Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Саралеги-Арангурен, Р. Волак, Базовые кохомологии пересечения конических расслоений, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 2, 235–257

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2487>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 18:26:50

УДК 512

БАЗОВЫЕ КОГОМОЛОГИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ КОНИЧЕСКИХ РАССЛОЕНИЙ

М. Саралеги-Арангурен, Р. Волак

Вводится понятие сингулярного расслоения и сингулярного расслоения Зейферта. Эти понятия естественно обобщают понятие локально тривиального расслоения на случай категории стратифицированных псевдомногообразий. Для сингулярных слое- ний, определяемых такими расслоениями, мы доказываем теорему типа де Рама для ба- зовых когомологий пересечений, введенных недавно авторами. Одним из важных при- меров такой структуры является естественная проекция на пространство слоев сингу- лярного риманова слое-ния, определяемого действием компактной группы Ли на глад- ком компактном многообразии.

Библиография: 23 названия.

1. Введение

Отсутствие двойственности Пуанкаре для гомологий и когомологий некоторых син- гулярных пространств привело Горески и Макферсона к введению новой теории гомоло- гий, названной гомологиями пересечений, которая учитывает сингулярности рассмат- риваемого пространства (см. [1]).

Эти гомологии определяются на стратифицированных псевдомногообразиях. На- чальная идея обобщалась в различных направлениях. Развивалась теория симплици- альных и сингулярных гомологий, а также были предложены более слабые понятия ис- кажения (дифференциальных форм) (см. [2], [3]).

Было установлено несколько версий двойственности Пуанкаре с учетом степени ис- кажения. Наконец, Горески и Макферсон определили когомологии де Рама пересечений для стратифицированных пространств в смысле Тома–Мезера. Однако они не опублико- вали своего определения, и позже это определение было включено в работу Брылински (см. [4]) об эквивариантных когомологиях. Все это привело к поиску теоремы типа де Рама для когомологий пересечений.

Работа первого автора выполнена при частичной поддержке программ “Programa de perfec- cionamiento y movilidad de personal investigador” фонда “Eusko Jaularitzza-Gobierno del País Vas- co” и “Projet d’Action Intégrée Picasso”, грант № 02679SL. Работа второго автора выполнена при частичной поддержке фонда KBN, грант № 5 P03A 040 20.

Первый автор в его диссертации и нескольких последовательных публикациях (см. [5]) рассмотрел когомологии де Рама пересечений для стратифицированного пространства, существенно используя разрешение сингулярностей по Верону (см. [6]). Главной идеей явилось введение комплекса (пучка) форм пересечения, допускающих поднятие (см. [5]).

В работе [7] авторы ввели базовые когомологии пересечения (в смысле де Рама), или сокращенно БКП, для сингулярных римановых слоений, используя тот факт, что такие слоения определяют стратификацию многообразия (см. [8], [9]) по отношению к слоям слоения. На самом деле, когомологии БКП можно определить для более широкого класса слоений, которые мы называем коническими слоениями.

В настоящей работе мы изучаем когомологии БКП для специального класса конических слоений, задаваемых так называемыми сингулярными расслоениями. В этом случае пространство слоев является стратифицированным псевдмногообразием, а когомологии БКП этого слоения совпадают с когомологиями пересечений пространства слоев. В случае, когда сингулярное расслоение в действительности является регулярным, мы получаем хорошо известную теорему де Рама для многообразий.

2. Конические слоения

2.1. Сингулярные слоения. Слоение $\mathcal{F}$ многообразия M – это разбиение многообразия M на гладкие связные подмногообразия, называемые слоями, которые необязательно вложены. Мы вводим только одно ограничение на это разбиение, связанное с теоремой Фробениуса (о различных версиях теоремы Фробениуса см. [7], [10]–[15]). Полезно различать два случая: регулярный и сингулярный.

Разбиение $\mathcal{F}$ называется *регулярным слоением* размерности p , если подмногообразия разбиения имеют одну и ту же размерность p и для любой точки $m \in M$ существует такая карта (U, φ) , $\varphi = (x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$, что слои

$$\varphi_c = \{p \in U \mid (y_1(p), \dots, y_q(p)) = c\}, \quad c \in \mathbb{R}^q,$$

являются связными компонентами следов слоев на карте U . Поэтому локально слоение $\mathcal{F}$ представляется произведением

$$(\mathbb{R}^m, \mathcal{H}) \equiv (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, \mathcal{J} \times \mathcal{I}),$$

причем $\mathcal{J}$ является слоением пространства $\mathbb{R}^p$ ровно с одним слоем, а $\mathcal{I}$ является слоением пространства $\mathbb{R}^q$, состоящим из отдельных точек. Слоение $\mathcal{H}$ называется *простым* слоением.

Теорема Фробениуса приводит нас к следующему эквивалентному определению регулярного слоения.

Пусть D обозначает векторное подрасслоение в ТМ постоянного ранга. Тогда D называется (регулярным) слоением, если оно является инволютивным подрасслоением, т.е. если для любых векторных полей X и Y , являющихся сечениями подрасслоения D , их скобка Ли $[X, Y]$ тоже является сечением подрасслоения D .

Эквивалентность этих двух определений заключается в том, что инволютивному подрасслоению сопоставляется разбиение на максимальные интегральные подмногообразия, которых касаются векторы из подрасслоения. В сингулярном случае мы получаем более деликатное условие.

Рассмотрим распределение $D \subset TM$ такое, что для любой точки $x \in M$ существует открытая окрестность U точки x и гладкие векторные поля $X_1, \dots, X_k$ на U , порождающие D_y в каждой точке $y \in U$. Распределение D называется *сингулярным слоением*, если

- 1) подрасслоение D инволютивно;
- 2) если X есть локальное сечение распределения D , а φ_t – его локальный поток, то размерность D постоянна вдоль каждой траектории потока φ_t .

Сингулярная теорема Фробениуса утверждает, что эти условия эквивалентны следующему условию.

Пусть слой L_m , проходящий через точку $m \in M$, имеет размерность r . Тогда существует такая карта (U, φ) , $\varphi = (x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_q)$, содержащая точку m , $\varphi(m) = 0$, и такие функции $\{a_{ij}(y)\}_{i \in \{1, \dots, q\}, j \in \{1, \dots, r\}}$, $a_{ij}(0) = 0$, что векторные поля

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial}{\partial x_r}, \quad Y_1 = \sum_{i=1}^q a_{i1}(y) \frac{\partial}{\partial y_i}, \quad \dots, \quad Y_r = \sum_{i=1}^q a_{ir}(y) \frac{\partial}{\partial y_i}$$

порождают расслоение векторов, касающихся слоев в окрестности U .

Это описание обеспечивает гомеоморфизм разбиения на U с помощью локальных координат φ на декартово произведение слоений $\mathcal{J} \times \mathcal{K}$ в $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, где у слоения $\mathcal{K}$ пространства $\mathbb{R}^q$ точка $\{0\}$ является 0-мерным слоем.

Разобьем многообразие M на подмножества точек слоев одинаковой размерности. Связные компоненты этих множеств, называемые *стратами*, образуют *стратификацию* многообразия M , которую мы обозначим через $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$. Если стратификация состоит из одной страты $\{M\}$, то слоение является регулярным. Гладкое отображение $f: (M, \mathcal{F}) \rightarrow (M', \mathcal{F}')$ многообразий называется *отображением слоений*, если оно отображает слои в слои. Если f является локальным диффеоморфизмом на образ, то он сохраняет размерность слоев и поэтому отображает страты многообразия M в страты многообразия M' . Группа диффеоморфизмов слоений будет обозначаться через $\text{Diff}(M, \mathcal{F})$.

2.1.1. ПРИМЕРЫ.

(а) В любом открытом подмножестве $U \subset M$ индуцируется сингулярное слоение

$$\mathcal{F}_U = \{\text{связные компоненты множества } L \cap U \mid L \in \mathcal{F}\}.$$

Ассоциированная стратификация получается как

$$\mathcal{S}_{\mathcal{F}_U} = \{\text{связные компоненты множества } S \cap U \mid S \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}\}.$$

(б) Скажем, что диффеоморфизм слоений вида

$$\varphi: (\mathbb{R}^{m-n-1} \times \mathbb{R}^{n+1}, \mathcal{H} \times \mathcal{K}) \rightarrow (U, \mathcal{F}_U)$$

является *картой слоения*, моделированной слоением $(\mathbb{R}^{m-n-1} \times \mathbb{R}^{n+1}, \mathcal{H} \times \mathcal{K})$.

(с) Рассмотрим связное регулярное слоение $(N, \mathcal{K})$. На декартовом произведении $N \times M$ получается сингулярное слоение

$$\mathcal{K} \times \mathcal{F} = \{L_1 \times L_2 \mid L_1 \in \mathcal{K}, L_2 \in \mathcal{F}\}.$$

Ассоциированная стратификация при этом равна

$$S_{\mathcal{K} \times \mathcal{F}} = \{N \times S \mid S \in S_{\mathcal{F}}\}.$$

(d) Рассмотрим n -мерную сферу $\mathbb{S}^n$, снабженную некоторым сингулярным слоением $\mathcal{G}$ без 0-мерных слоев. отождествим диск D^{n+1} с конусом

$$c\mathbb{S}^n = \mathbb{S}^n \times [0, 1[/ \mathbb{S}^n \times \{0\}$$

с помощью отображения $x \mapsto [x/\|x\|, \|x\|]$, где $[u, t]$ – общая точка конуса. Рассмотрим на диске D^{n+1} сингулярное слоение

$$c\mathcal{G} = \{F \times \{t\} : F \in \mathcal{G}, t \in]0, 1[\} \cup \{\vartheta\},$$

где $\vartheta = [u, 0]$ – вершина конуса. Индуцированная стратификация образует множество

$$S_{c\mathcal{G}} = \{S \times]0, 1[\mid S \in S_{\mathcal{G}}\} \cup \{\vartheta\},$$

поскольку $\mathcal{G}$ не содержит 0-мерных слоев. По техническим причинам будем рассматривать также случай $n = -1$, когда $\mathbb{S}^n = \emptyset$, а $c\mathbb{S}^n = \{\vartheta\}$. Если не предполагается противное, то на диске $D^{n+1} = c\mathbb{S}^n$ будем рассматривать слоение $c\mathcal{G}$, когда на сфере берется слоение $(\mathbb{S}^n, \mathcal{G})$.

2.2. Конические слоения. Страты сингулярного слоения не обязаны быть многообразиями, а их расположение может быть очень сложным. Чтобы обеспечить построение когомологий пересечения, от стратификации $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ требуется определенная степень регулярности и коничности (см. [1] для случая стратифицированных псевдомногообразий). Это потребовало от нас следующего определения.

Говорят, что слоение $(M, \mathcal{F})$ является *коническим*, если для любой точки $x \in M$ существует карта слоения (U, φ) , моделированная слоением $(\mathbb{R}^{m-n-1} \times c\mathbb{S}^n, \mathcal{H} \times c\mathcal{G})$, где $\varphi(x) = 0$, $(\mathbb{R}^{m-n-1}, \mathcal{H})$ – простое слоение, а $(\mathbb{S}^n, \mathcal{G})$ – некоторое коническое слоение без 0-мерных слоев. Это определение дается с помощью индукции по размерности многообразия M . Скажем, что карта (U, φ) является *конической картой* в точке x , а слоение $(\mathbb{S}^n, \mathcal{G})$ является *зацеплением* точки x . Заметим, что если точка x содержится в страте S , то $\varphi^{-1}(S \cap U) = \mathbb{R}^{m-n-1} \times \{\vartheta\}$.

