_n}(x) - B_{s_n}(x))h, \quad (14)$$

где для всех $h \in P$

$$\begin{aligned} A(x)h &= \int_D a(x, t)h(t) dt, & B(x)h &= \int_D b(x, t)h(t) dt, \\ A_{t_n}(x)h &= \int_D a_{t_n}(x, t)h(t) dt, & B_{t_n}(x)h &= \int_D b_{t_n}(x, t)h(t) dt, \\ A_{s_n}(x)h &= \int_D a_{s_n}(x, t)h(t) dt, & B_{s_n}(x)h &= \int_D b_{s_n}(x, t)h(t) dt. \end{aligned}$$

Если мы докажем, что φ_n – решение уравнения (14), то тем самым будет доказано, что φ_n является решением уравнения (11).

Учитывая, что φ_{t_n} и φ_{s_n} – решения уравнений (12) и (13) соответственно, получим

$$\begin{aligned}\varphi'_n(x)h &= (\varphi_{t_n}(x) - \varphi_{s_n}(x))'h = \varphi'_{t_n}(x)h - \varphi'_{s_n}(x)h \\ &= A_{t_n}(x)h\varphi_{t_n}(x) + B_{t_n}(x)h - A_{s_n}(x)h\varphi_{s_n}(x) - B_{s_n}(x)h \\ &= A_{t_n}(x)h\varphi_{t_n}(x) - A_{t_n}(x)h\varphi_{s_n}(x) + A_{t_n}(x)h\varphi_{s_n}(x) \\ &\quad - A_{s_n}(x)h\varphi_{s_n}(x) + (B_{t_n}(x) - B_{s_n}(x))h \\ &= A_{t_n}(x)h(\varphi_{t_n}(x) - \varphi_{s_n}(x)) + (A_{t_n}(x) - A_{s_n}(x))h\varphi_{s_n}(x) \\ &\quad + (B_{t_n}(x) - B_{s_n}(x))h;\end{aligned}$$

значит, φ_n – решение уравнения (14) и, следовательно, уравнения (11).

В силу соотношения (10) и леммы 2 из последовательности $\{\varphi_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\varphi_{n_i}\}$, сходящуюся к некоторому ограниченному решению ψ уравнения (4). Так как уравнение (4) имеет только нулевое ограниченное решение, то $\psi = 0$; следовательно,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \varphi_{n_i} = 0.$$

В таком случае для ε и компакта A найдется $i_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для произвольных $i > i_0$ и $p \in A$ выполняется соотношение

$$\|\varphi_{n_i}(p)\| = \|\varphi_{t_{n_i}}(p) - \varphi_{s_{n_i}}(p)\| < \varepsilon,$$

противоречащее соотношению (9). Полученное противоречие говорит о том, что φ равномерно S -согласовано с (a, b) .

Если отображение (a, b) S -устойчиво по Лагранжу, то по лемме 1 решение φ S -устойчиво по Лагранжу.

Пусть $(c, d) \in \overline{(a, b)S}$. Тогда в силу леммы 2 уравнение (5) имеет в множестве $\overline{\varphi S}$ ограниченное решение. Кроме этого отображение c S -устойчиво по Лагранжу. Значит, для уравнения (5) выполнены те же условия, что и для уравнения (3). Поэтому из доказанного выше и следует заключение нашей теоремы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Функция $\varphi \in C_c(P, \mathbb{R}^m)$ называется S -отделенной от нуля, если

$$\inf_{s \in S} \|\varphi(s)\| > 0.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть для уравнения (3), имеющего ограниченное решение φ , выполнены условия

- 1) отображение a S -устойчиво по Лагранжу и для всех $c \in \overline{aS}$ выполнено $\overline{cS} = \overline{aS}$;
- 2) при $c = a$ уравнение (4) не имеет ненулевых ограниченных решений;
- 3) для всех $c \in \overline{aS}$ каждое ненулевое ограниченное решение уравнения (4) S -отделено от нуля.

