Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Н. Иванов, О сбалансированных базисах, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 2, 213–218

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2485>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 18:33:30

УДК 512.64

О СБАЛАНСИРОВАННЫХ БАЗИСАХ

Д. Н. Иванов

В статье доказывается, что сбалансированный базис алгебры $(n+1)M_1 \oplus M_n$, либо дополнительный к нему, имеет ранг $n+1$. Этот результат позволяет утверждать, что алгебра $(n+1)M_1 \oplus M_n$ сбалансирована тогда и только тогда, когда алгебра матриц M_n допускает WP-разложение, т.е. семейство из $n+1$ подалгебр, сопряженных диагональной, каждые две из которых ортогонально (относительно формы $\text{tr } XY$) пересекаются по единичной подалгебре. Таким образом, вопрос о сбалансированности алгебры $(n+1)M_1 \oplus M_n$ эквивалентен известной “проблеме Винни-Пуха” о существовании ортогонального разложения простой алгебры Ли типа A_{n-1} в сумму картановских подалгебр.

Библиография: 10 названий.

1. Введение. В работе [1] доказывается, что существование ортогонального разложения алгебры матриц $M_n(\mathbb{C}) = M_n$ в сумму подалгебр, сопряженных диагональной (это так называемые WP-разложения), равносильно существованию сбалансированного базиса ранга $n+1$ алгебры $(n+1)M_1 \oplus M_n$. В данной статье доказывается, что сбалансированный базис алгебры $(n+1)M_1 \oplus M_n$, либо дополнительный к нему, имеет ранг $n+1$. Этот результат позволяет утверждать, что алгебра $(n+1)M_1 \oplus M_n$ сбалансирована тогда и только тогда, когда алгебра матриц M_n допускает WP-разложение. Таким образом, вопрос о сбалансированности алгебры $(n+1)M_1 \oplus M_n$ эквивалентен известной “проблеме Винни-Пуха” о существовании ортогонального разложения простой алгебры Ли типа A_{n-1} в сумму картановских подалгебр [2].

Напомним основные определения. Всюду далее, если не оговорено противное, под *алгеброй* понимается ассоциативная полупростая конечномерная над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ алгебра, т.е. то, что обычно называют классически полупростой алгеброй над $\mathbb{C}$. Обозначим через Tr_A след регулярного (правого или левого) представления алгебры A , 1_A – единичный элемент в A .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Семейство идемпотентов $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_v\}$ в алгебре A (здесь $\dim A > 1$) называется *сбалансированной t -системой*, если выполнены следующие два условия:

$$(1) \text{ (условие сбалансированности) } e_1 + \dots + e_v = k \cdot 1_A, k \in \mathbb{C};$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00219.

- (2) (*условие равноугольности*) для любых $s, s \leq t$, различных идемпотентов $e_{i_1}, \dots, e_{i_s} \in \mathcal{E}$ значение функции следа

$$\mathrm{Tr}_A e_{i_1} \cdots e_{i_s} = \lambda_s$$

зависит только от s .

Число $\mathrm{rank} \mathcal{E} \doteq \lambda_1$ называется *рангом* системы $\mathcal{E}$.

Система идемпотентов $\overline{\mathcal{E}} = \{\mathbf{1}_A - e_i, e_i \in \mathcal{E}\}$ является, очевидно, сбалансированной t -системой, которая называется *дополнительной* к $\mathcal{E}$.

Если сбалансированная 2-система $\mathcal{E}$ является базисом алгебры $\mathbf{A}$, то $\mathcal{E}$ называется *сбалансированным базисом*, а $\mathbf{A}$ называется *сбалансированной алгеброй*.

Следующий пример является главной мотивировкой приведенного определения.

ПРИМЕР. Напомним определение комбинаторной t -схемы [3]. Под t -схемой с параметрами (v, k, λ_t) понимается совокупность $\mathcal{B}$ подмножеств (называемых *блоками*) множества $\mathcal{V}$, состоящий из v точек, такая, что

- (1) каждое подмножество из $\mathcal{B}$ содержит k точек;
- (2) каждое подмножество из t точек содержится ровно в $\lambda_t > 0$ подмножествах из $\mathcal{B}$.

Матрица инцидентности A t -схемы, в которой строки отвечают точкам, а столбцы – блокам, имеет размеры $v \times b$, где b – число блоков. Рассматривая строки матрицы A как координаты элементов алгебры bM_1 в базисе из примитивных идемпотентов этой алгебры, получаем сбалансированную t -систему идемпотентов в bM_1 . При этом условие сбалансированности вытекает из (1), а условие равноугольности из (2). Таким образом, комбинаторные t -схемы отвечают сбалансированным t -системам идемпотентов в коммутативных полупростых алгебрах. При этом сбалансированным базисам в коммутативных алгебрах соответствуют симметрические блок-схемы, в которых по определению число точек равно числу блоков. Отметим, что симметрические блок-схемы являются одним из наиболее изучаемых в комбинаторике объектов. К ним относятся, например, конечные проективные плоскости, 2-схемы Адамара, разностные множества в группах.