Заметим, что каждая страта является подмногообразием, вложенным в многообразие M . Слой (соответственно страта) слоения $\mathcal{F}$ (соответственно $S_{\mathcal{F}}$), содержащий точку x , отображается с помощью φ в слой слоения $\mathcal{H}$, содержащий 0 (соответственно $\mathbb{R}^{m-n-1}$).

Число $n + 1$ не зависит от выбора карты и равно коразмерности страты. Это число не может равняться 1, поскольку коническое слоение на сфере $(\mathbb{S}^n, \mathcal{G})$ не имеет 0-мерных слоев.

Для многообразий с краем тоже определяется понятие конического слоения. В этом случае точки края имеют карты, которые моделируются слоением

$$(\mathbb{R}^{m-n-2} \times [0, 1[\times c\mathbb{S}^n, \mathcal{H} \times \mathcal{I} \times c\mathcal{G}),$$

где слоение $\mathcal{I}$ состоит из отдельных точек полуинтервала $[0, 1[$. Край $(\partial M, \mathcal{F}_{\partial M})$ тоже является коническим слоением.

Из приведенного локального описания вытекают некоторые важные факты о стратификации $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$. В компактном случае семейство страт конечно, а в общем случае локально конечно. Замыкание страты $S \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ является объединением страт. Положим $S_1 \preceq S_2$, если $S_1, S_2 \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ и $S_1 \subset \overline{S_2}$. Это отношение является отношением частичного порядка, и поэтому $(\mathcal{S}_{\mathcal{F}}, \preceq)$ является частично упорядоченным множеством.

Глубина стратификации, обозначаемая $S_{\mathcal{F}}$, $\text{depth } \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$, определяется как наибольшее число i , для которого существует последовательность страт $S_0 \prec S_1 \prec \dots \prec S_i$. Так что $\text{depth } \mathcal{S}_{\mathcal{F}} = 0$ тогда и только тогда, когда слоение $\mathcal{F}$ регулярно. Для любого открытого подмножества $U \subset M$ имеем $\text{depth } \mathcal{S}_{\mathcal{F}_U} \leq \text{depth } S_{\mathcal{F}}$, а также имеем неравенство $\text{depth } S_{\mathcal{G}} = \text{depth } \mathcal{S}_{\mathcal{H} \times \mathcal{G}} < \text{depth } S_{\mathcal{H} \times c\mathcal{G}}$ (см. примеры выше).

Минимальные страты в точности являются замкнутыми стратами. По индукции можно проверить, что максимальные страты имеют размерность m . Они называются *регулярными стратами*, а остальные страты называются *сингулярными*. Объединение сингулярных страт обозначается через $\Sigma_{\mathcal{F}}$. Поскольку коразмерность сингулярных страт не меньше 2, возникает только одна регулярная страта R , которая всюду плотна.

Чтобы продемонстрировать важность изучения гомологических и когомологических свойств сингулярных конических слоений, приведем две математические ситуации, в которых они появляются.

Гладкие действия компактных групп Ли (см. [16]). Для любого гладкого действия компактной группы Ли G на гладком многообразии M естественная проекция $\pi_G: M \rightarrow M/G$ на пространство орбит M/G образует сингулярное коническое расслоение.

Интегрируемые гамильтоновы системы. Нгуен Тьен Зунг в своей недавней работе [17] рассмотрел следующую ситуацию. Рассмотрим гладкое гамильтоново отображение момента

$$F = (F_1, \dots, F_n): (M^{2n}, \omega) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

вполне интегрируемой гамильтоновой системы с n степенями свободы. Если F – собственное отображение, что является достаточно естественным предположением, то связанные компоненты многообразия уровня задают сингулярное слоение с компактными слоями. На регулярной части эти слои являются лагранжевыми торами $\mathbb{T}^n$ в многообразии (M^{2n}, ω) . Пусть $\mathcal{O}$ – пространство слоев этого слоения с факторной топологией. Тогда в случае интегрируемых систем общего положения пространство $\mathcal{O}$ является стратифицированным n -мерным многообразием, а естественная проекция $\pi: M \rightarrow \mathcal{O}$ является сингулярным лагранжевым расслоением интегрируемой системы. Такие расслоения задаются действием Пуассона с помощью n коммутирующих (по отношению к скобке Пуассона) функционально независимых функций на многообразии M^{2n} . Было бы полезно сравнить наше определение конического расслоения с условием (H2) в работе Нгуен Тьен Зунга.

Для определения искаженных форм в следующем разделе мы будем использовать совместимость между картами слоения, сформулированную в следующей лемме, доказательство которой можно найти в [7].

ЛЕММА 1. *Рассмотрим две карты слоения (U_1, φ_1) , (U_2, φ_2) в точке $x \in M$, причем $U_1 \subset U_2$. Существует единственное вложение слоений*

$$\varphi_{1,2}: (\mathbb{R}^{m-n-1} \times \mathbb{S}^n \times [0, 1[, \mathcal{H}_1 \times \mathcal{G}_1 \times \mathcal{I}) \rightarrow (\mathbb{R}^{m-n-1} \times \mathbb{S}^n \times [0, 1[, \mathcal{H}_2 \times \mathcal{G}_2 \times \mathcal{I}),$$

для которого $P \circ \varphi_{1,2} = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 \circ P$, где $P: \mathbb{R}^{m-n-1} \times \mathbb{S}^n \times [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}^{m-n-1} \times c\mathbb{S}^n$ задается формулой $P(u, \theta, t) = (u, [\theta, t])$.

Из этого результата следует также, что зацепление $(\mathbb{S}^n, \mathcal{G})$ в точке x одинаково для всех точек страты S , содержащей x . Поэтому мы будем говорить, что $(\mathbb{S}^n, \mathcal{G})$ является зацеплением страты S .

2.3. Частичное раздутие. Полезным инструментом при проведении индуктивных рассуждений служит десингуляризация. Фиксируем некоторое коническое слоение $(M, \mathcal{F})$ строго положительной глубины. Под *частичным раздутием* мы будем понимать коническое слоение на многообразии с краем $(\widehat{M}, \widehat{\mathcal{F}})$ и некоторое гладкое отображение слоений $\mathcal{L}_M: (\widehat{M}, \widehat{\mathcal{F}}) \rightarrow (M, \mathcal{F})$, для которых выполнены следующие условия:

- 1) ограничение $\mathcal{L}: \widehat{M} - \partial\widehat{M} \rightarrow M - S_{\min}$ является диффеоморфизмом, где $S_{\min}$ есть объединение замкнутых (минимальных) страт;
- 2) для любой точки $x \in S_{\min}$ коммутируют отображения $\mathcal{L} \circ \widehat{\varphi} = \varphi \circ P$, где (U, φ) – коническая карта точки x , а $\widehat{\varphi}: (\mathbb{R}^{m-n-1} \times \mathbb{S}^n \times [0, 1[, \mathcal{H} \times \mathcal{G} \times \mathcal{I}) \rightarrow (\widehat{M}, \widehat{\mathcal{F}})$ является вложением слоений.

Заметим, что каждое ограничение $\mathcal{L}: \mathcal{L}^{-1}(S) \rightarrow S$ на замкнутую страту S является расслоением, допускающим атлас карт слоений и структурную группу, равную $\text{Diff}(\mathbb{S}^n, \mathcal{G})$ по отношению к некоторому коническому слоению $(\mathbb{S}^n, \mathcal{G})$ на сфере.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Частичное раздутие всегда существует и единственно. Справедливы также следующие утверждения:*

- 3) $\text{depth } S_{\widehat{\mathcal{F}}} = \text{depth } S_{\mathcal{F}} - 1$;
- 4) $(\partial\widehat{M}, \widehat{\mathcal{F}}_{\partial\widehat{M}})$ является коническим слоением.

Доказательство предложения 1 можно найти в [7].

3. Базовые когомологии пересечения

Имеется два способа определять искаженные формы: первый использует систему трубчатых окрестностей (см. [4]), а второй использует глобальные раздутия (см. [5]). При изучении конических слоений мы предпочли вводить формы пересечения промежуточным путем: итерируя локальные раздутия многообразия M , мы получаем многообразие с границами $\widehat{M}$, где слоение становится регулярным. Похожая процедура была развита в работе [5]. Некоторые дифференциальные формы, заданные на регулярной части многообразия M , могут быть продолжены на многообразие $\widehat{M}$, – они суть искаженные формы. Мы вводим это понятие внутренним образом, не приводя конструкции многообразия $\widehat{M}$.

Мы намерены работать с дифференциальными формами на декартовом произведении $M \times [0, 1]^p$, где M есть многообразие, а формы суть ограничения дифференциальных форм, заданных на большем пространстве $M \times]-1, 1]^p$.

3.1. Искривленные формы. Комплекс $\Pi^*(M \times [0, 1]^p)$ *искривленных форм* вводится индукцией по глубине стратификации $\text{depth } S_{\mathcal{F}}$. Если глубина равна 0, то полагаем $\Pi^*(M \times [0, 1]^p) = \Omega^*(M \times [0, 1]^p)$. В общем случае рассмотрим дифференциальную форму $\omega \in \Omega^*((M - \Sigma_{\mathcal{F}}) \times [0, 1]^p)$. Поскольку в конической карте (U, φ) регулярная часть пространства $\mathbb{R}^{m-n-1} \times c\mathbb{S}^n$ в точности совпадает с $\mathbb{R}^{m-n-1} \times (\mathbb{S}^n - \Sigma_{\mathcal{G}}) \times]0, 1[$, то $(\varphi \times \text{identity}_{[0, 1]^p})^* \omega \in \Omega^*(\mathbb{R}^{m-n-1} \times (\mathbb{S}^n - \Sigma_{\mathcal{G}}) \times]0, 1^{p+1})$. Полагаем, что $\omega \in \Pi^*(M \times [0, 1]^p)$, если для любой конической карты (U, φ) форма

$$\begin{aligned} (\varphi \times \text{identity}_{[0, 1]^p})^* \omega & \text{продолжается до формы} \\ \omega_{\varphi} \in \Pi^*(\mathbb{R}^{m-n-1} \times \mathbb{S}^n \times [0, 1^{p+1}]). \end{aligned} \quad (1)$$

Построенное пространство $\Pi^*(M \times [0, 1]^p)$ является дифференциальной градуированной коммутативной алгеброй (DGCA для краткости), поскольку $(\omega + \eta)_{\varphi} = \omega_{\varphi} + \eta_{\varphi}$, $(\omega \wedge \eta)_{\varphi} = \omega_{\varphi} \wedge \eta_{\varphi}$ и $(d\omega)_{\varphi} = d\omega_{\varphi}$.

3.1.1. СВОЙСТВА (см. [7]).

(а) Пусть $(N, \mathcal{H})$ – регулярное слоение. Частичным раздутием слоения $N \times c\mathbb{S}^n$ является слоение $N \times \mathbb{S}^n \times [0, 1[$ с естественной проекцией $(x, \theta, t) \mapsto (x, [\theta, t])$. Здесь появляется сомножитель $[0, 1[$. Десингуляризация добавляет дополнительные сомножители $[0, 1[$.

(б) Рассмотрим частичное раздутие $\mathcal{L}_M: \widehat{M} \rightarrow M$ конического слоения. Любая искривленная форма ω на слоении M определяет искривленную форму $\widehat{\omega}$ на $\widehat{M}$, продолжающую форму $\mathcal{L}_M^* \omega$. Это отображение $\omega \mapsto \widehat{\omega}$ задает изоморфизм между пространствами $\Pi^*(M)$ и $\Pi^*(\widehat{M})$.

(с) Для любой искривленной формы и любой конической карты выполняется условие (1).

