Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Тихонов, Ю. С. Эйдельман, Критерий единственности в обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения с нестационарным неоднородным слагаемым, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 2, 273–290

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2489>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 14:14:59

УДК 517.95

КРИТЕРИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С НЕСТАЦИОНАРНЫМ НЕОДНОРОДНЫМ СЛАГАЕМОМ

И. В. Тихонов, Ю. С. Эйдельман

В банаховом пространстве E рассматривается обратная задача $du(t)/dt = Au(t) + \varphi(t)p$, $u(0) = u_0$, $u(T) = u_1$, с неизвестной функцией $u(t)$ и элементом $p \in E$. Оператор A предполагается линейным и замкнутым. В работе указаны минимальные ограничения на функцию $\varphi \in C([0, T])$, при которых единственность решения обратной задачи полностью выражается в терминах собственных значений оператора A .

Библиография: 25 названий.

1. Предварительные рассуждения. Пусть E – комплексное банахово пространство. Пусть A – линейный замкнутый оператор в E с областью определения $D(A) \subset E$, не обязательно плотной в E . Фиксируем число $T > 0$ и выберем функцию $\varphi \in C([0, T])$, отличную от тождественного нуля.

Рассмотрим абстрактное дифференциальное уравнение:

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + \varphi(t)p, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

с неизвестным элементом $p \in E$. Для одновременного нахождения $u(t)$, p зададим условия

$$u(0) = u_0, \quad u(T) = u_1, \quad u_0, u_1 \in D(A). \quad (2)$$

Указанную задачу (1), (2) будем называть *обратной задачей*.

Решением обратной задачи (1), (2) считаем пару $(u(t), p)$, где $u: [0, T] \rightarrow E$, $p \in E$. Функция $u(t)$ предполагается непрерывно дифференцируемой в норме E на отрезке $[0, T]$, ее значения принадлежат $D(A)$ при $0 \leq t \leq T$. Все соотношения (1), (2) должны выполняться.

Обратная задача (1), (2) допускает разные интерпретации. Можно считать, например, что мы восстанавливаем в уравнении (1) неточно заданное неоднородное слагаемое $\varphi(t)p$ при помощи дополнительных “краевых” условий (2). Можно считать, что мы подбираем элемент $p \in E$ так, чтобы перевести систему из начального состояния u_0 в заданное финальное состояние u_1 .

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00638.

Подобные обратные задачи хорошо известны в литературе; обширная библиография имеется в [1]. Отметим, что в предыдущих работах исследования проводились при тех или иных ограничениях на оператор A . Например, предполагалось, что A самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве [2]–[4]; что A порождает соответствующую полугруппу [5]–[9]; что A допускает манипуляции с преобразованием Фурье [10], [11], и т.д.

Недавно авторы наметили новый подход. Выяснилось, что в вопросах единственности решения для обратной задачи (1), (2) соображения, связанные с природой оператора A , могут быть не слишком существенны. В [12], [13] рассмотрен случай $\varphi(t) \equiv 1$; в [14] – случай монотонного поведения $\varphi(t)$. Было показано, что в этих ситуациях единственность решения обратной задачи полностью определяется расположением на плоскости $\mathbb{C}$ собственных значений оператора A . Цель настоящей работы – распространить результаты [12]–[14] на общий случай функции $\varphi \in C([0, T])$.

Так как нас интересует единственность решения, заменим условия (2) однородными условиями

$$u(0) = 0, \quad u(T) = 0. \quad (3)$$

Обратная задача (1), (3) всегда имеет тривиальное решение $u(t) \equiv 0, p = 0$. Покажем, что при определенном выборе A и $\varphi(t)$ обратная задача (1), (3) будет заведомо иметь другие, нетривиальные решения.

Введем целую функцию

$$\Phi(\lambda) = \int_0^T e^{-\lambda t} \varphi(t) dt, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (4)$$

Функция $\Phi(\lambda)$ является конечным преобразованием Лапласа для $\varphi(t)$. Назовем $\Phi(\lambda)$ *характеристической функцией* обратной задачи (1), (2) (и задачи (1), (3)). Так как $\varphi(t) \not\equiv 0$, то функция $\Phi(\lambda)$ ($\neq 0$) имеет счетное множество различных нулей $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{C}$ (см. [15, с. 107]). Обозначим это множество Λ_Φ , т.е. $\Lambda_\Phi = \{\lambda_k\}$. Считаем, что нули занумерованы целочисленным индексом k без учета кратности; система нумерации может зависеть от $\Phi(\lambda)$.