Перейдем теперь к определению WP-разложений. Начнем с определения общего понятия ортогонального разложения ассоциативных (классически полупростых) алгебр, которое было введено автором в [4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Семейство неединичных собственных подалгебр $\mathcal{D} = \{\mathbf{B}_i, i = 1, \dots, r\}$ образует *ортогональное разложение* (ОР) алгебры $\mathbf{A}$, если

- (1) все подалгебры $\mathbf{B}_i$ полупросты и содержат единичный элемент $\mathbf{1}_A$ алгебры $\mathbf{A}$;
- (2) (*условие ортогональности*) алгебра $\mathbf{A}$ является прямой суммой попарно ортогональных подпространств

$$\mathbf{A} = \langle \mathbf{1}_A \rangle \oplus \mathbf{B}_1^\circ \oplus \cdots \oplus \mathbf{B}_r^\circ, \quad \text{где } \mathbf{B}_i^\circ = \{x \in \mathbf{B}_i \mid \mathrm{Tr}_A x = 0\}.$$

Если все подалгебры ОР $\mathcal{D}$ коммутативны, то $\mathcal{D}$ называется *коммутативным*. Если все подалгебры в $\mathcal{D}$ изоморфны алгебре $\mathbf{B}$, то $\mathcal{D}$ называется *однородным ОР типа $\mathbf{B}$* (или просто *ОР типа $\mathbf{B}$*). Через kM_n будем обозначать прямую сумму k экземпляров алгебры матриц M_n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *WP-разложением* алгебры матриц M_n называется однородное ОР типа nM_1 .

ПРИМЕРЫ. Введение понятия ОР оправдано тем, что оно объединяет такие известные темы, как конечные аффинные плоскости, конечные расщепляемые группы, классические матрицы Адамара и ортогональные разложения простых алгебр Ли типа A_n в сумму картановских подалгебр. Именно:

- (1) конечная аффинная плоскость порядка n соответствует однородному ОР типа nM_1 коммутативной алгебры n^2M_1 ;
- (2) матрица Адамара порядка n соответствует однородному ОР типа $2M_1$ алгебры nM_1 ;
- (3) если подгруппы $\{H_i\}$ расщепляют группу G , то подалгебры $\{CH_i\}$ образуют ОР групповой алгебры $\mathbb{C}G$;
- (4) ортогональное разложение простой алгебры Ли типа A_n в сумму картановских подалгебр соответствует WP-разложению алгебры матриц M_{n+1} .

Известная в комбинаторике конструкция расширения блок-схемы позволяет получить из аффинной плоскости порядка n проективную плоскость, которая является симметричной $2-(n^2+n+1, n+1, 1)$ -схемой. В наших терминах это означает, что однородному ОР типа nM_1 алгебры n^2M_1 (это аффинная плоскость порядка n) соответствует сбалансированный базис ранга $n+1$ в алгебре $(n^2+n+1)M_1$ (проективная плоскость).

Последний пример имеет также следующий аналог.

ТЕОРЕМА 1 [1]. *Существует взаимнооднозначное соответствие между WP-разложениями алгебры M_n и сбалансированными базисами ранга $n+1$ в алгебре $(n+1)M_1 \oplus M_n$.*

Главной целью данной статьи является доказательство того, что любой сбалансированный базис алгебры $(n+1)M_1 \oplus M_n$, либо дополнительный к нему, имеет ранг $n+1$. Отсюда будет следовать, что существование WP-разложения в алгебре матриц M_n равносильно сбалансированности алгебры $(n+1)M_1 \oplus M_n$.

2. Основная теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\mathcal{E}$ – сбалансированный базис алгебры $(n+1)M_1 \oplus M_n$. Тогда $\text{rank } \mathcal{E} = n+1$ или n^2 . Иными словами, $\text{rank } \mathcal{E}$ или $\overline{\mathcal{E}}$ равен $n+1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{A} = \mathbf{B} \oplus \mathbf{C}$, где $\mathbf{B} = (n+1)M_1$, $\mathbf{C} = M_n$. отождествим алгебры $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ с их каноническими образами в $\mathbf{A}$, т.е. с $(\mathbf{B}, 0)$ и $(0, \mathbf{C})$.