(д) Существуют дифференциальные формы на $M - \Sigma_{\mathcal{F}}$, которые не являются искривленными. Любая форма ω , определенная на всем многообразии M является искривленной.

(е) Рассмотрим открытое покрытие $\{U, V\}$ на M . Существует гладкое разбиение единицы на многообразии M , подчиненное этому покрытию. Наличие такого разбиения единицы влечет точность короткой последовательности Майера–Виеториса

$$0 \rightarrow \Pi^*(M) \rightarrow \Pi^*(U) \oplus \Pi^*(V) \rightarrow \Pi^*(U \cap V) \rightarrow 0.$$

3.2. Степень искажения. Для точки x сингулярной страты S определим *степень искажения* $\|\omega\|_x$ как наименьшее число k , для которого выполнено условие

$$i_{\zeta_0} \cdots i_{\zeta_k} \omega_{\varphi} \equiv 0$$

для каждой конической карты (U, φ) точки x , где $\varphi^{-1}(x) = (a, \vartheta)$, и для каждого семейства векторных полей $\{\zeta_i\}_{i=0}^k$ на $\{a\} \times (\mathbb{S}^n - \Sigma_{\mathcal{G}}) \times \{0\}$. Здесь i с индексом обозначает внутреннее произведение. Если форма ω_{φ} обращается в нуль на $\{a\} \times (\mathbb{S}^n - \Sigma_{\mathcal{G}}) \times \{0\}$, мы будем писать $\|\omega\|_x = -\infty$. Определим *степень искажения* $\|\omega\|_S$ по формуле

$$\|\omega\|_S = \sup\{\|\omega\|_x \mid x \in S\}.$$

3.2.1. СВОЙСТВА. Напомним некоторые основные свойства искаженных форм (см. [7]).

(а) Степень искажения $\|\omega\|_x$ не зависит от выбора конической карты точки x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим две карты слоения (U_1, φ_1) и (U_2, φ_2) точки x с условием $U_1 \subset U_2$. Имеем $\varphi_1^{-1}(x) = (a_1, \vartheta)$ и $\varphi_2^{-1}(x) = (a_2, \vartheta)$. Из леммы 2.2.1 следует, что $\omega_{\varphi_1} = \Phi_{1,2}^* \omega_{\varphi_2}$, а ограничение $\Phi_{1,2}: \{a_1\} \times (\mathbb{S}^n - \Sigma_{\mathcal{G}_1}) \times \{0\} \rightarrow \{a_2\} \times (\mathbb{S}^n - \Sigma_{\mathcal{G}_2}) \times \{0\}$ является диффеоморфизмом. Получаем, что $\|\omega\|_x^{\varphi_1} = \|\omega\|_x^{\varphi_2}$.

(б) Для двух искаженных форм ω и η и сингулярной страты S имеем

$$\|\omega + \eta\|_S \leq \max\{\|\omega\|_S, \|\eta\|_S\}, \quad \|\omega \wedge \eta\|_S \leq \|\omega\|_S + \|\eta\|_S.$$

(с) Степень искажения искаженной функции равна 0 или $-\infty$. Степень искажения формы ω на M равна 0 или $-\infty$.

(д) Пусть $(N, \mathcal{H})$ – регулярное слоение, а $a_0 \in N$ – отмеченная точка. Обозначим через $\text{pr}: N \times M \rightarrow M$ каноническую проекцию, а через $\iota: M \rightarrow N \times M$ вложение, определенное по формуле $\iota(x) = (a_0, x)$. Тогда для любых $\omega \in \Pi^*(M)$ и $\eta \in \Pi^*(N \times M)$ имеют место неравенства $\|\text{pr}^* \omega\|_{N \times S} \leq \|\omega\|_S$ и $\|\iota^* \omega\|_S \leq \|\omega\|_{N \times S}$ для каждой сингулярной страты многообразия M .

(е) Рассмотрим искаженную форму $\omega \in \Pi^*(c\mathbb{S}^n)$. Ее степень искажения относительно вершины равна

$$\|\omega\|_{\{\vartheta\}} = \begin{cases} -\infty, & \text{если } \omega_{\varphi} \equiv 0 \text{ на } \mathbb{S}^n \times \{0\}, \\ \deg \omega & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где (U, φ) – произвольная коническая карта точки $\{\vartheta\}$.

(ф) Искаженная форма, для которой $\|\omega\|_S \leq 0$ и $\|d\omega\|_S \leq 0$, индуцирует дифференциальную форму ω_S на S . Если это условие выполняется для каждой страты, то $\omega \equiv \{\omega_S\}$ является *контролируемой формой* в смысле Верона (см. [6]).

3.3. Базовые когомологии. Рассмотрим слоение $(M, \mathcal{F})$. Дифференциальная форма $\omega \in \Omega^*(M)$ называется *базовой*, если $i_X \omega = i_X d\omega = 0$ для каждого векторного поля X на многообразии M , касающегося слоения. Через $\Omega^*(M/\mathcal{F})$ обозначим комплекс базовых форм. Поскольку сумма и произведение базовых форм тоже являются базовыми, этот комплекс образует DGCA-алгебру. Ее когомологии $H^*(M/\mathcal{F})$ называются *базовыми когомологиями* слоения $(M, \mathcal{F})$, которые тоже образуют DGCA-алгебру. Если $F \subset M$ – насыщенное замкнутое подмножество, то мы будем обозначать через $\Omega^*((M, F)/\mathcal{F})$ подкомплекс базовых форм на M , обращающихся в нуль на F . Когомологии этого подкомплекса обозначим через $H^*((M, F)/\mathcal{F})$.

3.3.1. СВОЙСТВА.

(а) Гладкое отображение слоений $f: (M_1, \mathcal{F}_1) \rightarrow (M_2, \mathcal{F}_2)$ индуцирует гомоморфизм DGCA-алгебр $f^*: \Omega^*(M_2/\mathcal{F}_2) \rightarrow \Omega^*(M_1/\mathcal{F}_1)$.

(б) Открытое покрытие $\{U, V\}$ многообразия M с помощью насыщенных открытых множеств называется *базовым покрытием*, если существует подчиненное ему разбиение единицы, построенное при помощи базовых функций. Для базового покрытия имеет место точная короткая последовательность Майера–Виеториса

$$0 \rightarrow \Omega^*(M/\mathcal{F}) \rightarrow \Omega^*(U/\mathcal{F}_U) \oplus \Omega^*(V/\mathcal{F}_V) \rightarrow \Omega^*((U \cap V)/\mathcal{F}_{U \cap V}) \rightarrow 0,$$

где отображения задаются по правилу $\omega \mapsto (\omega, \omega)$ и $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha - \beta$. Для произвольных покрытий указанная последовательность, вообще говоря, не точна.

3.4. Базовые когомологии пересечения. Рассмотрим коническое слоение $(M, \mathcal{F})$. Функцией искажения называется отображение $\bar{p}: S_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{Z}$. Нулевое искажение $\bar{0}$ задается равенством $\bar{0}(S) = 0$. С гладким отображением слоений $f: (M', \mathcal{F}') \rightarrow (M, \mathcal{F})$ (соответственно $f: (M, \mathcal{F}) \rightarrow (M', \mathcal{F}')$) ассоциируется искажение на слоении $(M', \mathcal{F}')$, также обозначаемое через $\bar{p}$ и задаваемое равенством $\bar{p}(S') = \bar{p}(S)$, где $S' \in S_{\mathcal{F}'}$ и $S \in S_{\mathcal{F}}$ такие, что $f(S') \subset S$ (соответственно $S = f^{-1}(S')$).

Базовые когомологии пересечения возникают при рассмотрении базовых форм, чья степень искажения контролируется с помощью функции искажения. Будем обозначать через

$$\Omega_{\bar{p}}^*(M/\mathcal{F}) = \{\omega \in \Omega^*((M - \Sigma_{\mathcal{F}})/\mathcal{F}_{M-\Sigma_{\mathcal{F}}}) \mid \max(\|\omega\|_S, \|d\omega\|_S) \leq \bar{p}(S) \ \forall S \in S_{\mathcal{F}}\}$$

комплекс базовых форм, степень искажения которых (а также их дифференциалов) ограничена искажением $\bar{p}$. Когомологии $\mathbb{H}_{\bar{p}}^*(M/\mathcal{F})$ этого комплекса называются *базовыми когомологиями пересечения* многообразия M , или для краткости БКП, относительно функции искажения $\bar{p}$.

3.4.1. СВОЙСТВА.

(а) Вложение слоений $f: (M_1, \mathcal{F}_1) \rightarrow (M_2, \mathcal{F}_2)$ индуцирует гомоморфизм DGCA-алгебр $f^*: \Omega_{\bar{p}}^*(M_2/\mathcal{F}_2) \rightarrow \Omega_{\bar{p}}^*(M_1/\mathcal{F}_1)$ (см. 3.3.1(а) и 3.2.1(б)).

(б) Рассмотрим базовое покрытие $\{U, V\}$ многообразия M . Короткая последовательность Майера–Виеториса

$$0 \rightarrow \Omega_{\bar{p}}^*(M/\mathcal{F}) \rightarrow \Omega_{\bar{p}}^*(U/\mathcal{F}_U) \oplus \Omega_{\bar{p}}^*(V/\mathcal{F}_V) \rightarrow \Omega_{\bar{p}}^*((U \cap V)/\mathcal{F}_{U \cap V}) \rightarrow 0$$

точна. Для произвольных покрытий этот результат не имеет места.

Базовые когомологии пересечения совпадают с базовыми когомологиями, если слоение $\mathcal{F}$ регулярно, поскольку тогда оно состоит из одной страты. Но они также обобщают когомологии пересечения в смысле Горески–МакФерсона (см. [1]) в случае, когда пространство слоев B принадлежит правильной категории стратифицированных псевдомногообразий (см. теорему 1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $(\mathbb{R}^k, \mathcal{H})$ – простое слоение, а $(M, \mathcal{F})$ – коническое слоение. Для произвольной функции искажения $\bar{p}$ проекция

$$\text{pr}: \mathbb{R}^k \times (M - \Sigma_{\mathcal{F}}) \rightarrow (M - \Sigma_{\mathcal{F}})$$

индуцирует изоморфизм $\mathbb{H}_{\bar{p}}^*(\mathbb{R}^k \times M/\mathcal{H} \times \mathcal{F}) \cong \mathbb{H}_{\bar{p}}^*(M/\mathcal{F})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\mathcal{G}$ – коническое слоение на сфере S^n . Для произвольной функции искажения $\bar{p}$ проекция $\text{pr}: (S^n - \Sigma_{\mathcal{G}}) \times]0, 1[\rightarrow (S^n - \Sigma_{\mathcal{G}})$ индуцирует изоморфизм

$$\mathbb{H}_{\bar{p}}^i(cS^k/c\mathcal{G}) = \begin{cases} \mathbb{H}_{\bar{p}}^i(S^k/\mathcal{G}), & \text{если } i \leq \bar{p}(\{\vartheta\}), \\ 0, & \text{если } i > \bar{p}(\{\vartheta\}). \end{cases}$$

Этот результат показывает, что базовые когомологии пересечения не определяются когомологиями многообразия M .

4. Стратифицированные псевдомногообразия

Стратифицированное псевдомногообразие X задается (см. [1])

- паракомпактным пространством X ;
- локально конечным разбиением S_X , называемым *стратификацией*, состоящим из связных гладких многообразий, называемых *стратами*.

Требуется, чтобы у каждой точки пространства X была окрестность, гомеоморфная локальной модели $\mathbb{R}^p \times cL$, причем гомеоморфизмы отображали страты в страты, и существовала плотная страта R , называемая *регулярной стратой*.