Предположим, что некоторый нуль $\lambda_k \in \Lambda_\Phi$ является собственным значением оператора A с собственным вектором f_k , т.е. $Af_k = \lambda_k f_k$ для элемента $f_k \in D(A)$, $f_k \neq 0$. Непосредственно проверяется, что пара

$$u(t) = \int_0^t e^{\lambda_k(t-s)} \varphi(s) f_k ds, \quad p = f_k, \quad (5)$$

служит нетривиальным решением однородной обратной задачи (1), (3). Следовательно, единственность решения неоднородной задачи (1), (2) здесь нарушается.

Итак, для единственности решения обратной задачи необходимо потребовать, чтобы ни один нуль λ_k характеристической функции (4) не являлся собственным значением оператора A . Выделим это предположение особо.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что в обратной задаче (1), (2) (или в задаче (1), (3)) *выполняется предположение* (Λ), если ни один нуль $\lambda_k \in \Lambda_\Phi$ характеристической функции $\Phi(\lambda)$ из формулы (4) не является собственным значением оператора A .

Предположение (Λ) необходимо для единственности решения задачи (1), (2). Есть ситуации, когда оно оказывается достаточным. Так будет в гильбертовом пространстве E для самосопряженного полуограниченного оператора A (см. [4]). Укажем на другой специальный случай, который понадобится нам в п. 3.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $A: E \rightarrow E$ – линейный ограниченный оператор в банаховом пространстве E . Пусть $\varphi \in C([0, T])$ и $\varphi(t) \not\equiv 0$ на $[0, T]$. Если выполняется предположение (Λ) , то однородная обратная задача (1), (3) имеет только тривиальное решение $u(t) \equiv 0$, $p = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнено предположение (Λ) , и $(u(t), p)$ – решение однородной обратной задачи (1), (3). Запишем $u(t)$ через операторную экспоненту:

$$u(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} \varphi(s) p \, ds = e^{At} \int_0^t e^{-As} \varphi(s) p \, ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Так как $u(T) = 0$, то элемент p принадлежит ядру оператора

$$B = \int_0^T e^{-As} \varphi(s) \, ds.$$

Применим операторное исчисление для линейных ограниченных операторов в банаховом пространстве [16, гл. 5, § 1]. Оператор B совпадает с $\Phi(A)$ для целой функции $\Phi(\lambda)$ из формулы (4). Так как $\varphi(t) \not\equiv 0$ на $[0, T]$, то $\Phi(\lambda) \not\equiv 0$ в плоскости $\mathbb{C}$. По теореме об отображении спектра [16, теорема 5.12.2] оператор $B = \Phi(A)$ имеет ненулевое ядро тогда и только тогда, когда $\Phi(\alpha) = 0$ для некоторого собственного значения $\alpha \in \mathbb{C}$ оператора A . Но в силу предположения (Λ) ни один нуль λ_k функции $\Phi(\lambda)$ не является собственным значением оператора A . Значит, оператор B имеет нулевое ядро. Поэтому $p = 0$ и $u(t) \equiv 0$ на $[0, T]$. Теорема доказана.

В общем случае линейного замкнутого оператора A и произвольной непрерывной функции $\varphi(t) \not\equiv 0$ одно только предположение (Λ) становится уже недостаточным для единственности решения обратной задачи (1), (2).

ПРИМЕР 1. Фиксируем $T > 0$ и малое $\varepsilon > 0$ так, чтобы $T - \varepsilon > 0$. Рассмотрим модельную обратную задачу для уравнения в частных производных

$$\begin{cases} u_t(x, t) = -u_x(x, t) + \varphi(t)p(x), & 0 \leq x \leq \varepsilon, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(0, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u(x, T) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Считаем, что $E = C([0, \varepsilon])$ и $A = -d/dx$ на области определения

$$D(A) = \{f \in C^1([0, \varepsilon]) : f(0) = 0\}.$$

Оператор A не имеет собственных значений в E . Предположение (Λ) для него всегда выполняется.