Будем говорить, что *идемпотент E содержит идемпотент e* или, что *e входит в E* , если $Ee = eE = e$.

Пусть $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_v\}$ – сбалансированный базис ранга r в $\mathbf{A}$, где

$$e_i = (e'_i, e''_i), \quad e'_i \in \mathbf{B}, \quad e''_i \in \mathbf{C}, \quad i = 1, \dots, v, \quad v = \dim \mathbf{A} = n^2 + n + 1.$$

Тогда, в силу равенства $\text{rank } \mathcal{E} + \text{rank } \overline{\mathcal{E}} = n^2 + n + 1$, либо $\text{rank } \mathcal{E}$, либо $\text{rank } \overline{\mathcal{E}}$ не делится на n . Поэтому с самого начала мы можем предполагать без ограничения общности, что

$$\text{rank } \mathcal{E} = r = sn + a, \quad 1 \leq a < n.$$

Рассматривая значение Tr_A на обеих частях условия сбалансированности, получаем $vr = k \text{Tr}_A \mathbf{1}_A = kv$ и, значит, $k = r$.

Заметим, что значение Tr_A на примитивных идемпотентах подалгебры $\mathbf{B}$ равно 1, а на примитивных идемпотентах подалгебры $\mathbf{C}$ равно n .

Шаг 1. Пусть $a \neq 1$. Тогда каждый идемпотент e_i содержит ровно a примитивных идемпотентов подалгебры $\mathbf{B}$, т.е. $\text{Tr}_A e'_i = a$ для всех i . Рассматривая проекцию условия сбалансированности на подалгебру $\mathbf{B}$, получаем

$$e'_1 + \cdots + e'_v = r \mathbf{1}_B. \quad (1)$$

Применяя Tr_A к (1), выводим

$$a(n^2 + n + 1) = r(n + 1).$$

Так как $n + 1$ и $n^2 + n + 1$ взаимнопросты, то $n + 1$ делит a , что невозможно в силу условий $1 \leq a < n$. Полученное противоречие доказывает, что $a = 1$ и $r = sn + 1$.

Шаг 2. Пусть b идемпотентов e_i содержат $\mathbf{1}_B$, т.е., скажем, $e'_1 = \cdots = e'_b = \mathbf{1}_B$. Ясно, что $b < v$, иначе система $\mathcal{E}$ не является базисом, так как через нее нельзя будет выразить примитивные идемпотенты подалгебры $\mathbf{B}$. Тогда из (1) вытекает

$$e'_{b+1} + \cdots + e'_v = (r - b) \mathbf{1}_B.$$

Применяя Tr_A , получаем

$$n^2 + n + 1 - b = (sn + 1 - b)(n + 1). \quad (2)$$

Из (2) следует, что $n + 1$ делит $b - 1$. Положим

$$b - 1 = (n + 1)t,$$

где t – неотрицательное целое число. После деления (2) на $n + 1$, получаем $n - t = sn - (n + 1)t$. Отсюда

$$t = s - 1 \quad \text{и} \quad b = (n + 1)(s - 1) + 1 = sn + s - n.$$

Шаг 3. Домножая условие сбалансированности на e_i и рассматривая Tr_A от обеих частей полученного равенства, находим параметр $\lambda = \lambda_2 = \text{Tr}_A e_i e_j$ системы $\mathcal{E}$:

$$\lambda(v - 1) = r(r - 1) \implies \lambda(n^2 + n) = (sn + 1)sn \implies \lambda = \frac{(sn + 1)s}{n + 1}.$$

Положим $e_i = f_i, e'_i = f'_i, e''_i = f''_i$ для $i = 1, \dots, b$. Имеем

$$\text{Tr}_A f'_i f'_j = n + 1 \implies \text{Tr}_A f''_i f''_j = \frac{(sn + 1)s}{n + 1} - (n + 1) \quad \text{при } i \neq j,$$

$$\text{Tr}_A f'_i e'_j = 1 \implies \text{Tr}_A f''_i e''_j = \frac{(sn + 1)s}{n + 1} - 1 \quad \text{при } j > b,$$

$$\text{Tr}_A e'_i e'_j = 0 \quad \text{или} \quad 1 \implies \text{Tr}_A e''_i e''_j = \frac{(sn + 1)s}{n + 1} \quad \text{или} \quad \frac{(sn + 1)s}{n + 1} - 1 \quad \text{при } i, j > b.$$

Рассмотрим проекцию условия сбалансированности на подалгебру $\mathbf{C}$:

$$f_1'' + \cdots + f_b'' + e_{b+1}'' + \cdots + e_v'' = r \mathbf{1}_C. \quad (3)$$

Заметим, что $v - b = n^2 + n + 1 - (sn + s_n) = (n + 1 - s)(n + 1)$ идемпотентов e_i , $i = b + 1, \dots, v$, разбиваются на $n + 1$ группу так, что каждая группа состоит из $n + 1 - s$ идемпотентов и все идемпотенты внутри фиксированной группы содержат один и тот же примитивный идемпотент подалгебры $\mathbf{B}$, т.е. для идемпотентов e_i, e_j из одной группы выполнено равенство $\text{Tr}_A e_i' e_j' = 1$, а для идемпотентов из разных групп выполнено равенство $\text{Tr}_A e_i' e_j' = 0$.