Тогда для всех $(c, d) \in \overline{(a, b)S}$ уравнение (5) имеет единственное ограниченное решение. Это решение равномерно S -согласовано с (c, d) и является S -устойчивым по Лагранжу, если отображение (a, b) S -устойчиво по Лагранжу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi \neq 0$ – ограниченное решение уравнения (4) при $c \in \overline{aS}$. Тогда в силу равенства $\overline{cS} = \overline{aS}$ выполнено

$$a = \lim_n c_{s_n}$$

для некоторой направленности $\{s_n\}$ в S . Согласно лемме 2 из направленности $\{\psi_{s_n}\}$ можно выделить поднаправленность $\{\psi_{s_{n_i}}\}$, сходящуюся к некоторому решению η уравнения (4) при $c = a$, содержащемуся в $\overline{\psi S}$. Согласно условию теоремы $\eta = 0$. Тогда $0 \in \overline{\psi S}$, что противоречит S -отделенности от нуля решения ψ . Значит, $\psi = 0$ и мы находимся в условиях теоремы 1.

ЛЕММА 3. Пусть φ – ограниченное решение уравнения (3). Тогда уравнение (3) имеет ограниченное решение φ_0 такое, что $\overline{\varphi_0(P)} \subset \text{co } \overline{\varphi(P)}$, и для произвольных решений ψ_1 и $\psi_2 \in \overline{\varphi_0 S}$ уравнения (3) выполняется соотношение

$$\inf_{s \in S} \|\psi_1(s) - \psi_2(s)\| = 0. \quad (15)$$

Если же для всех $(c, d) \in \overline{(a, b)S}$ выполнено равенство $\overline{(c, d)S} = \overline{(a, b)S}$, то соотношение (15) выполняется для произвольных решений ψ_1 и $\psi_2 \in \overline{\varphi_0 S}$ уравнения (5) при всех $(c, d) \in \overline{(a, b)S}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $K = \text{co } \overline{\varphi(P)}$ – выпуклая оболочка множества $\overline{\varphi(P)}$. Тогда K – компакт из $\mathbb{R}^m$. Через X обозначим множество решений ψ уравнения (3) таких, что $\overline{\psi(P)} \subset K$. Из леммы 2 следует, что множество X компактно. Пусть

$$r = \inf_{\psi \in X} \sup_{s \in S} \|\psi(s)\|.$$

Тогда

$$r = \lim_{i \rightarrow \infty} \sup_{s \in S} \|\varphi_i(s)\|$$

для некоторой последовательности $\{\varphi_i\} \subset X$. Считаем,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \varphi_i = \varphi_0 \in X.$$

Непосредственно доказываем, что

$$r = \sup_{s \in S} \|\varphi_0(s)\|.$$

Если $r = 0$, то, очевидно, лемма доказана. Пусть $r \neq 0$ и ψ_1 и $\psi_2 \in \overline{\varphi_0 S}$ – решения уравнения (3). Тогда $\eta = (\psi_1 + \psi_2)/2$ – решение уравнения (3). Поскольку $\overline{\varphi_0(P)} \subset K$ и $\psi_1 = \lim_{i \rightarrow \infty} \varphi_{0s_i}$ для некоторой направленности $\{s_i\} \subset S$, то для всех $t \in P$

$$\psi_1(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} \varphi_0(s_i + t) \in \overline{\varphi_0(P)} \subset K.$$

Поэтому $\psi_1(t) \in K$ для всех $t \in P$. Аналогично, $\psi_2(t) \in K$ для всех $t \in P$. В таком случае $\eta(t) = (\psi_1(t) + \psi_2(t))/2 \in K$ и, следовательно, $\eta \in X$. Поэтому

$$\sup_{s \in S} \|\eta(s)\| \geq r.$$

Поскольку для всех $s \in S$

$$\|\psi_1(s)\| = \left\| \lim_{i \rightarrow \infty} \varphi_{0s_i}(s) \right\| \leq \sup_{\tau \in S} \|\varphi_0(\tau)\| = r,$$