Выберем функцию $\varphi \in C([0, T])$ так, чтобы $\varphi(t) > 0$ при $0 \leq t < T - \varepsilon$ и $\varphi(t) \equiv 0$ при $T - \varepsilon \leq t \leq T$. Пусть $p(x)$ – произвольная функция из $D(A)$, отличная от тождественного нуля. Определим для $(x, t) \in [0, \varepsilon] \times [0, T]$ функцию $u(x, t)$ по формуле

$$u(x, t) = \begin{cases} \int_0^t \varphi(s)p(x-t+s) ds, & x-t \geq 0, \\ \int_{t-x}^t \varphi(s)p(x-t+s) ds, & x-t \leq 0. \end{cases}$$

Пара функций $(u(x, t), p(x))$ удовлетворяет соотношениям (6) и служит нетривиальным решением соответствующей абстрактной задачи (1), (3). При проверке равенства $u(x, T) = 0$ надо учесть, что

$$u(x, T) = \int_{T-x}^T \varphi(s)p(x-T+s) ds,$$

где $\varphi(s) \equiv 0$ на $[T-x, T]$, ибо $[T-x, T] \subset [T-\varepsilon, T]$. Итак, для обратной задачи (1), (3) в данной модели (6) имеет место неединственность решения, несмотря на выполнение предположения (Λ).

Придадим идее примера другую, абстрактную формулировку.

Пусть $[0, T]$ – произвольный отрезок. Выберем функцию $\varphi(t) \not\equiv 0$ так, чтобы она обращалась в тождественный нуль в малой окрестности $[T-\varepsilon, T]$ точки $t = T$. Выберем оператор A так, чтобы он порождал C_0 полугруппу $U(t)$ со свойством $U(t) \equiv 0$ при $t \geq \varepsilon$. Такой оператор A не имеет собственных значений в E (см. [16, с. 552]), и предположение (Λ) для него выполняется. Решение неоднородной задачи Коши

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + \varphi(t)p, \quad 0 \leq t \leq T, \quad u(0) = 0,$$

записывается через полугруппу:

$$u(t) = \int_0^t U(t-s)\varphi(s)p ds = \int_0^t \varphi(s)U(t-s)p ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

При $t = T$ имеем

$$u(T) = \int_0^T \varphi(s)U(T-s)p ds.$$

Функция $U(T-s)p$ может быть отличной от нуля лишь при $T-\varepsilon \leq s \leq T$. Но здесь обращается в нуль функция $\varphi(s)$. Поэтому $u(T) = 0$ при любом выборе элемента $p \neq 0$. Получаем бесконечно много нетривиальных решений однородной обратной задачи (1), (3).

Нетрудно построить аналогичный пример, основанный на обращении в нуль функции $\varphi(t)$ в окрестности точки $t = 0$. Достаточно в предыдущем рассуждении сделать замену t на $T-t$ и рассмотреть полученную задачу с оператором $A_1 = -A$ и функцией $\varphi_1(t) = -\varphi(T-t)$.

Итак, если мы хотим для произвольного оператора A охарактеризовать единственность решения обратной задачи (1), (2) при помощи предположения (Λ), то необходимо потребовать, чтобы функция $\varphi(t)$ не обращалась тождественно в нуль ни в одной из окрестностей точек $t = 0$ и $t = T$. Используем краткую запись:

$$\int_0^\varepsilon |\varphi(t)| dt > 0, \quad \int_{T-\varepsilon}^T |\varphi(t)| dt > 0 \quad \text{для любого малого } \varepsilon > 0. \quad (7)$$

Будем называть условия (7) *соотношениями невырожденности на краях*.

Теперь мы можем окончательно сформулировать интересующий нас

ВОПРОС. Что нужно добавить к соотношениям (7) для того, чтобы единственность решения обратной задачи (1), (2) полностью выражалась предположением (Λ)?

Дальнейший план статьи следующий. В п. 2 выделены наиболее естественные условия, добавляемые к (7), при которых справедлив критерий единственности. Показано, что для функции $\varphi \in C([0, T])$ годится любое из предположений:

- (i) $\varphi(0) \neq 0, \varphi(T) \neq 0$ (здесь (7) выполнено автоматически);
- (ii) $\varphi(t)$ имеет ограниченную вариацию на $[0, T]$, и хотя бы одно из значений $\varphi(0)$ или $\varphi(T)$ отлично от нуля (на другом краю выполняется соответствующее соотношение (7)).