Инициированные Горески и МакФерсоном результаты показали, что для изучения такого сорта сингулярных пространств наиболее подходящими оказались когомологии пересечения (см. [1], а также [3], [2]). Главный результат настоящего исследования заключается в том, что когомологии пересечения пространства B изоморфны базисным когомологиям пересечения слоения $\mathcal{F}$.

4.1. Отсутствие голономии. В этом пункте рассмотрим случай, когда коническое слоение $\mathcal{F}$ имеет собственные слои без голономии. Через B обозначим пространство слоев, а через $\pi: M \rightarrow B$ каноническую проекцию. Скажем, что коническое слоение $(M, \mathcal{F})$ является *сингулярным расслоением*, если для каждой сингулярной страты S стратификации $S_{\mathcal{F}}$ имеют место следующие свойства:

- ограничение $\pi: S \rightarrow \pi(S)$ является гладким расслоением (*условие голономии для $\mathcal{F}_S$*);
- зацепление $(S^n, \mathcal{G})$ страты S является сингулярным расслоением (*индуктивное условие*);
- след слоя $\mathcal{F}$ на S^n связан (*условие голономии для страты S на многообразии M*).

Для такого вида слоений получается следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Пространство слоев сингулярного расслоения является стратифицированным псевдомногообразием.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(M, \mathcal{F})$ – сингулярное расслоение, а B – пространство слоев. Поскольку многообразие M имеет счетный базис хороших конических карт $\{(\varphi, U)\}$, то пространство B имеет счетный базис, составленный из карт $\{(\psi, \pi(U))\}$. Значит, поскольку B регулярно, то оно паракомпактно. Рассмотрим стратификацию $S_B = \{\pi(S) \mid S \in S_{\mathcal{F}}\}$, что следует из а) и локальной конечности $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$. Проведем индукцию по глубине стратификации. На первом шаге получаем обычную теорему де Рама.

В общем случае рассмотрим коническую карту (φ, U) страты S . Поскольку слоение $(S, \mathcal{F}_S)$ является расслоением, любая точка страты S допускает карту, моделируемую с помощью слоения $(\mathbb{R}^{m-n-1}, \mathcal{H}) \equiv (\mathbb{R}^r, \mathcal{K}) \times (\mathbb{R}^s, \mathcal{I})$, где $\mathcal{K}$ есть слоение с одним слоем, а $\mathcal{I}$ есть слоение, состоящее из отдельных точек. Скажем, что карта (φ, U) является *хорошей конической картой*, если она моделируется с помощью $(\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \times cS^n, \mathcal{K} \times \mathcal{I} \times c\mathcal{G})$.

Хорошая коническая карта φ порождает стратифицированное вложение $\psi: \mathbb{R}^s \times c\pi_{S^n}(S^n) \rightarrow B$ (см. с)), где π_{S^n} есть каноническая проекция на S^n . Здесь мы можем применить индукцию, поскольку $(S^n, \mathcal{G})$ является сингулярным расслоением (см. б)).

Применяя ту же технику, можно непосредственно показать, что существует регулярная страта R .

Гомологии пересечения в смысле Горески–Макферсона $\mathbb{H}_p^*(B)$ были ими введены для того, чтобы изучать стратифицированные псевдомногообразия (см. [1], а также [3], [2]). Главный результат настоящей работы заключается в установлении связи между этими гомологиями пересечений и базисными когомологиями пересечений слоения $\mathcal{F}$. Напомним, что две функции искажения $\bar{p}$ и $\bar{q}$ на пространстве B *двойственны*, если

$$\bar{q}(\pi(S)) + \bar{p}(\pi(S)) = \text{codim}_B(\pi(S)) - 2$$

для каждой сингулярной страты $\pi(S)$. Заметим, что функция искажения $\bar{p}$ определяет искажение на B равенством $\bar{p}(\pi(S)) = \bar{p}(S)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $(M, \mathcal{F})$ – сингулярное расслоение и B – пространство орбит. Тогда

$$\mathbb{H}_q^*(M/\mathcal{F}) \cong \mathbb{H}_p^*(B),$$

где $\bar{p}$ и $\bar{q}$ – двойственные функции искажения.

Доказательство изложено в разделе 5.

4.2. Наличие голономий.

4.2.1. ПРИМЕР. Рассмотрим сферу $\mathbb{S}^3$, снабженную римановым слоением $\mathcal{H}$, которое задается действием Хопфа, т.е. $z \cdot (u_1, u_2) = (z \cdot u_1, z \cdot u_2)$. С другой стороны, рассмотрим пространство $\mathbb{R}^6 = c\mathbb{S}^5$, снабженное сингулярным римановым слоением $c\mathcal{Q}$, которое задается действием тора $\mathbb{T}^2 \times c\mathbb{S}^5 \rightarrow c\mathbb{S}^5$ по формуле

$$(z_1, z_2) \cdot [(v_1, v_2, v_3), t] = [(z_1 \cdot v_1, z_1 z_2 \cdot v_2, z_1 z_2^2 \cdot v_3), t].$$

Имеется три типа слоев: точки, окружности и торы. Имеется три типа страт: точка (чье зацепление есть $(\mathbb{S}^5, \mathcal{Q})$), три цилиндра (чьи зацепления суть $(\mathbb{S}^3, \mathcal{H})$) и регулярная страта. В самом деле, сингулярная часть есть букет $\mathbb{D}^2 \vee \mathbb{D}^2 \vee \mathbb{D}^2$, снабженный слоением, порожденным естественным действием окружности $\mathbb{S}^1$ на каждом диске. Конечная группа $\mathbb{Z}_3$ свободно действует на произведении $\mathbb{S}^3 \times c\mathbb{S}^5$ по формуле

$$e^{2\pi i/3} \cdot ((u_1, u_2), [(u_1, u_2, u_3), t]) = ((u_1, e^{2\pi i/3} \cdot u_2), [(u_3, u_1, u_2), t]).$$

На этом произведении имеется три типа слоев: окружности, торы и трехмерные торы – и три типа страт: $\mathbb{S}^3$, три копии пространства $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1 \times]0, 1[$ и регулярная страта. Заметим, что действие группы $\mathbb{Z}_3$ переставляет три 4-мерных страты. Поскольку это действие сохраняет слоение $\mathcal{H} \times c\mathcal{Q}$, на факторногообразии $M = \mathbb{S}^3 \times_{\mathbb{Z}_3} c\mathbb{S}^5$ получается сингулярное риманово слоение $\mathcal{F}$. На нем тоже имеется три типа слоев: окружности, торы и трехмерные торы – и три типа страт. Минимальная страта S есть линзовое пространство $L(1, 3) = \mathbb{S}^3/\mathbb{Z}^3$, у которого зацепление равно $(L_S, \mathcal{G}) = (\mathbb{S}^5, \mathcal{Q})$. Имеется одна 4-мерная страта, произведение $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1 \times]0, 1[$, у которой зацепление равно $(L_S, \mathcal{G}) = (\mathbb{S}^3, \mathcal{H})$. Последняя страта является регулярной.

Обозначим через B пространство слоев $M/\mathcal{F}$, а через $\pi: M \rightarrow B$ каноническую проекцию. Образ $\pi(S) = L(3, 1)/\mathcal{F} = \mathbb{S}^2/\mathbb{Z}^3$ не является многообразием, а всего лишь орбифолдом.

Здесь уже видно отличие от сингулярных расслоений. Страты не обязательно являются многообразиями, а только орбифолдами (см., например, [8]). Но имеется другое важное отличие, связанное с “зацеплениями”. Естественная проекция $\tau: M \rightarrow S$ является “слоеной” трубчатой окрестностью пространства S со слоем $c\mathbb{S}^5$.

Индуктированное отображение $\sigma: \pi(T) \rightarrow \pi(S)$ является трубчатой окрестностью пространства $\pi(S)$ со слоем факторпространство $(\mathbb{S}^5/\mathcal{G})/\mathbb{Z}_3$. “Зацепление” $L_{\pi(S)}$ в $\pi(S)$ поэтому равно $(\mathbb{S}^5/\mathcal{Q})/\mathbb{Z}_3$. Другими словами, имеет место не $L_{\pi(S)} = L_S/\mathcal{G}$, а $L_{\pi(S)} = (L_S/\mathcal{G})/\mathbb{Z}^3$. Можно показать, что след слоения $\mathcal{F}$ на зацеплении S в точности суть орбиты $\mathbb{Z}^3 \cdot \mathcal{Q}$.

4.2.2. Категория орбифолдов. Предыдущие рассуждения приводят к следующим понятиям. Стратифицированный псевдоорбифолд определяется путем замены “многообразия” на “орбифолд”, а “диффеоморфизма” на “изоморфизм орбифолдов”. Другими словами, *стратифицированный орбифолд* задается с помощью

- паракомпактного пространства X ;
- локально конечного подразделения S_X , называемого *стратификацией*, составленного из связных гладких орбифолдов.

Каждая точка пространства X должна иметь окрестность, гомеоморфную локальной модели $U \times cL$, и должна иметься плотная (*регулярная*) страта R .

Аналогично расширим понятие сингулярного расслоения. Скажем, что коническое слоение $(M, \mathcal{F})$ является *сингулярным расслоением Зейферта*, если для каждой сингулярной страты S слоения $S_{\mathcal{F}}$

- а) ограничение $\pi: S \rightarrow \pi(S)$ является расслоением Зейферта;
- б) зацепление $(\mathbb{S}^n, \mathcal{G})$ страты S является сингулярным расслоением Зейферта;
- с) след слоения $\mathcal{F}$ на S^n задается орбитами $H \cdot \mathcal{G}$, где H есть конечная подгруппа в группе $O(n+1, \mathcal{G}) = O(n+1) \cap \text{Diff}(\mathbb{S}^n, \mathcal{G})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Пространство сингулярного расслоения Зейферта является стратифицированным псевдоорбифолдом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(M, \mathcal{F})$ есть сингулярное расслоение, а B – его пространство слоев. Из [8] известно, что элементы семейства $S_B = \{\pi(S) \mid S \in S_{\mathcal{F}}\}$ являются орбифолдами. Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям предложения 4, получаем, что пространство B паракомпактно, а семейство S_B локально конечно. На первом шаге получаем, что проекция π является расслоением Зейферта, а пространство B является стратифицированным псевдоорбифолдом глубины 0. В общем случае рассмотрим коническую карту (φ, U) в страте S . Локальная модель для точки в образе $\pi(S)$ есть произведение $(\mathbb{R}^p/\Gamma, c(\mathbb{S}^n/\mathcal{G})/H)$, где $\Gamma \subset O(p)$ есть конечная подгруппа, $(\mathbb{S}^n, \mathcal{G})$ есть зацепление в S и $H \subset O(n+1, \mathcal{G})$ есть конечная подгруппа. По индукции получаем, что $\mathbb{S}^n/\mathcal{G}$, а, значит, и $(\mathbb{S}^n/\mathcal{G})/H$ являются стратифицированными псевдоорбифолдами.

4.2.3. Сингулярные римановы слоения. Из [18] (см. также [7]) известно, что каждая страта S сингулярного риманова слоения $(M, \mathcal{F})$ имеет трубчатую поверхность,

называемую *трубчатой окрестностью слоения*, $\tau: T \rightarrow S$ с атласом карт слоения вида $\{\varphi: (\tau^{-1}(U), \mathcal{F}) \rightarrow (U \times {}^c\mathbb{S}^n, \mathcal{F} \times {}^c\mathcal{G})\}$, чья структурная группа есть группа $O(n+1, \mathcal{F}) = \{A \in O(n+1) \mid A \text{ сохраняет } \mathcal{G}\}$. Здесь $(\mathbb{S}^n, \mathcal{G})$ обозначает зацепление в S . Сингулярное риманово слоение представляет пример стратифицированного псевдомногообразия.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Пространство слоев сингулярного риманова слоения с компактными слоями является стратифицированным орбифолдом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(M, \mathcal{F})$ – сингулярное риманово слоение, B – пространство слоев, а $\pi: M \rightarrow B$ – естественная проекция. Поскольку ограничение слоения $\mathcal{F}$ на страту S является римановым слоением с компактными слоями, то ограничение $\pi: S \rightarrow \pi(S)$ является расслоением Зейферта (см. [8]). Таким образом, получается условие а).