то $\|\psi_1(s)\| \leq r$ для всех $s \in S$. Аналогично, $\|\psi_2(s)\| \leq r$ для всех $s \in S$. Поскольку

$$\sup_{s \in S} \|\eta(s)\| \geq r,$$

то для любого $i \in \mathbb{N}$ существует $t_i \in S$ такое, что $\|\eta(t_i)\| > r - 1/i$. Поэтому

$$2r - \frac{2}{i} < 2\|\eta(t_i)\| = \|\psi_1(t_i) + \psi_2(t_i)\| \leq \|\psi_1(t_i)\| + \|\psi_2(t_i)\| \leq 2r < 2r + \frac{2}{i};$$

следовательно, для всех $i \in \mathbb{N}$

$$2r - \frac{2}{i} < \|\psi_1(t_i) + \psi_2(t_i)\| < 2r + \frac{2}{i}$$

и поэтому

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\psi_1(t_i) + \psi_2(t_i)\| = 2r.$$

А так как $\|\psi_1(t_i)\| \leq r$ и $\|\psi_2(t_i)\| \leq r$, на основании теоремы о диагоналях параллелограмма выполняется соотношение

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\psi_1(t_i) - \psi_2(t_i)\| = 0.$$

Следовательно, верно (15) и первое утверждение леммы доказано.

Пусть для всех $(c, d) \in \overline{(a, b)S}$ выполнено $\overline{(c, d)S} = \overline{(a, b)S}$, и пусть $(c, d) \in \overline{(a, b)S}$. Тогда $(c, d) = \lim_n (a_{s_n}, b_{s_n})$ для некоторой направленности $\{s_n\}$ в S . Понятно, что φ_{0s_n} – решение уравнения

$$\frac{\delta y(x)}{\delta x(t)} = a_{s_n}(x, t)y(x) + b_{s_n}(x, t).$$

Согласно лемме 2 из направленности $\{\varphi_{0s_n}\}$ можно выделить сходящуюся поднаправленность $\{\varphi_{0s_{n_i}}\}$. Если $\psi = \lim_i \varphi_{0s_{n_i}}$, то ψ – решение уравнения (5), содержащееся в множестве $\overline{\varphi_0 S}$. Предположим, что ψ_1 и $\psi_2 \in \overline{\varphi_0 S}$ – решения уравнения (5). Тогда $\eta = (\psi_1 + \psi_2)/2$ – решение уравнения (5) и для всех $t \in P$ выполнено $\eta(t) \in K$. Поскольку $(a, b) \in \overline{(c, d)S}$, из леммы 2 следует, что существует решение δ уравнения (3), причем $\delta \in \eta S$. Так как $\eta(t) \in K$ для всех $t \in P$, то из $\delta \in \eta S$ следует, что $\delta(t) \in K$ для всех $t \in P$. Мы доказали, что $\delta \in X$, поэтому

$$\sup_{s \in S} \|\delta(s)\| \geq r$$

и, следовательно, для всех $i \in \mathbb{N}$ существует $t_i \in S$ такое, что $\|\delta(t_i)\| > r - 1/i$. Пусть

$$\delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \eta_{\tau_k}$$

для $\{\tau_k\} \subset S$. Поскольку, очевидно, $\|\psi_1(s)\| \leq r$ и $\|\psi_2(s)\| \leq r$ для любого $s \in S$, то для всех $i \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} r - \frac{1}{i} < \|\delta(t_i)\| &= \left\| \lim_k \eta_{\tau_k}(t_i) \right\| = \lim_k \|\eta(\tau_k + t_i)\| = \frac{1}{2} \lim_k \|\psi_1(\tau_k + t_i) + \psi_2(\tau_k + t_i)\| \\ &\leq \frac{1}{2} \lim_k \|\psi_1(\tau_k + t_i)\| + \frac{1}{2} \lim_k \|\psi_2(\tau_k + t_i)\| \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_{t \in S} \|\psi_1(t)\| + \frac{1}{2} \sup_{t \in S} \|\psi_2(t)\| \leq r < r + \frac{1}{i}; \end{aligned}$$