В данный момент мы не знаем, можно ли в условии (ii) отказаться от требования ограниченной вариации $\varphi(t)$ так, чтобы условие (i) стало не нужным. Но возможно, что такой факт содержится в скрытой форме в следующем п. 3. Здесь получен общий критерий единственности решения, использующий понятие дефектного значения d_φ , определяемого функцией $\varphi(t)$. Для справедливости критерия достаточно предположения $d_\varphi < \infty$. Подсчет значения d_φ нетривиален. Этот вопрос отдельно рассматривается в п. 4. Показано, что результаты п. 2 могут быть выведены из общего критерия, даже с определенными усилениями. Затем в п. 5 мы устанавливаем, что одних соотношений невырожденности (7) все же недостаточно для справедливости критерия единственности. Построен контрпример для функции $\varphi \in C^\infty([0, T])$, строго положительной в интервале $(0, T)$ и имеющей нули бесконечного порядка при $t = 0$ и $t = T$. Здесь $d_\varphi = \infty$. Картина в определенном смысле замыкается. Пример использует идею предыдущей работы одного из авторов [14]. Некоторые особенности примера обсуждаются далее в п. 6. Последний п. 7 посвящен заключительным замечаниям.

2. Критерий единственности – специальные случаи. Условия (i) и (ii), рассматриваемые в данном пункте, выделены по следующим причинам. Во-первых, они удобны для приложений – их проверка элементарна. Во-вторых, прямое доказательство здесь более наглядно, и рассуждения данного пункта все равно потребуются в п. 4 для сведения теоремы 2 к общему случаю $d_\varphi < \infty$ (см. доказательство леммы 5).

Сформулируем точный результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть A – линейный замкнутый оператор в банаховом пространстве E . Пусть $\varphi \in C([0, T])$ и выполнены соотношения невырожденности (7). Пусть, сверх того, выполняется любое из предположений:

- (i) $\varphi(0) \neq 0, \varphi(T) \neq 0$;
- (ii) функция $\varphi(t)$ имеет ограниченную вариацию на $[0, T]$, и хотя бы одно из значений $\varphi(0)$ или $\varphi(T)$ отлично от нуля.

Тогда для того чтобы однородная обратная задача (1), (3) имела только тривиальное решение $u(t) \equiv 0, p = 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось предположение (Λ): ни один нуль $\lambda_k \in \Lambda_\Phi$ характеристической функции $\Phi(\lambda)$ из формулы (4) не является собственным значением оператора A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение о необходимости предположения (Λ) установлено в п. 1. Действительно, если некоторый нуль $\lambda_k \in \Lambda_\Phi$ является собственным значением оператора A с собственным вектором $f_k \neq 0$, то формула (5) дает нетривиальное решение задачи (1), (3).

Будем доказывать достаточность. Пусть выполнено предположение (Λ): ни один нуль $\lambda_k \in \Lambda_\Phi$ характеристической функции $\Phi(\lambda)$ не является собственным значением оператора A . Рассмотрим решение $(u(t), p)$ однородной обратной задачи (1), (3) и покажем, что $u(t) \equiv 0, p = 0$. Для удобства чтения и ссылок некоторые “замкнутые” пункты доказательства выделим в виде вспомогательных лемм.

ЛЕММА 1. Пусть A – линейный замкнутый оператор в E , и $\varphi \in C([0, T])$. Пусть пара $(u(t), p)$ является решением однородной обратной задачи (1), (3). Введем характеристическую функцию $\Phi(\lambda)$ по формуле (4) и рассмотрим векторную целую функцию

$$f(\lambda) = \int_0^T e^{-\lambda t} u(t) dt, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (8)$$

Если для задачи (1), (3) выполнено предположение (Λ), то всякий нуль $\lambda_k \in \Lambda_\Phi$ характеристической функции $\Phi(\lambda)$ является нулем не меньшей кратности для векторной целой функции $f(\lambda)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим оператор A к функции $f(\lambda)$ из формулы (8) и воспользуемся тем, что $(u(t), p)$ – решение однородной обратной задачи (1), (3). Имеем

$$\begin{aligned} Af(\lambda) &= \int_0^T e^{-\lambda t} Au(t) dt = \int_0^T e^{-\lambda t} (u'(t) - \varphi(t)p) dt = \int_0^T e^{-\lambda t} u'(t) dt - \Phi(\lambda)p \\ &= \lambda \int_0^T e^{-\lambda t} u(t) dt - \Phi(\lambda)p = \lambda f(\lambda) - \Phi(\lambda)p. \end{aligned}$$