Для доказательства условия б) заметим, что $(\mathbb{S}^n, \mathcal{G})$ является сингулярным римановым слоением на многообразии, для которого $\text{depth } S_{\mathcal{G}} < \text{depth } S_{\mathcal{F}}$. Индукцией по глубине стратификации получаем условие б). На первом шаге индукции проекция π в точности является расслоением Зейферта, а предложение превращается в теорему де Рама для орбифолдов.

Слоение $\mathcal{F}$ не всегда индуцирует на страте $\mathbb{S}^n$ слоение $\mathcal{G}$ (см. пример 4.2.1). Рассмотрим трубчатую окрестность $\tau: T \rightarrow S$ слоения со структурной группой $O(n+1, \mathcal{G})$. След слоения $\mathcal{F}$ на слое $\mathbb{S}^n$ задается орбитами $H \cdot \mathcal{G}$, где $H = \{A \in O(n+1, \mathcal{G}), \text{ сохраняющих слои}\}$. Поскольку H сохраняет регулярную страту, то по соображениям размерности получаем, что $\dim H = 0$. Это доказывает свойство с).

Так же, как и в случае тривиальной голономии, базисные кохомологии пересечения обобщают кохомологии пересечения пространства слоев.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $(M, \mathcal{F})$ – сингулярное расслоение Зейферта, а B – пространство слоев. Тогда*

$$\mathbb{H}_{\bar{q}}^*(M/\mathcal{F}) \cong \mathbb{H}_{\bar{p}}^*(B),$$

где $\bar{p}$ и $\bar{q}$ – двойственные функции искажения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следуя доказательству теоремы 1, задача сводится к локальной проблеме на пространстве B . Напомним, что локальной моделью для пространства B служит $(\mathbb{R}^p/\Gamma, c\pi(\mathbb{S}^n)/H)$, где $\Gamma \subset O(p)$ является конечной подгруппой, $(\mathbb{S}^n, \mathcal{G})$ является зацеплением в S , $\pi: \mathbb{S}^n \rightarrow \pi(\mathbb{S}^n)$ обозначает каноническую проекцию, ассоциированную с $\mathcal{G}$, а $H \subset O(n+1, \mathcal{G})$ является конечной подгруппой. Стягивая первый сомножитель, задачу сводим к утверждению

$$H^*(\Omega_{\bar{q}}(\pi(\mathbb{S}^n)/H)) \cong H^*(\text{Hom}(SC_{\bar{p}}(\pi(\mathbb{S}^n)/H), \mathbb{R})).$$

Поскольку $\mathbb{S}^n/\mathcal{G}$ является стратифицированным псевдоорбифолдом, по индукции получаем

$$H^*(\Omega_{\bar{q}}(\pi(\mathbb{S}^n))) \cong H^*(\text{Hom}(SC_{\bar{p}}(\pi(\mathbb{S}^n)), \mathbb{R})). \quad (2)$$

Используя конечность группы H (см. [19]), получаем изоморфизмы с подпространствами неподвижных точек

$$H^*(\Omega_{\bar{q}}(\pi(\mathbb{S}^n)/H)) \cong (H^*(\Omega_{\bar{q}}(\pi(\mathbb{S}^n))))^H$$

и

$$H^*(\mathrm{Hom}(SC_{\overline{P}}^*(\pi(\mathbb{S}^n)/H), \mathbb{R})) \cong (H^*(\mathrm{Hom}(SC_{\overline{P}}^*(\pi(\mathbb{S}^n)), \mathbb{R})))^H.$$

Для завершения доказательства достаточно заметить естественность изоморфизма (2).

Рассмотрим коническое слоение с компактными слоями $\mathcal{F}$ на M , которое мы будем называть *компактным коническим слоением*. Это слоение индуцирует на каждой страте регулярное компактное слоение. С помощью [20], [21] можно сформулировать следующее следствие.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Рассмотрим компактное коническое слоение $(M, \mathcal{F})$, и пусть $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ есть разбиение многообразия M на подмножества, состоящие из точек слоев слоения $\mathcal{F}$ одинаковой размерности. Если выполнено одно из следующих условий:*

- (i) *функция объема слоев ограничена на каждой страте;*
- (ii) *группа голономий слоения, индуцированного на каждую страту, конечна;*
- (iii) *слоение на каждой страте имеет коразмерность 2;*

то пространство слоев B является стратифицированным псевдомногообразием и для любого искажения $\overline{p}$ имеем $\mathbb{H}_{\overline{q}}^(M/\mathcal{F}) \cong \mathbb{H}_{\overline{p}}^*(B)$, где $\overline{q}$ есть искажение, двойственное к $\overline{p}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия (i), (ii) и (iii) обеспечивают то, что слоение в каждой страте является римановым. Поэтому пространство слоев B , снабженное стратификацией $\{\pi(S) \mid S \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}\}$, образует стратифицированное псевдомногообразие. На каждой страте естественная проекция является расслоением Зейферта. Осталось применить теорему 2.

5. Доказательство теоремы 1

Разобьем доказательство на пять шагов.

1) Сведем задачу к вопросу на пространстве слоев B , представляя базисные когомологии пересечения слоения $(M, \mathcal{F})$, используя комплекс дифференциальных форм $\Omega_{\overline{q}}^*(B)$, живущих на $\pi(R)$.

2) Представим гомологии пересечения пространства B , используя комплекс $SC_{*}^{\overline{p}}(B)$ цепей $\overline{p}$ -пересечения.

3) Поскольку эти два комплекса нельзя сравнивать с помощью интегрирования, мы вводим подкомплекс $LC_{*}^{\overline{p}}(B)$ гладких цепей $\overline{p}$ -пересечения.

4) Эти комплексы сравниваются с помощью ограничения

$$\Lambda: \mathrm{Hom}(LC_{*}^{\overline{p}}(B), \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{Hom}(SC_{*}^{\overline{p}}(B), \mathbb{R})$$

и интегрирования

$$\Theta: \Omega_{\overline{q}}^*(B) \rightarrow \mathrm{Hom}(LC_{*}^{\overline{p}}(B), \mathbb{R}).$$

5) Наконец, мы доказываем, что операторы Θ и Λ являются квазиизоморфизмами.

5.1. Комплекс $\Omega_{\overline{q}}^*(B)$. То, что мы собираемся доказать, сводится к сравнению когомологий, определенных на многообразии M , с когомологиями, определенными на B .

Чтобы упростить доказательство, представим базисные когомологии пересечения слоения $(M, \mathcal{F})$ с помощью дифференциальных форм на B . Положим

$$\Omega_q^*(B) = \{\eta \in \Omega^*(\pi(R)) \mid \pi^*\eta \in \Omega_q^*(M/\mathcal{F})\}.$$

Ясно, что дифференциальный оператор $\pi^*: \Omega_q^*(B) \rightarrow \Omega_q^*(M/\mathcal{F})$ является изоморфизмом.

Рассмотрим открытое покрытие $\{V, W\}$ пространства B . Существует подчиненное разбиение единицы с помощью контролируемых функций, т.е. элементов из $\Omega_0^0(B)$ (см. [5]). Значит, покрытие $\{\pi^{-1}(U), \pi^{-1}(V)\}$ является базовым, и из 3.4.1 (b) получаем последовательность Майера–Виториса

$$0 \rightarrow \Omega_q^*(B) \rightarrow \Omega_q^*(V) \oplus \Omega_q^*(W) \rightarrow \Omega_q^*(V \cap W) \rightarrow 0.$$

Для того, чтобы проверить, что дифференциальная форма из $\pi(U \cap R)$ живет на $\Omega_q^*(\pi(U))$, где (φ, U) есть подходящая коническая карта, достаточно смотреть на U , а не на $\pi^{-1}(U)$. Отсюда вытекает дифференциальный изоморфизм

$$\varphi^*: \Omega_q^*(\pi(U)) \rightarrow \Omega_q^*(\mathbb{R}^s \times \pi_{\mathbb{S}^n}(\mathbb{S}^n)), \quad (3)$$

где $\pi(U)$ есть пространство слоев слоения $(\pi^{-1}(\pi(U)), \mathcal{F}_{\pi^{-1}(\pi(U))})$, а $\mathbb{R}^s \times \pi_{\mathbb{S}^n}(\mathbb{S}^n)$ есть пространство слоев $(\mathbb{R}^{m-n-1} \times \mathbb{S}^n, \mathcal{H} \times c\mathcal{G})$.

5.2. Комплекс $SC_*^{\overline{P}}(B)$. Для любого целого i обозначим через $B_i \subset B$ объединение страт размерностей не больше i . Объединение сингулярных страт в B обозначим через Σ_B . Через Δ обозначим симплекс, а через P – призму (т.е. конечное произведение симплексов).

Под *поднимаемой призмой* $\mathbf{c}: P \times \Delta \rightarrow B \times [0, 1]^a$ будем понимать непрерывное отображение, удовлетворяющее следующим двум условиям:

- i) ограничение $\mathbf{c}: P \times \text{int}(\Delta) \rightarrow \pi(R) \times [0, 1]^a$ является гладким;
- ii) каждый элемент $\mathbf{c}^{-1}(B_i \times [0, 1]^a)$ является формой вида $P \times F_i$, где F_i есть грань симплекса Δ .

Поднимаемая призма $\mathbf{c}$ называется *$\overline{P}$ -допустимой*, если она удовлетворяет условию

- iii) $\text{codim}_B \pi(S) \leq \text{codim}_\Delta F_{\dim \pi(S)} + \overline{P}(\pi(S))$ для всех сингулярных страт $\pi(S)$.

Сингулярная цепь ξ называется *цепью $\overline{P}$ -пересечения*, если цепи ξ и $\partial\xi$ составлены из $\overline{P}$ -допустимых симплексов. Через $SC_*^{\overline{P}}(B)$ будем обозначать комплекс цепей $\overline{P}$ -пересечений. Гомологии пересечений $\mathbb{H}_*^{\overline{P}}(B)$ пространства B можно вычислять с помощью комплекса цепей пересечения $SC_*^{\overline{P}}(B)$ (см. [2], [5]).

5.3. Комплекс $LC_*^{\overline{P}}(B)$.

