Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Г. Гимадисламов, О спектре дифференциального оператора высокого порядка, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 2, 188–193

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2484>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 13:07:53

УДК 517.984.5

О СПЕКТРЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

М. Г. Гимадисламов

В статье для оператора высокого порядка получены достаточные условия дискретности и неограниченности снизу спектра этого оператора.

Библиография: 3 названия.

1. Рассматривается оператор L , заданный формулами

$$\begin{aligned} Ly &= (-1)^r y^{2r} + qy, & 0 \leq x < \infty, \\ y^{(k)}(0) &= 0, & k = 0, 1, \dots, r-1. \end{aligned} \quad (1)$$

(Точнее, L – это некоторое самосопряженное расширение оператора, заданное этими формулами на классе функций, обращающихся в нуль для достаточно больших x .) Здесь функция $q(x)$, $x \in [0, \infty)$, предполагается вещественной и кусочно-непрерывной. Во многих работах выяснялись условия дискретности спектра оператора L . Обычно рассматривают случай $r = 1$ и изучают оператор L в одном из следующих случаев: либо функция $q(x)$ ограничена снизу, либо быстро стремится к $-\infty$ (см. [1, с. 140], [2, с. 124]).

В работе Исмагилова [3] для случая $r = 1$ был указан класс функций $q(x)$, не ограниченных ни сверху, ни снизу, для которых спектр оператора L дискретен и не ограничен снизу. Доказательство, приведенное в [3], существенно использует специфику случая $r = 1$; ниже мы объясним, что препятствует непосредственно обобщить это доказательство на случай $r > 1$. Тем не менее, как будет показано, можно изменить рассуждения из [3] таким образом, что для $r > 1$ получится результат, вполне аналогичный результатам для случая $r = 1$. Опишем теперь основной результат.

Возьмем на $[0, \infty)$ точки $\{a_k\}$, $k \geq 1$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} a_1 &< a_2 < \dots < a_k < \dots, & a_k &\rightarrow +\infty, \\ a_k - a_{k-1} &\rightarrow 0 & \text{при } k &\rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Возьмем далее интервал $\Delta_k = (a_k - h_k, a_k + h_k)$, где числа h_k положительны и столь малы, что эти интервалы попарно не пересекаются.

Рассмотрим кусочно-непрерывные вещественные функции $q(x)$, $x \geq 0$, со следующими свойствами:

- 1) $q(x) \leq 0$ при $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k$, $q(x) \geq 0$ при $x \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k$;
- 2) $h_k^{2r-1} \int_{\Delta_k} |q(x)| dx \rightarrow +\infty$;
- 3) $\int_{\Delta_k} |x - a_k| |q(x)| dx < \frac{1}{3}$.

ТЕОРЕМА. Если функция $q(x)$, $x \in [0, \infty)$, удовлетворяет условиям 1)–3), то спектр оператора L дискретен и неограничен снизу.

Подчеркнем, что жесткие условия на функцию $q(x)$ накладываются только на интервалах Δ_k ; вне этих интервалов $q(x)$ предполагается лишь неотрицательной (нет никаких дополнительных ограничений). Условия 2), 3) означают, грубо говоря, что функция $q(x)$, $x \in \Delta_k$, сосредоточена в основном около точки a_k . Доказательство будет изложено в пп. 2 и 3.

2. Выясним свойства величин $\lambda_n^L(a, b)$.

Для любого отрезка $\Delta = [a, b] \subset [0, \infty)$ рассмотрим оператор L в пространстве $L_2(a, b)$ с граничными условиями Дирихле

$$y^{(k)}(a) = y^{(k)}(b) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, r-1.$$

Через $\lambda_n^L(\Delta) = \lambda_n^L(a, b)$ обозначим n -е собственное значение этого оператора, $n = 1, 2, \dots$. Величину $\lambda_1^L(\Delta) = \lambda_1^L(a, b)$ обозначим через $\lambda^L(\Delta) = \lambda^L(a, b)$. Из вариационного принципа Куранта вытекают следующие утверждения:

A) если для некоторого n -мерного подпространства $V_n \subset C_0^\infty(a, b)$ выполнено неравенство

$$(Ly, y) \leq C(y, y), \quad y \in V_n,$$

то $\lambda_n^L(a, b) < C$;

B) $\lambda^L(a, b) = \inf\{(Ly, y)/(y, y)\}$, $y \in C_0^\infty(a, b)$, $y \neq 0$.