следовательно,

$$2r - \frac{2}{i} < \lim_k \|\psi_1(\tau_k + t_i) + \psi_2(\tau_k + t_i)\| < 2r + \frac{2}{i}$$

и поэтому

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \lim_k \|\psi_1(\tau_k + t_i) + \psi_2(\tau_k + t_i)\| = 2r.$$

Тогда

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\psi_1(\tau_{k_i} + t_i) + \psi_2(\tau_{k_i} + t_i)\| = 2r$$

для некоторой подпоследовательности $\{\tau_{k_i}\}$ направленности $\{\tau_k\}$. А так как

$$\|\psi_1(\tau_{k_i} + t_i)\| \leq r \quad \text{и} \quad \|\psi_2(\tau_{k_i} + t_i)\| \leq r,$$

то, как и ранее, получим

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\psi_1(\tau_{k_i} + t_i) - \psi_2(\tau_{k_i} + t_i)\| = 0;$$

следовательно,

$$\inf_{s \in S} \|\psi_1(s) - \psi_2(s)\| = 0$$

и лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть φ – ограниченное решение уравнения (3). Тогда

- 1) если каждое ненулевое ограниченное решение уравнения (4) при $s = a$ S -отделено от нуля, то уравнение (3) имеет ограниченное S -согласованное с (a, b) решение φ_0 , причем $\overline{\varphi_0(P)} \subset \text{co } \varphi(P)$;
- 2) если отображение $(a, b) \xrightarrow{S\text{-устойчиво по Лагранжу}} (c, d)$ и для всех $s \in \overline{aS}$ каждое ненулевое ограниченное решение уравнения (4) S -отделено от нуля, то для всех $(c, d) \in \overline{(a, b)S}$ уравнение (5) имеет в множестве $\varphi_0 \overline{S}$ единственное ограниченное S -устойчивое по Лагранжу равномерно S -согласованное с (c, d) решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть φ_0 – ограниченное решение уравнения (3) из леммы 3.

Докажем первое утверждение теоремы. Прежде всего докажем, что в множестве $\overline{\varphi_0 S}$ нет решений уравнения (3), отличных от φ_0 . Предположим, что $\psi \in \overline{\varphi_0 S}$ – решение уравнения (3) и $\psi \neq \varphi_0$. Тогда $\psi - \varphi_0$ – ненулевое ограниченное решение уравнения (4) при $c = a$ и, следовательно, согласно условию теоремы

$$\inf_{s \in S} \|\psi(s) - \varphi_0(s)\| > 0.$$

Это соотношение противоречит соотношению (15). Значит, $\psi = \varphi_0$.

Предположим, что φ_0 не S -согласовано с (a, b) . Тогда существует окружение α равномерной структуры пространства $C_c(P, \mathbb{R}^m)$ такое, что для произвольного окружения β равномерной структуры пространства $C_c(P \times D, L_b(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^m)$ существует элемент $s_\beta \in S$ такой, что

$$((a, b), (a_{s_\beta}, b_{s_\beta})) \in \beta, \quad (16)$$

$$(\varphi_0, \varphi_{0s_\beta}) \notin \alpha. \quad (17)$$

Из соотношения (16) следует, что

$$\lim_{\beta} (a_{s_\beta}, b_{s_\beta}) = (a, b).$$

В силу леммы замкнутости 2 из направленности φ_{0s_β} можно выделить поднаправленность φ_{0s_γ} , сходящуюся к некоторому ограниченному решению ψ уравнения (3), содержащемуся в множестве $\overline{\varphi_0 S}$. Согласно доказанному выше $\psi = \varphi_0$, поэтому

$$\lim_{\gamma} \varphi_{0s_\gamma} = \varphi_0.$$

Полученное соотношение противоречит (17). Противоречие говорит о том, что φ_0 S -согласовано с (a, b) .