Так как оператор A замкнут, то полученное соотношение

$$Af(\lambda) = \lambda f(\lambda) - \Phi(\lambda)p, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (9)$$

можно дифференцировать по λ . При последовательном дифференцировании имеем

$$Af^{(k)}(\lambda) = \lambda f^{(k)}(\lambda) + k f^{(k-1)}(\lambda) - \Phi^{(k)}(\lambda)p, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Рассмотрим какой-нибудь нуль λ_k характеристической функции $\Phi(\lambda)$. По предположению (Λ) число λ_k не является собственным значением оператора A . Подставим $\lambda = \lambda_k$ в соотношение (9). Видим, что $f(\lambda_k) = 0$. Если λ_k – кратный нуль $\Phi(\lambda)$, то при подстановке в (10) заключаем по индукции, что λ_k будет нулем не меньшей кратности для векторной целой функции $f(\lambda)$. Лемма 1 доказана.

Заменим теперь векторную ситуацию скалярной. Подействуем на функцию $f(\lambda)$ из формулы (8) линейным непрерывным функционалом $f^* \in E^*$. Обозначим

$$\Psi(\lambda) = f^*(f(\lambda)), \quad \psi(t) = f^*(u(t)).$$

Тогда $\Psi(\lambda)$ – обычная целая функция переменной $\lambda \in \mathbb{C}$, а $\psi(t)$ – непрерывная скалярная функция на $[0, T]$, причем

$$\Psi(\lambda) = \int_0^T e^{-\lambda t} \psi(t) dt, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (11)$$

Более того, так как $u(t)$ – первая компонента решения $(u(t), p)$ однородной обратной задачи (1), (3), то

$$\psi \in C^1([0, T]), \quad \psi(0) = \psi(T) = 0. \quad (12)$$

Для $\lambda \Psi(\lambda)$ получаем соотношение

$$\lambda \Psi(\lambda) \equiv \lambda \int_0^T e^{-\lambda t} \psi(t) dt = \int_0^T e^{-\lambda t} \psi'(t) dt, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (13)$$

с непрерывной функцией $\psi'(t)$.

Заметим, что при взятии функционала f^* нули функции $f(\lambda)$ не исчезают и их кратности не уменьшаются. Поэтому при выполненном предположении (A) на основании леммы 1 всякий нуль $\lambda_k \in \Lambda_\Phi$ характеристической функции $\Phi(\lambda)$ будет нулем не меньшей кратности для функции $\Psi(\lambda) = f^*(f(\lambda))$. Иначе говоря, отношение

$$Q(\lambda) \equiv \frac{\Psi(\lambda)}{\Phi(\lambda)} = \frac{\int_0^T e^{-\lambda t} \psi(t) dt}{\int_0^T e^{-\lambda t} \varphi(t) dt} \quad (14)$$

определяет целую функцию переменной $\lambda \in \mathbb{C}$. Используя (13), получаем другую запись:

$$Q(\lambda) = \frac{\lambda \Psi(\lambda)}{\lambda \Phi(\lambda)} = \frac{\int_0^T e^{-\lambda t} \psi'(t) dt}{\lambda \int_0^T e^{-\lambda t} \varphi(t) dt}. \quad (15)$$

Дальнейший анализ отношений (14), (15) основан на известном “методе частных” [17, с. 540–542, с. 606–607]. Здесь мы во многом следуем работе [18]. Чтобы сделать изложение более ясным, приведем все основные моменты рассуждений. Наши формулировки не являются самыми общими – их лишь достаточно для доказательства основной теоремы 2. Нужные сведения из теории целых функций см. в [15], [17].

ЛЕММА 2. Пусть $\varphi \in C([0, T])$ и выполнены соотношения невырожденности (7). Пусть $\psi \in C([0, T])$ – другая функция. Зададим преобразования Лапласа $\Phi(\lambda)$, $\Psi(\lambda)$ по формулам (4), (11) соответственно. Предположим, что их отношение (14) определяет целую функцию $Q(\lambda)$. Тогда $Q(\lambda)$ есть функция порядка не выше первого и минимального типа. Если, дополнительно, $|Q(\lambda)| \rightarrow 0$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$ вдоль некоторой прямой в плоскости $\mathbb{C}$, то