5.3.1. Линейное раздутие. Рассмотрим *разложение* $\Delta = \Delta_0 * \dots * \Delta_k$ симплекса Δ . Можно представлять пространство $P \times \Delta$ в виде *стратифицированной призмы* с сингулярными стратами

$$\{P \times \Delta_0, P \times ((\Delta_0 * \Delta_1) - \Delta_0), \dots, P \times ((\Delta_0 * \dots * \Delta_{k-1}) - (\Delta_0 * \dots * \Delta_{k-2}))\}$$

и регулярной стратой

$$R_{P \times \Delta} = P \times (\Delta - (\Delta_0 * \cdots * \Delta_{k-1})).$$

Глубиной стратифицированной призмы считается $\text{depth}(P \times \Delta) = k$. Для строго положительной глубины произведем десингуляризацию пространства $P \times \Delta$. *Линейным раздутием* пространства $P \times \Delta$ назовем гладкое отображение

$$\mathcal{L}_{P \times \Delta}: (P \times \bar{c}\Delta_0) \times (\Delta_1 * \cdots * \Delta_k) \rightarrow P \times \Delta,$$

определяемое по формуле

$$\mathcal{L}_{P \times \Delta}(x, [x_0, t_0], y) = (x, t_0 x_0 + (1 - t_0)y).$$

Здесь $\bar{c}\Delta_0$ обозначает замкнутый конус $\frac{\Delta_0 \times [0, 1]}{\Delta_0 \times \{0\}}$. Будем писать

$$(P \times \Delta)^{\text{blu}} = (P \times \bar{c}\Delta_0) \times (\Delta_1 * \cdots * \Delta_k),$$

причем правая часть является стратифицированной призмой, у которой

$$\text{depth}(P \times \Delta)^{\text{blu}} < \text{depth}(P \times \Delta).$$

Обратный образ $\mathcal{L}_{P \times \Delta}^{-1}(R_{P \times \Delta}) = R_{(P \times \Delta)^{\text{blu}}} - ((P \times \Delta_0 \times \{1\}) \times (\Delta_1 * \cdots * \Delta_k))$ плотен в $(P \times \Delta)^{\text{blu}}$, а ограничение $\mathcal{L}_{P \times \Delta}: \mathcal{L}_{P \times \Delta}^{-1}(R_{P \times \Delta}) \rightarrow R_{P \times \Delta}$ является диффеоморфизмом. Те же свойства имеют место для $\text{int}(P \times \Delta) \subset R_{P \times \Delta}$, где

$$\mathcal{L}_{P \times \Delta}^{-1}(\text{int}(P \times \Delta)) = \text{int}((P \times \Delta)^{\text{blu}}). \quad (4)$$

Заметим, что если $k = 1$ и $\dim \Delta_1 = 0$, то само отображение $\mathcal{L}_{P \times \Delta}$ является диффеоморфизмом.

5.3.2. Гладкие гомологии пересечения. Поднимаемый симплекс $\mathbf{c}: \Delta \rightarrow B$ порождает естественное разложение симплекса Δ . Рассмотрим семейство индексов $\{i_0, \dots, i_k\}$, удовлетворяющих условию $F_i \neq F_{i-1}$, и обозначим через Δ_j грань симплекса Δ , для которой $F_{i_j} = F_{i_{j-1}}$. Этим определяется на симплексе Δ $\mathbf{c}$ -разложение $\Delta = \Delta_0 * \cdots * \Delta_k$. Тогда $\mathbf{c}^{-1}(\Sigma_B \times [0, 1]^a) = P \times (\Delta_0 * \cdots * \Delta_{k-1})$.

Призма называется *гладкой*, если выполняется условие

iv) существует гладкое отображение $\mathbf{c}: P \times \Delta \rightarrow M \times [0, 1]^a$ такое, что $\pi \circ \mathbf{c} = \mathbf{c}$.

Поскольку $\mathbf{c}^{-1}(\pi(R) \times [0, 1]^a) = R_{P \times \Delta}$, то ограничение $\mathbf{c}: R_{P \times \Delta} \rightarrow R \times [0, 1]^a$ является гладким, и поэтому выполняется более сильное, чем i) условие, а именно

i') ограничение $\mathbf{c}: R_{P \times \Delta} \rightarrow \pi(R) \times [0, 1]^a$ является гладким.

Сингулярная цепь ξ называется *гладкой цепью $\bar{p}$ -пересечения*, если цепи ξ и $\partial\xi$ состоят из гладких $\bar{p}$ -допустимых симплексов. Через $LC_*^{\bar{p}}(B)$ обозначим комплекс гладких цепей $\bar{p}$ -пересечения.

5.4. Операторы Θ и Λ . Естественное вложение $LC^{\overline{P}}_*(B) \hookrightarrow SC^{\overline{P}}_*(B)$ индуцирует дифференциальный оператор

$$\Lambda: \text{Hom}(SC^{\overline{P}}_*(B), \mathbb{R}) \rightarrow \text{Hom}(SC^{\overline{P}}_*(B), \mathbb{R}).$$

Трудность интегрирования дифференциальной формы $\omega \in \Omega^*_q(B)$ по цепи пересечения ξ заключается в том факте, что ω определена только на регулярной страте пространства B , в то время как ξ определена на всем B . По этой причине нам необходимы некоторые предварительные результаты. Линейное раздутие совместимо с барицентрическим подразделением. Пусть ∇ – элемент барицентрического подразделения симплекса Δ . В [22, с. 220] доказано следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Для данного элемента ∇ барицентрического подразделения симплекса Δ и естественного вложения $I: (P \times \nabla)^{\text{blu}} \hookrightarrow (P \times \Delta)^{\text{blu}}$ существует гладкое отображение $I: P \times \nabla \rightarrow P \times \Delta$, удовлетворяющее условию $I \circ \mathcal{L}_{P \times \nabla} = \mathcal{L}_{P \times \Delta} \circ I$.*

5.4.1. Дифференциальные формы на $P \times \Delta$. Через $\Pi^*(P \times \Delta)$ обозначим комплекс поднимаемых форм. Если $\text{depth}(P \times \Delta) = 0$, то полагаем $\Pi^*(P \times \Delta) = \Omega^*(P \times \Delta)$. В общем случае скажем, что дифференциальная форма $\omega \in \Omega^*(R_{P \times \Delta})$ поднимаема, если существует поднимаемая форма $\widehat{\omega} \in \Pi^*(P \times \Delta^{\text{blu}})$, для которой $\mathcal{L}_{P \times \Delta}^* \omega = \widehat{\omega}$ на $\mathcal{L}_{P \times \Delta}^{-1}(R_{P \times \Delta})$. Заметим, что, если $k = 1$ и $\dim \Delta_1 = 0$, то форма ω в действительности определена на $P \times \Delta$. В силу плотности поднятие $\widehat{\omega}$ единственно. Тогда $d\widehat{\omega} = d\omega$. Значит, комплекс $\Pi^*(P \times \Delta)$ дифференциальный. Как обычно, будем писать

$$\int_{P \times \Delta} \omega = \int_{\text{int}(P \times \Delta)} \omega,$$

хотя это не всегда корректно определено. Но в нашем случае имеет место

ЛЕММА А. *Если ω – t -поднимаемая форма, то интеграл $\int_{P \times \Delta} \omega$ конечен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если глубина равна 0, то утверждение очевидно. В общем случае

$$\int_{P \times \Delta} \omega = \int_{\mathcal{L}_{P \times \Delta}^{-1}(\text{int}(P \times \Delta))} \mathcal{L}_{P \times \Delta}^* \omega = \int_{\text{int}(P \times \Delta)} \widehat{\omega} = \int_{P \times \Delta} \widehat{\omega} \quad (5)$$

в силу (4) и $\text{int}(P \times \Delta) \subset R_{P \times \Delta}$. По индукционному предположению это число конечно.

ЛЕММА В. *Пусть $c: P \times \Delta \rightarrow B \times [0, 1]^a$ – гладкая призма. Если $\eta \in \Omega^*(\pi(R) \times [0, 1]^a)$ и $\pi^* \eta \in \Pi^*(M \times [0, 1]^a)$, то $c^* \eta$ поднимаемо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $c^* \eta \in \Omega^*(R_{P \times \Delta})$ (см. i')), достаточно построить поднятие $\widehat{c^* \eta} \in \Pi^*(P \times \Delta)$. Доказательство проведем в несколько шагов.

1) *Локализация пространств M и B .* Заметим, что для любого элемента ∇ барицентрического подразделения симплекса Δ ограничение $c': P \times \nabla \rightarrow B \times [0, 1]^a$ является гладкой призмой. Это утверждение локально. Поэтому мы можем идентифицировать $(M, \mathcal{F}) \equiv (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \times c\mathbb{S}^n, \mathcal{H} \times \mathcal{J} \times c\mathcal{G})$, $B \equiv \mathbb{R}^s \times \pi\mathbb{S}^n(\mathbb{S}^n)$ и предположить, что $\text{Im } c$

meets $\mathbb{R}^{\text{blu}} \times \{\vartheta\} \times [0, 1]^a$. Тогда $\mathbf{c}^{-1}(\mathbb{R}^s \times \{\vartheta\} \times [0, 1]^a) = P \times \Delta_0$. Отметим, что окрестность Δ_0 в симплексе Δ является произведением $\Delta_0 \times c\nabla$, где ∇ – некоторый симплекс. Из леммы 1 получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} P \times \Delta & \xrightarrow{\widehat{\mathbf{c}}} & \mathbb{R}^{m-n-1} \times \mathbb{S}^n \times [0, 1] \times [0, 1]^a \\ \mathcal{L}_{P \times \Delta} \downarrow & & \downarrow P \times \text{Id}_{[0, 1]^a} \\ P \times \Delta & \xrightarrow{\mathbf{c}} & \mathbb{R}^{m-n-1} \times c\mathbb{S}^n \times [0, 1]^a \end{array}, \quad (6)$$

где $\widehat{\mathbf{c}}$ гладко.

II) Раздутье $\mathbf{c}$. Рассмотрим теперь непрерывное отображение

$$\widehat{\mathbf{c}} = \widehat{\pi} \circ \widehat{\mathbf{c}}: P \times \Delta \rightarrow \mathbb{R}^s \times \pi_{\mathbb{S}^n}(\mathbb{S}^n) \times [0, 1]^{a+1},$$

где $\widehat{\pi}: \mathbb{R}^{m-n-1} \times \mathbb{S}^n \times [0, 1]^{a+1} \rightarrow \mathbb{R}^s \times \pi_{\mathbb{S}^n}(\mathbb{S}^n) \times [0, 1]^{a+1}$ есть проекция, определяемая по формуле

$$\widehat{\pi}(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s, \theta, t_0, t_1, \dots, t_a) = (y_1, \dots, y_s, \pi_{\mathbb{S}^n}(\theta), t_0, t_1, \dots, t_a).$$

Покажем, что $\widehat{\mathbf{c}}$ является гладкой призмой.

i) Поскольку $\widehat{\pi}$ и $\widehat{\mathbf{c}}$ являются гладкими, достаточно проверить, что

$$\widehat{\mathbf{c}}^{-1}(\mathbb{R}^s \times \pi_{\mathbb{S}^n}(\Sigma_{\mathcal{G}}) \times [0, 1]^{a+1}) \subset ((P \times \overline{c}\Delta_0) \times ((\Delta_1 * \dots * \Delta_k) - \text{int}(\Delta_1 * \dots * \Delta_k))).$$

Это следует из того, что

$$\begin{aligned} & \widehat{\mathbf{c}}^{-1}\widehat{\pi}^{-1}(\mathbb{R}^s \times \pi_{\mathbb{S}^n}(\Sigma_{\mathcal{G}}) \times [0, 1]^{a+1}) \\ &= \mathcal{L}_{P \times \Delta}^{-1}(P \times (\Delta_0 * \dots * \Delta_{k-1})) \\ &\subset ((P \times \overline{c}\Delta_0) \times ((\Delta_1 * \dots * \Delta_k) - \text{int}(\Delta_1 * \dots * \Delta_k))). \end{aligned}$$

ii) Проводя аналогичные рассуждения, мы получаем

$$\widehat{\mathbf{c}}^{-1}(\mathbb{R}^s \times (\pi_{\mathbb{S}^n}(\mathbb{S}^n))_j \times [0, 1]^{a+1}) = \mathcal{L}_{P \times \Delta}^{-1}(P \times (\Delta_0 * \dots * \Delta_h)) = P \times (\Delta_0 * \dots * \Delta_h)$$

для подходящего $h \in \{1, \dots, k\}$.

iii) На основании построения.