Домножим (3) на e_v'' и, учитывая сделанное замечание, рассмотрим функцию Tr_A от полученного равенства:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^b \text{Tr}_A f_i'' e_v'' + \sum_{i=b+1}^{v-1} \text{Tr}_A e_i'' e_v'' &= r(r-1) = s^2 n^2 \\ \Rightarrow \left(\frac{(sn+1)s}{n+1} - 1 \right) \cdot b + \left(\frac{(sn+1)s}{n+1} - 1 \right) \cdot n + (n+1-s)n \cdot \frac{(sn+1)s}{n+1} &= s^2 n^2. \end{aligned}$$

Подставляем $b + n = s(n + 1)$ и делим на s :

$$s^2 n + s - (n + 1) + \frac{(n + 1 - s)(sn + 1)n}{n + 1} = sn^2. \quad (4)$$

Домножая (4) на $n + 1$, после несложных преобразований получаем

$$(1 + n(s + 1))(s - 1) = 0 \Rightarrow s - 1 = 0 \Rightarrow r = n + 1.$$

Теорема доказана.

Из теорем 1 и 2 вытекает

ТЕОРЕМА 3. *Существование WP-разложения в алгебре матриц M_n равносильно сбалансированности алгебры $(n + 1)M_1 \oplus M_n$.*

В заключение отметим, что WP-разложения интенсивно изучаются. Им посвящена значительная часть монографии [5], где изложение ведется в терминах алгебр Ли. То есть WP-разложения фигурируют в [5] как ортогональные разложения простых комплексных алгебр Ли типа A_n в сумму картановских подалгебр. Центральным результатом в [5] является классификация так называемых неприводимых WP-разложений, группа автоморфизмов которых действует неприводимо на пространстве матриц с нулевым следом. В [6] для WP-разложений алгебры M_n формулируется аналог знаменитой теоремы Вагнера из теории конечных плоскостей, который доказывается для нечетных n , не являющихся квадратами. Связи WP-разложений с градуировками на алгебре матриц исследуются в [7]. Сбалансированные базисы в алгебрах матриц рассматриваются в [8]–[10].

Отметим, что сбалансированные базисы ранга $n + 1$ алгебры $(n + 1)M_1 \oplus M_n$, равно как и WP-разложения алгебры M_n , построены для всех $n = p^m$, p простое. Предполагается, что для других значений n они не существуют.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Иванов Д. Н. Ортогональные разложения ассоциативных алгебр и сбалансированные системы идемпотентов // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 12. С. 83–102.
- [2] Кострикин А. И., Кострикин И. А., Уфнаровский В. А. Ортогональные разложения простых алгебр Ли типа A_n // Тр. МИАН. 1981. Т. 158. С. 105–120.
- [3] Beth T., Jungnickel D., Lenz H. Design Theory. 2nd edition. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- [4] Иванов Д. Н. Ортогональные разложения полупростых ассоциативных алгебр // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1988. Т. 43. № 1. С. 9–14.
- [5] Kostrikin A. I., Pham Huu Tiep. Orthogonal Decompositions and Integral Lattices. Berlin: Walter de Gruyter, 1994.
- [6] Иванов Д. Н. Аналог теоремы Вагнера для ортогональных разложений алгебры матриц $M_n(\mathbb{C})$ // УМН. 1994. Т. 49. № 1. С. 215–216.
- [7] Bahturin Yu. A., Sehgal S. K., Zaicev M. V. Groups gradings on associative algebras // J. Algebra. 2001. V. 241. P. 677–698.
- [8] Иванов Д. Н. Сбалансированные системы из примитивных идемпотентов в алгебрах матриц // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 4. С. 67–90.
- [9] Иванов Д. Н. О сбалансированных системах идемпотентов // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 4. С. 73–86.
- [10] Ivanov D. N. Orthogonal decompositions and idempotent configurations in semisimple associative algebras // Comm. Algebra. 2001. V. 29. № 9. P. 3839–3887.

Тверской государственный университет
E-mail: dni@tvcom.ru

Поступило
13.05.2003