Зафиксируем на $[0, \infty)$ точки $a_0 < a_1 < \dots < a_n$.

В следующей лемме содержатся неравенства, связывающие величины $\lambda_n^L(a_{k-1}, a_k)$.

ЛЕММА 1. 1) Если $\lambda^L(a_{k-1}, a_k) \leq C$ для любого $k = 1, \dots, n$, то

$$\lambda_n^L(a_0, a_n) \leq C.$$

2) Если $\lambda^L(a_{k-1}, a_k) \geq d$ для любого $k = 1, \dots, n$, то

$$\lambda_m^L(a_0, a_n) > d,$$

где $m = (n-1)r + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $\lambda^L(a_{k-1}, a_k) \leq C$ для любого $k = 1, \dots, n$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $u_k \in C_0^\infty(a_{k-1}, a_k)$, что $\|u_k\| = 1$, $(Lu_k, u_k) \leq C + \varepsilon$, $k = 1, \dots, n$ (это следует из свойства B), приведенного выше).

Пусть V_n – линейная оболочка системы $\{u_k, 1 \leq k \leq n\}$. Тогда ясно, что

$$(Lu, u) \leq (C + \varepsilon)(u, u) \quad \text{при } u \in V_n.$$

Используя указанное выше свойство A), видим, что $\lambda_n^L(a_0, a_n) \leq C + \varepsilon$. Так как ε произвольно, то $\lambda_n^L(a_0, a_n) \leq C$.

2) Пусть $\lambda^L(a_{k-1}, a_k) \geq d$ для любого $k = 1, \dots, n$. Докажем, что

$$\lambda_m^L(a_0, a_m) \geq d, \quad \text{где } d = (n-1)r + 1.$$

Допустим, что $\lambda_m^L(a_0, a_m) < d$. Обозначим через W_m линейную оболочку системы первых m собственных функций оператора L на отрезке $[a_0, a_n]$ (с граничными условиями Дирихле). Так как $\dim W_m = m = (n-1)r + 1$, существует такая функция $f \in W_m$, что $\|f\| = 1$, $f^{(i)}(a_k) = 0$ (здесь мы использовали тот факт, что количество ограничений, наложенных на функцию f , меньше размерности пространства W_m , откуда вытекает существование ненулевой функции f , удовлетворяющей этим ограничениям).

Итак, на каждом отрезке $[a_{k-1}, a_k]$ функция f удовлетворяет граничным условиям Дирихле. Поэтому, обозначив через f_k ограничение этой функции на отрезке $[a_{k-1}, a_k]$, получаем

$$(Lf_k, f_k) \geq d(f_k, f_k).$$

Сложив эти неравенства, имеем

$$(Lf, f) \geq d(f, f).$$

С другой стороны,

$$(Lf, f) \leq \lambda_m^L(f, f) \quad \text{при } f \in W_m,$$

ибо W_m — это линейная оболочка первых m собственных функций оператора L на $[a_0, a_n]$. Отсюда $\lambda_m \geq d$. Лемма 1 доказана.

Заметим, что если $r = 1$, то величина $m = (n-1)r + 1$, указанная в лемме, совпадает с n . Если же $r > 1$, то $m > n$; это обстоятельство не позволяет применить лемму 1 (точнее ее второе утверждение) к доказательству теоремы. Чтобы преодолеть эту трудность, мы используем вместо второго утверждения леммы 1 следующую ниже лемму, в которой используется оператор $L_0 y = -y'' + qy$.

В этой лемме возникает также величина

$$C_r = r^{-1/(1-r)} - r^{-r/(1-r)}.$$

ЛЕММА 2. Пусть $\lambda^{L_0}(a_{k-1}, a_k) \geq d$ при $k = 1, \dots, n$. Тогда

$$\lambda_n^L(a_0, a_n) \geq d - C_r.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя лемму 1 при $r = 1$, видим, что $\lambda^{L_0}(a_0, a_n) \geq d$. Чтобы получить аналогичную оценку для $\lambda^L(a_0, a_n)$, докажем неравенство

$$(Ly, y) \geq (L_0 y, y) - C_r(y, y), \quad y \in C_0^\infty(0, \infty). \quad (2)$$

Оно сводится к неравенству

$$\|y^{(r)}\|^2 \geq \|y'\|^2 - C_r \|y\|^2. \quad (3)$$

Для доказательства последнего неравенства переходим к преобразованию Фурье:

$$\|y^{(r)}\|^2 - \|y'\|^2 = \|x^r \hat{y}\|^2 - \|x \hat{y}\|^2 = \int_0^\infty (x^{2r} - x^2) |\hat{y}|^2 dx.$$