III) Поднятие η . Дифференциальная форма $\pi^*\eta \in \Pi^*(\mathbb{R}^{m-n-1} \times c\mathbb{S}^n \times [0, 1]^a)$ поднимается до дифференциальной формы $\widehat{\pi^*\eta} \in \Pi^*(\mathbb{R}^{m-n-1} \times \mathbb{S}^n \times [0, 1]^{a+1})$. Поскольку форма $\pi^*\eta$ является базисной, а ограничение отображения $P \times \text{Id}_{[0, 1]^a}$ на $\mathbb{R}^{m-n-1} \times R_0 \times [0, 1] \times [0, 1]^a$, где R_0 есть регулярная страта в $\mathbb{S}^{m-n-1}$, является тождественным отображением, то форма $\widehat{\pi^*\eta}$ тоже является базисной. Существует форма $\widehat{\eta} \in \Omega^*(\mathbb{R}^s \times \pi_{\mathbb{S}^n}(R_0) \times [0, 1]^{a+1})$ такая, что $\widehat{\pi^*\eta} = \widehat{\pi^*\eta}$. Тогда дифференциальная форма $\widehat{\eta}$ удовлетворяет условиям леммы.

IV) Заключительный шаг. Проведем индукцию по глубине $\text{depth } \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$. Результат очевиден, когда глубина равна 0, т.е., когда $B = \pi(R)$. В общем случае заметим, что из неравенства $\text{depth } \mathcal{S}_{\mathcal{H} \times \mathcal{G}} < \text{depth } \mathcal{S}_{\mathcal{H} \times c\mathcal{G}}$ следует по предположению индукции, что

форма $\widehat{\mathbf{c}}^*\widehat{\eta}$ поднимаема. Осталось установить, что $\widehat{\mathbf{c}}^*\widehat{\eta} = \widehat{\mathbf{c}}^*\widehat{\eta}$, т.е., что $\mathcal{L}_{P \times \Delta}^* \mathbf{c}^* \eta = \widehat{\mathbf{c}}^* \widehat{\eta}$ на $\mathcal{L}_{P \times \Delta}^{-1}(R_{P \times \Delta})$. Поскольку

$$\mathbf{c} \circ \mathcal{L}_{P \times \Delta} = (P \times \text{Id}_{[0,1]^a}) \circ \widehat{\mathbf{c}},$$

то

$$\mathcal{L}_{P \times \Delta}^* \mathbf{c}^* \eta = \mathcal{L}_{P \times \Delta}^* \mathbf{c}^* \pi^* \eta = \widehat{\mathbf{c}}^* (P \times \text{Id}_{[0,1]^a})^* \pi^* \eta$$

на $\mathcal{L}_{P \times \Delta}^{-1}(R_{P \times \Delta})$. Поскольку форма $\pi^* \eta$ поднимаема, то

$$(P \times \text{Id}_{[0,1]^a})^* \pi^* \eta = \widehat{\pi^* \eta} = \widehat{\pi}^* \widehat{\eta}$$

на $\mathbb{R}^{m-n-1} \times (\mathbb{S}^n - \Sigma_{\mathbb{S}^n}) \times]0, 1[\times [0, 1]^a$.

Таким образом,

$$\mathcal{L}_{P \times \Delta}^* \mathbf{c}^* \eta = \widehat{\mathbf{c}}^* \widehat{\pi}^* \widehat{\eta} = \widehat{\mathbf{c}}^* \widehat{\eta}$$

на $\widehat{\mathbf{c}}^{-1}(\mathbb{R}^{m-n-1} \times (\mathbb{S}^n - \Sigma_{\mathbb{S}^n}) \times]0, 1[\times [0, 1]^a) = \mathcal{L}_{P \times \Delta}^{-1}(R_{P \times \Delta})$.

Для заданной формы $\eta \in \Omega_{\overline{P}}^*(B)$ и гладкого $\overline{P}$ -допустимого симплекса $c: \Delta \rightarrow B$ можно определить интеграл

$$\Theta(\omega)(c) = \int_{\Delta} c^* \eta$$

(см. лемму А и лемму В). Осталось доказать, что оператор

$$\Theta: \Omega_{\overline{Q}}^*(B) \rightarrow \text{Hom}(LC_{*}^{\overline{P}}(B), \mathbb{R})$$

является дифференциальным. Нам нужны некоторые предварительные результаты.

5.4.2. Граница. Имеется два типа граней (корузмерности 1) на симплексе $(P \times \Delta)^{\text{blu}}$:

- T1) грани $(Q \times \nabla)^{\text{blu}}$, где Q есть грань P , а $\nabla = \Delta$, или $Q = P$ и ∇ есть грань Δ ; ограничение $\mathcal{L}_{P \times \Delta}$ является линейным раздутием $\mathcal{L}_{Q \times \nabla}$;
- T2) грань $F_{P \times \Delta} = (P \times \Delta_0 \times \{1\}) \times (\Delta_1 * \dots * \Delta_k)$; ограничение $\mathcal{L}_{P \times \Delta}$ в точности есть каноническая проекция на $P \times \Delta_0$.

Грани типа T1) расположены над границей $P \times \Delta$. Грань же $F_{P \times \Delta}$ является дополнительной гранью, возникающей в результате раздутия. Имеет место формула

$$\partial((P \times \Delta)^{\text{blu}}) = (\partial(P \times \Delta))^{\text{blu}} + F_{P \times \Delta}. \quad (7)$$

5.4.3. Дополнительные дифференциальные формы на $P \times \Delta$. Через $\Gamma^*(P \times \Delta)$ обозначим комплекс *регулярных форм*. Если $\text{depth}(P \times \Delta) = 0$, то полагаем

$$\Gamma^*(P \times \Delta) = \Omega^*(P \times \Delta).$$

В общем случае скажем, что поднимаемая форма $\omega \in \Pi^*(P \times \Delta)$ регулярна, если $\widehat{\omega} \in \Gamma^*(P \times \Delta)$ и ее ограничение на $\text{int } F_{P \times \Delta}$ равно 0. Заметим, что $\Gamma^*(P \times \Delta)$ является дифференциальным комплексом. Из предложения 7 следует, что ограничение регулярной формы на элемент барицентрического подразделения остается регулярным. Для этого вида форм имеет место следующая формула Стокса.

ЛЕММА С. Пусть ω – регулярная форма. Тогда

$$\int_{P \times \Delta} d\omega = \int_{\partial(P \times \Delta)} \omega.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по глубине. Если глубина равна 0, то утверждение очевидно. В общем случае заметим, что форма ω определена на внутренности любой грани F пространства $P \times \Delta$ кроме случая, когда $\dim \Delta_k = 0$ и $F = \Delta_0 * \dots * \Delta_{k-1}$. Но в этом случае форма ω продолжается до формы на $\text{int } F$. Чтобы усмотреть это, применим предложение 7, чтобы свести задачу к симплексу $\Delta = \Delta_0 * \Delta_1$ и $\dim \Delta_1 = 0$. Отображение $\mathcal{L}_{P \times \Delta}$ является диффеоморфизмом, а форма $\widehat{\omega}$ определена всюду; значит, и форма ω всюду определена. Следовательно, оба члена рассматриваемого равенства имеют смысл. По предположению индукции имеем

$$\int_{P \times \Delta} \widehat{d\omega} = \int_{\partial(P \times \Delta)} \widehat{\omega},$$

и поэтому можно применить (7) и (5) и заметить, что форма $\widehat{\omega}$ тривиальна на $F_{P \times \Delta}$.

ЛЕММА D. Пусть $\mathbf{c}: P \times \Delta \rightarrow B \times [0, 1]^a$ есть гладкая $\bar{p}$ -допустимая призма. Если $\eta \in \Omega_{\bar{q}}^*(B)$, то форма $\mathbf{c}^*\eta$ регулярна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку форма $\mathbf{c}^*\eta$ поднимается, нужно только установить, что форма $\widehat{\mathbf{c}^*\eta}$ тривиальна на $\text{int } F_{P \times \Delta}$. Действительно, достаточно доказать, что

$$\widehat{\mathbf{c}^*\eta}(u_1, \dots, u_a, v_1, \dots, v_b, 0, w_1, \dots, w_c) = 0, \quad (8)$$

где $\{u_1, \dots, u_a = \dim P\}$ – касательные векторы к $\text{int } P$, $\{v_1, \dots, v_b = \dim \Delta_0\}$ – касательные векторы к $\text{int } \Delta_0$, а $\{w_1, \dots, w_c = \dim \Delta_1 * \dots * \Delta_k\}$ – касательные векторы к $\text{int}(\Delta_1 * \dots * \Delta_k)$.

Поскольку проблема является локальной, как и прежде, отождествим $(M, \mathcal{F})$ с $(\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \times c\mathbb{S}^n, \mathcal{X} \times \mathcal{I} \times c\mathcal{G})$, $B \subset \mathbb{R}^s \times c\pi_{\mathbb{S}^n}(\mathbb{S}^n)$, $S \subset \mathbb{R}^{m-n-1} \times \{\vartheta\}$ и предположим, что $\text{Im } \mathbf{c}$ пересекает $\mathbb{R}^{\text{blu}} \times \{\vartheta\} \times [0, 1]^a$. Тогда $\mathbf{c}^{-1}(\mathbb{R}^s \times \{\vartheta\} \times [0, 1]^a) = P \times \Delta_0$. Тогда диаграмма (6) примет вид

$$\begin{array}{ccc} F_{P \times \Delta} & \xrightarrow{\widehat{\mathbf{c}}} & \mathbb{R}^{m-n-1} \times \mathbb{S}^n \times \{0\} \times [0, 1]^a \\ \mathcal{L}_{P \times \Delta} \downarrow & & \downarrow P \times \text{Id}_{[0, 1]^a} \\ P \times \Delta_0 & \xrightarrow{\mathbf{c}} & \mathbb{R}^{m-n-1} \times \{\vartheta\} \times [0, 1]^a \end{array}.$$

Здесь $\mathcal{L}_{P \times \Delta}(x_1, \dots, x_a, y_1, \dots, y_b, 0, z_1, \dots, z_c) = (x_1, \dots, x_a, y_1, \dots, y_b)$. Призма $\widehat{\mathbf{c}}$ удовлетворяет условию i'), и поэтому отображение $\widehat{\mathbf{c}}$ отображает $\text{int } F_{P \times \Delta}$ в $\mathbb{R}^{m-n-1} \times (\mathbb{S}^n - \Sigma_{c\mathcal{G}}) \times \{0\} \times [0, 1]^a$. Поскольку $\widehat{\mathbf{c}} = \widehat{\pi} \circ \widehat{\mathbf{c}}$ и $\widehat{\pi}^*\widehat{\eta} = \widehat{\pi^*\eta}$, условие (8) эквивалентно

$$\widehat{\pi^*\eta}(\widehat{\mathbf{c}}_*u_1, \dots, \widehat{\mathbf{c}}_*u_a, \widehat{\mathbf{c}}_*v_1, \dots, \widehat{\mathbf{c}}_*v_b, 0, \widehat{\mathbf{c}}_*w_1, \dots, \widehat{\mathbf{c}}_*w_c) = 0.$$

Поскольку

$$\text{codim}_{\Delta} F_{\dim \pi(S)} = \text{codim}_{\Delta} F_s = \text{codim}_{\Delta} \Delta_0 = c + 1,$$

из условия iv) следует, что

$$c \geq \operatorname{codim}_B \pi(S) - \overline{p}(\pi(S)) - 1 = \overline{q}(\pi(S)) + 1 > \overline{q}(\pi(S)).$$

Наконец, поскольку $(\mathcal{L}_{P \times \Delta})_* w_j = 0$, вектор $\widehat{c}_* w_j$ принадлежит пространству $\mathbb{R}^{m-n-1} \times (\mathbb{S}^n - \Sigma_{\mathcal{G}}) \times \{0\} \times [0, 1]^a$, касающемуся слоев $(P \times \operatorname{Identity})_{[0, 1]^a}$, и поэтому получаем результат.