Докажем второе утверждение теоремы. Прежде всего заметим, что в силу леммы 3 и условий теоремы для каждой пары (c, d) в множестве $\overline{\varphi_0 S}$ содержится ровно по одному решению уравнения (5). Кроме этого, для всех $(c, d) \in \overline{(a, b)S}$ уравнение (5) удовлетворяет тем же условиям, что и уравнение (3). Поэтому для доказательства второго утверждения теоремы достаточно доказать, что φ_0 равномерно S -согласовано с (a, b) и S -устойчиво по Лагранжу. Предположим, что φ_0 не равномерно S -согласовано с (a, b) . Тогда существует окружение α равномерной структуры пространства $C_c(P, \mathbb{R}^m)$ такое, что для произвольного окружения β равномерной структуры пространства $C_c(P \times D, L_b(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^m)$ существуют элементы $s_\beta, t_\beta \in S$ такие, что

$$((a_{t_\beta}, b_{t_\beta}), (a_{s_\beta}, b_{s_\beta})) \in \beta, \quad (18)$$

$$(\varphi_{0t_\beta}, \varphi_{0s_\beta}) \notin \alpha. \quad (19)$$

В силу компактности множества $\overline{(a, b)S}$ можем считать, что направленности $\{(a_{t_\beta}, b_{t_\beta})\}$ и $\{(a_{s_\beta}, b_{s_\beta})\}$ являются сходящимися. Пусть

$$\lim_{\beta} (a_{t_\beta}, b_{t_\beta}) = (a_1, b_1) \quad \text{и} \quad \lim_{\beta} (a_{s_\beta}, b_{s_\beta}) = (a_2, b_2).$$

В таком случае из соотношения (18) получаем, что $(a_1, b_1) = (a_2, b_2) = (c, d)$. В силу леммы замкнутости 2 можем считать, что

$$\lim_{\beta} \varphi_{0t_{\beta}} = \psi_1 \quad \text{и} \quad \lim_{\beta} \varphi_{0s_{\beta}} = \psi_2,$$

при этом ψ_1 и ψ_2 – решения уравнения (5). Но тогда $\psi_1 = \psi_2$, что противоречит (19). Значит, φ_0 равномерно S -согласовано с (a, b) . Решение φ_0 S -устойчиво по Лагранжу в силу леммы 3.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гайшун И. В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. Минск: Наука и техника, 1983.
- [2] Щербаков Б. А. Многомерные динамические системы // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 5. С. 739–747.
- [3] Герко А. И. Согласованные решения линейных многомерных дифференциальных уравнений // Изв. АН Респ. Молдова. Сер. матем. 1994. № 1. С. 42–47.
- [4] Герко А. И. Согласованные решения квазилинейных многомерных дифференциальных уравнений // Изв. АН Респ. Молдова. Сер. матем. 1995. № 1. С. 3–11.
- [5] Хынку В. И. Приводимость линейных вполне интегрируемых систем с квазипериодическими коэффициентами // Изв. АН Респ. Молдова. Сер. матем. 1996. № 1. С. 24–30.
- [6] Glavan V. A., Hâncu V. I. Partial recurrent solutions of completely integrable systems // Изв. АН Респ. Молдова. Сер. матем. 1998. № 1. С. 103–112.
- [7] Герко А. И. Асимптотически рекуррентные решения уравнений в β -производных // Матем. заметки. 2000. Т. 67. № 6. С. 837–851.
- [8] Задорожний В. Г. Вполне интегрируемые уравнения в вариационных производных // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 11. С. 2027–2039.
- [9] Гайшун И. В. Линейные уравнения в полных производных. Минск: Наука и техника, 1989.
- [10] Щербаков Б. А. Устойчивость по Пуассону движений динамических систем и решений дифференциальных уравнений. Кишинев: Штиинца, 1985.
- [11] Левитан Б. М., Жиков В. В. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1978.
- [12] Бронштейн И. У. Расширения минимальных групп преобразований. Кишинев: Штиинца, 1975.
- [13] Gerko A. I. Poisson stability of mappings with respect to a semigroup // Изв. АН Респ. Молдова. Сер. матем. 1998. № 1. С. 95–102.

Государственный университет Молдовы, Кишинев
E-mail: gerko@usm.md

Поступило
02.04.2002