Здесь $\hat{y}$ – преобразование Фурье функции $y(x)$. Найдя минимум функции $x^{2r} - x^2$, получаем, что $x^{2r} - x^2 \geq -C_r$. Отсюда

$$\|y^{(r)}\|^2 - \|y'\|^2 \geq -C_r \|y\|^2.$$

Этим доказано неравенство (3) и тем самым также неравенство (2). Теперь, используя вариационный принцип Куранта, видим, что

$$\lambda_n^L(a_0, a_n) \geq \lambda_n^{L_0}(a_0, a_n) - C_r \geq d - C_r.$$

Лемма 2 доказана.

Следующая лемма дает признак дискретности и неограниченности снизу спектра оператора L , выраженный посредством величин $\lambda^L(\Delta)$, $\lambda^{L_0}(\Delta)$, где Δ – отрезок из $[0, \infty)$. В этой лемме мы фиксируем две последовательности $\{a_k\}$, $\{b_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, такие, что $a_1 < a_2 < \dots$; $b_1 < b_2 < \dots$; $a_k \rightarrow +\infty$, $b_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$ и $b_k < a_k < b_{k+1}$ для всех k (последнее условие означает, что эти последовательности перемежаются).

ЛЕММА 3. Пусть $\lambda^{L_0}(a_k, a_{k+1}) \rightarrow +\infty$ и $\lambda^L(b_k, b_{k+1}) \rightarrow -\infty$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда спектр оператора L дискретен и неограничен снизу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем любое число $M > 0$. Тогда найдется такой номер m , что

$$\lambda^{L_0}(a_k, a_{k+1}) > M, \quad \lambda^L(b_k, b_{k+1}) < -M \quad \text{при } k \geq m + 1.$$

Возьмем произвольное целое число $N > m$ и рассмотрим оператор L на отрезке $[b_m, b_{m+N})$ с граничными условиями Дирихле. По условию леммы

$$\lambda^{L_0}(a_k, a_{k+1}) > M \quad \text{при } m - 1 \leq k \leq m + N.$$

Отсюда следует, что

$$\lambda^{L_0}(b_m, b_{m+N}) > M, \quad \lambda^{L_0}(a_{m+N}, b_{m+N}) \geq M$$

(ибо при сужении отрезка λ^{L_0} увеличивается).

Применяя к отрезку $[b_m, b_{m+N}]$ лемму 2, получаем неравенство

$$\lambda_N^L(b_m, b_{m+N}) \geq M - C_r. \quad (4)$$

Далее из неравенства $\lambda^L(a_k, a_{k+1}) < -M$ при $k = m, \dots, m + N$ и из леммы 1 (точнее, ее первого утверждения) вытекает, что

$$\lambda_N^L(a_m, a_{m+N}) \leq -M.$$

Но тогда для большего отрезка $[b_m, b_{m+N}]$ получаем

$$\lambda_N^L(b_m, b_{m+N}) \leq -M. \quad (5)$$

Из неравенств (4), (5) видно, что на интервале $[-M, M - C_r]$ нет ни одного собственного значения оператора L , рассматриваемого на отрезке $[b_m, b_{m+1}]$. Так как N произвольно, то для оператора L , рассматриваемого на $[b_m, \infty)$ (с условиями Дирихле в точке b_m), любое самосопряженное расширение имеет конечный спектр в интервале $(-M, M)$. Согласно принципу расщепления (см. [1, с. 41]) исходный оператор L , рассматриваемый на $[0, \infty)$, имеет в $[-M, M]$ конечный спектр. Так как M произвольно, весь спектр дискретен. Наконец, из того, что $\lambda^L(b_k, b_{k+1}) \rightarrow -\infty$ при $k \rightarrow \infty$ вытекает, что спектр неограничен снизу. Лемма 3 доказана.

Заметим, что лемма 3 дает признак дискретности и неотрицательности спектра, который не эффективен (ибо использует величины λ^L , λ^{L_0} вместо функции $q(x)$). В следующем пункте мы охарактеризуем спектр оператора L при помощи функции $q(x)$.