Леммы C и D показывают, что оператор $\Theta: \Omega_{\overline{q}}^*(B) \rightarrow \operatorname{Hom}(LC_{*}^{\overline{p}}(B), \mathbb{R})$ является дифференциальным оператором.

5.5. Квазиизоморфизмы Θ и Λ . Рассмотрим утверждение $Q(B)$ о пространстве слоев сингулярного расслоения:

$$Q(B) = \text{“}\Omega_{\overline{q}}^*(B) \xrightarrow{\Theta} \operatorname{Hom}(LC_{*}^{\overline{p}}(B), \mathbb{R}) \xleftarrow{\Lambda} \operatorname{Hom}(SC_{*}^{\overline{p}}(B), \mathbb{R}) \\ \text{являются квазиизоморфизмами”},$$

и докажем его, используя трюк Брэдона [23, с. 289].

ТРЮК БРЭДОНА. Пусть X – паракомпактное топологическое пространство, $\{U_{\alpha}\}$ – открытое покрытие, замкнутое относительно конечных пересечений. Предположим, что $Q(U)$ есть утверждение об открытых подмножествах пространства X , удовлетворяющих следующим трем свойствам:

- (BT1) утверждение $Q(U_{\alpha})$ справедливо для любого α ;
- (BT2) из справедливости утверждений $Q(U)$, $Q(V)$ и $Q(U \cap V)$ следует справедливость утверждения $Q(U \cup V)$, где U и V – открытые подмножества пространства X ;
- (BT3) из справедливости утверждений $Q(U_i)$ следует справедливость утверждения $Q(\bigcup_i U_i)$, где $\{U_i\}$ есть дизъюнктное семейство открытых подмножеств в X .

Тогда утверждение $Q(X)$ справедливо.

Проведем доказательство индукцией по глубине $\operatorname{depth} S_{\mathcal{F}}$. Если глубина равна 0, то утверждение $Q(B)$ есть обычная теорема де Рама. Предположим, что утверждение $Q(B)$ доказано, когда $\operatorname{depth} S_{\mathcal{F}} < \ell$. Далее рассмотрим несколько шагов.

(i) Пусть слоение $(M, \mathcal{F})$ равно $(\mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^v \times cS^w, \mathcal{H} \times \mathcal{I} \times c\mathcal{G})$, где $\mathcal{H}$ есть слоение с одним слоем, $\mathcal{I}$ есть слоение, состоящее из точек, и $(S^v, \mathcal{G})$ есть сингулярное слоение, для которого $\operatorname{depth} S_{\mathcal{G}} < \ell$.

Используя каноническую проекцию $\operatorname{Pr}: \mathbb{R}^v \times c\pi_{S^w}(S^w) \rightarrow c\pi_{S^w}(S^w)$, ограниченную на регулярную часть, получаем, что $\operatorname{Pr}^*: \Omega_{\overline{q}}^*(c\pi_{S^w}(S^w)) \rightarrow \Omega_{\overline{q}}^*(\mathbb{R}^v \times c\pi_{S^w}(S^w))$ есть квазиизоморфизм (см. предложение 2 и (6)). Следуя рассуждениям работы [22], доказываем, что операторы

$$\operatorname{Pr}^*: \operatorname{Hom}(SC_{*}^{\overline{p}}(c\pi_{S^w}(S^w)), \mathbb{R}) \rightarrow \operatorname{Hom}(SC_{*}^{\overline{p}}(\mathbb{R}^v \times c\pi_{S^w}(S^w)), \mathbb{R})$$

и

$$\operatorname{Pr}^*: \operatorname{Hom}(LC_{*}^{\overline{p}}(c\pi_{S^w}(S^w)), \mathbb{R}) \rightarrow \operatorname{Hom}(LC_{*}^{\overline{p}}(\mathbb{R}^v \times c\pi_{S^w}(S^w)), \mathbb{R})$$

являются квазиизоморфизмами. Поскольку отображение Pr^* коммутирует с Θ и Λ , то

$$Q(c\pi_{S^w}(S^w)) \implies Q(\mathbb{R}^v \times c\pi_{S^w}(S^w)).$$

Остается доказать утверждение $Q(c\pi_{S^w}(S^w))$.

Из предложения 3 и (6) следует, что каноническая проекция

$$\text{Pr}: (S^w - \Sigma_{\mathcal{G}}) \times]0, 1[\rightarrow (\mathbb{S}^n - \Sigma_{\mathcal{G}})$$

индуцирует квазиизоморфизм

$$\mathbb{H}_{\overline{q}}^i(c\pi_{S^w}(S^w)) = \begin{cases} \mathbb{H}_{\overline{p}}^i(\pi_{S^w}(S^w)) & \text{при } i \leq \overline{q}(\{\vartheta\}), \\ 0 & \text{при } i > \overline{q}(\{\vartheta\}). \end{cases}$$

Следуя рассуждениям работы [22], доказываем, что отображение Pr^* индуцирует квазиизоморфизмы

$$H^i(LC_{*}^{\overline{p}}(c\pi_{S^w}(S^w))) = \begin{cases} H^i(LC_{*}^{\overline{p}}(\pi_{S^w}(S^w))) & \text{при } i \leq k - 1 - \overline{p}(\{\vartheta\}), \\ 0 & \text{при } i > k - 1 - \overline{p}(\{\vartheta\}), \end{cases}$$

и

$$H^i(SC_{*}^{\overline{p}}(c\pi_{S^w}(S^w))) = \begin{cases} H^i(SC_{*}^{\overline{p}}(\pi_{S^w}(S^w))) & \text{при } i \leq k - 1 - \overline{p}(\{\vartheta\}), \\ 0 & \text{при } i > k - 1 - \overline{p}(\{\vartheta\}), \end{cases}$$

где $k = \dim \pi_{S^w}(S^w)$. Далее, поскольку Θ и Λ коммутируют с Pr^* , достаточно применить утверждение $Q(\pi_{S^w}(S^w))$ и принять во внимание, что искажения $\overline{p}$ и $\overline{q}$ на пространстве B двойственны.

(ii) Пусть слоение $(M, \mathcal{F})$ является открытым подмножеством в $(\mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^v \times cS^w, \mathcal{K} \times \mathcal{I} \times c\mathcal{G})$, где $\mathcal{K}$ есть слоение с одним слоем, $\mathcal{I}$ есть слоение, состоящее из точек, а $(S^v, \mathcal{G})$ есть сингулярное расслоение глубины $\text{depth } S_{\mathcal{G}} < \ell$.

Поскольку пространство B паракомпактно, то применяем трюк Брэдона к покрытию

$$\begin{aligned} & \{V \times c_{\varepsilon} \pi_{S^w}(S^w) \mid V =]a_1, b_1[\times \cdots \times]a_v, b_v[\subset \mathbb{R}^v, \varepsilon \in [0, 1[\} \\ & \cup \{ \pi(U) \mid U \subset \mathbb{R}^{u+v} \times S^w \times]0, 1[\text{ открыто} \}, \end{aligned}$$

где $c_{\varepsilon} \pi_{S^w}(S^w) = \pi_{S^w}(S^w) \times [0, \varepsilon[/ \pi_{S^w}(S^w) \times \{0\}$. Это семейство замкнуто по отношению к конечным пересечениям. Проверка условий (BT1)–(BT3) очевидна.

(iii) Пусть глубина слоения $(M, \mathcal{F})$ равна ℓ .

Поскольку пространство B паракомпактно, применим трюк Брэдона к следующему покрытию:

$$\begin{aligned} & \{V \subset B \mid V \text{ открытое подмножество в } \pi(U), \\ & \text{где } (\varphi, U) \text{ есть хорошая коническая карта} \}. \end{aligned}$$

Это семейство замкнуто по отношению к конечным пересечениям и выполняются условия (BT1)–(BT3).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Goresky M., MacPherson R. Intersection homology theory // *Topology*. 1980. V. 19. P. 135–162.
- [2] King H. Topology invariance of intersection homology without sheaves // *Topology Appl.* 1985. V. 20. P. 149–160.
- [3] MacPherson R. Intersection homology and perverse sheaves // *Colloquium Lectures. Annual Meeting of AMS. San Francisco, June 1991*.
- [4] Brylinsky J. L. Equivariant intersection cohomology // *Contemp. Math.* 1992. V. 132. P. 5–32.
- [5] Saralegi M. Homological properties of stratified spaces // *Illinois J. Math.* 1994. V. 38. P. 47–70.
- [6] Verona A. Le théorème de Rham pour les préstratifications abstraites // *C. R. Acad. Sci. Paris*. 1971. V. 273. P. 886–889.
- [7] Saralegi M., Wolak R. Basic intersection cohomology for singular riemanian foliations. Preprint.
- [8] Molino P. Riemannian Foliations // *Progress in Math.* V. 73. Basel: Birkhäuser, 1988.
- [9] Wolak R. Pierrot's theorem for singular Riemannian foliations // *Publ. Matem.* 1994. V. 38. P. 433–439.
- [10] Bauer M. Feuilletage singulier défini par une distribution presque régulière // *Collect. Math.* 1986. V. 37. № 3. P. 189–209.
- [11] Stefan P. Accesible sets, orbits, and foliations with singularities // *Proc. London Math. Soc.* 1974. V. 29. P. 699–713.
- [12] Sussmann H. J. Orbit of families of vector fields and integrability of distributions // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1973. V. 180. P. 171–188.
- [13] Vaisman I. Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds // *Progress in Math.* V. 118. Basel: Birkhäuser, 1994.
- [14] Ви́фля́нцев В. П. Теорема Фробениуса для распределений с особенностями // *УМН*. 1977. Т. 32. № 5. С. 177–178.
- [15] Ви́фля́нцев В. П. Теорема Фробениуса для дифференциальных систем с особенностями // *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.* 1980. Т. 106. № 3. С. 11–14.
- [16] Davis M. Smooth G -manifolds as collections of fibre bundles // *Pacific J. Math.* 1978. V. 77. P. 315–363.
- [17] Nguyen Tien Zung Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems, II: Topological classification. Preprint: Université Montpellier II, 2001.
- [18] Boualem H., Molino P. Modeles locaux satures de feuilletages Riemanniens singuliers // *C. R. Acad. Sci. Paris*. 1993. V. 316. P. 913–916.
- [19] Bredon G. E. Introduction to Compact Transformation Groups // *Pure Appl. Math.* V. 46. New York: Acad. Press, 1972.
- [20] Epstein D. B. A. Foliations with all leaves compact // *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*. 1976. V. 26. P. 265–282.
- [21] Edwards R. D., Millet K. C., Sullivan D. Foliations with all leaves compact // *Topology*. 1977. V. 16. P. 13–32.
- [22] Brasselet J. P., Hector G., Saralegi M. Theoreme de Rham pour les varietes stratifiees // *Ann. Global Anal. Geom.* 1991. V. 9. P. 211–243.
- [23] Bredon G. E. Topology and Geometry // *Graduate Text in Math.* V. 139. Berlin: Springer, 1993.

(М. Саралеги-Арангурен) Университет д'Артуа, Франция
 (Р. Волак) Ягеллонский университет, г. Краков, Польша

Поступило
 17.09.2002