3. Доказательство теоремы. Пусть выполнены предположения теоремы. Выберем точки b_k так, что

$$a_{k-1} + h_{k-1} < b_k < a_k + h_k.$$

Получили перемежающиеся последовательности $\{a_k\}$, $\{b_k\}$, $k = 1, 2, \dots$. Покажем, что для них выполняются предположения леммы 3. Во-первых, как доказано в [3],

$$\lambda^{L_0}(a_{k-1}, a_k) \geq \frac{\pi^2}{3(a_k - a_{k-1})^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Так как $a_{k-1} - a_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то

$$\lambda^{L_0}(a_{k-1}, a_k) \rightarrow +\infty \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Далее, оценим сверху величину $\lambda^L(b_k, b_{k+1})$. Зафиксируем такую функцию $\varphi(x) \in C_0^\infty(-1, 1)$, что $\varphi(x) \geq 0$, $\|\varphi\| = 1$, $\varphi(0) = 1$. Зададим на отрезке $\Delta_k = (a_k - h_k, a_k + h_k)$ функцию

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{h_k}} \varphi\left(\frac{x - a_k}{h_k}\right).$$

Тогда $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Delta_k)$, $\|\varphi\| = 1$. Поэтому, вводя обозначение

$$\|\varphi^{(r)}\|^2 = \Phi, \quad \max_{|x| \leq 1} |\varphi(x)| = Q,$$

получаем

$$\begin{aligned} \lambda^L(b_k, b_{k+1}) &\leq \lambda^L(\Delta_k) \leq (L\varphi_k, \varphi_k) = \int_{\Delta_k} \left[|\varphi^{(r)}(x)|^2 + \frac{1}{h_k} q(x) \left| \varphi\left(\frac{x - a_k}{h_k}\right) \right|^2 \right] dx \\ &= \frac{\Phi}{h_k^{2r}} + \frac{1}{h_k} \int_{\Delta_k} q(x) dx + \frac{1}{h_k} \int_{\Delta_k} q(x) \left(\left| \varphi\left(\frac{x - a_k}{h_k}\right) \right|^2 - 1 \right) dx. \end{aligned}$$

Оценим последний интеграл. Положим

$$S = \max_{|x| \leq 1} |\varphi'(x)|.$$

В силу условия $\varphi(0) = 1$ имеем (по формуле Лангранжа)

$$\begin{aligned} \left| \varphi\left(\frac{x - a_k}{h_k}\right) \right|^2 - 1 &= \left| \varphi\left(\frac{x - a_k}{h_k}\right) \right|^2 - |\varphi(0)|^2 = 2|\varphi'(c)\varphi(c)| \left| \frac{x - a_k}{h_k} \right| \\ &\leq 2SQ \left| \frac{x - a_k}{h_k} \right| = T \frac{|x - a_k|}{h_k}, \quad \text{где } T = 2SQ. \end{aligned}$$

Отсюда, используя условие 3) теоремы, получаем

$$\int_{\Delta_k} q(x) \left(\left| \varphi\left(\frac{x - a_k}{h_k}\right) \right|^2 - 1 \right) dx \leq T h_k^{-1} \int_{\Delta_k} |q(x)| |x - a_k| dx < \frac{T}{3} h_k^{-1}.$$

Итак,

$$\lambda^L(b_k, b_{k+1}) \leq \frac{\Phi}{h_k^{2r}} + \frac{1}{h_k} \int_{\Delta_k} q(x) dx + \frac{T}{3h_k} = h_k^{-2r} \left(\Phi + h_k^{2r-1} \int_{\Delta_k} q(x) dx + \frac{1}{3} T h_k^{2r-1} \right).$$

По условию 2) теоремы

$$h_k^{2r-1} \int_{\Delta_k} q(x) dx \rightarrow -\infty \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Отсюда

$$\lambda^L(b_k, b_{k+1}) \rightarrow -\infty \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Из (6), (7) видим, что выполнены условия леммы 3. Тем самым, спектр оператора L дискретен и неограничен снизу.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Глазман И. М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М.: Физматгиз, 1963.
- [2] Титчмарш Э. Ч. Разложение по собственным функциям, связанное с дифференциальными уравнениями второго порядка. Ч. 1. М.: ИЛ, 1960.
- [3] Исмагилов Р. А. О спектре уравнения Штурма–Лиувилля с колеблющимся потенциалом // Матем. заметки. 1985. Т. 37. № 6. С. 869–879.

Башкирский государственный университет, г. Уфа

Поступило

20.02.2002

Исправленный вариант

28.03.2003