$$Q(\lambda) \equiv 0 \quad \text{при всех } \lambda \in \mathbb{C}.$$

В таком случае $\Psi(\lambda) \equiv 0$ при всех $\lambda \in \mathbb{C}$ и $\psi(t) \equiv 0$ при всех $t \in [0, T]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим индикаторы целых функций

$$h_\Phi(\theta) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |\Phi(re^{i\theta})|}{r}, \quad h_\Psi(\theta) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |\Psi(re^{i\theta})|}{r}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Функции $\Phi(\lambda)$, $\Psi(\lambda)$ являются конечными преобразованиями Лапласа. Как отмечено в [15, с. 109–110], у их индикаторов для п.в. θ существует не только верхний, но

и обычный предел. Поэтому индикатор частного (14) равен разности индикаторов $h_\Psi(\theta) - h_\Phi(\theta)$. С помощью элементарных оценок проверяется, что

$$h_\Psi(\theta) \leq \frac{T}{2}(|\cos \theta| - \cos \theta) \equiv \begin{cases} 0, & \cos \theta \geq 0, \\ -T \cos \theta, & \cos \theta < 0. \end{cases}$$

Для $\Phi(\lambda)$ справедливо равенство

$$h_\Phi(\theta) = \frac{T}{2}(|\cos \theta| - \cos \theta), \quad (16)$$

так как по условию функция $\varphi(t)$ удовлетворяет соотношениям невырожденности (7). Равенство (16) в предположении (7) доказано в классической работе [19, с. 287–290]; эквивалентное утверждение в терминах индикаторной диаграммы см. в [18, с. 96]; исчерпывающее изложение вопроса имеется в [15, с. 99–110].

Для индикатора целой функции $Q(\lambda) = \Psi(\lambda)/\Phi(\lambda)$ получаем

$$h_Q(\theta) = h_\Psi(\theta) - h_\Phi(\theta) \leq \frac{T}{2}(|\cos \theta| - \cos \theta) - \frac{T}{2}(|\cos \theta| - \cos \theta) = 0.$$

Максимум индикатора совпадает с типом целой функции [17, с. 98]. Поэтому функция $Q(\lambda)$ имеет порядок не выше первого и минимальный тип. Всякая такая функция, ограниченная на некоторой прямой, есть тождественная константа [17, с. 71]. Константа, стремящаяся к нулю, есть тождественный нуль. Далее все очевидно. Лемма 2 доказана.

Покажем теперь, что в условиях теоремы 2 функция $Q(\lambda)$ ведет себя так, как надо для леммы 2, в предположении (i) – на горизонтальной прямой $\operatorname{Im} \lambda = 0$, а в предположении (ii) – на некоторой вертикальной прямой $\operatorname{Re} \lambda = a$.

ЛЕММА 3. Пусть $\varphi \in C([0, T])$, $\varphi(0) \neq 0$, $\varphi(T) \neq 0$. Пусть $\psi \in C([0, T])$, $\psi(0) = \psi(T) = 0$. Зададим преобразования Лапласа $\Phi(\lambda)$, $\Psi(\lambda)$ по формулам (4), (11) соответственно и предположим, что их отношение (14) определяет целую функцию $Q(\lambda)$. Тогда

$$|Q(x)| \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Элементарно проверяется (см. также [20, с. 33]), что любая функция $\nu \in C([0, T])$ удовлетворяет соотношению

$$x \int_0^T e^{-xt} \nu(t) dt \rightarrow \nu(0) \quad \text{при } x \rightarrow +\infty.$$

Отсюда при $x \rightarrow +\infty$ следует, что

$$Q(x) = \frac{x\Psi(x)}{x\Phi(x)} = \frac{x \int_0^T e^{-xt} \psi(t) dt}{x \int_0^T e^{-xt} \varphi(t) dt} \rightarrow \frac{\psi(0)}{\varphi(0)} = 0,$$

$$Q(-x) = \frac{xe^{-xT}\Psi(-x)}{xe^{-xT}\Phi(-x)} = \frac{x \int_0^T e^{-x(T-t)} \psi(t) dt}{x \int_0^T e^{-x(T-t)} \varphi(t) dt} = \frac{x \int_0^T e^{-xs} \psi(T-s) ds}{x \int_0^T e^{-xs} \varphi(T-s) ds} \rightarrow \frac{\psi(T)}{\varphi(T)} = 0.$$

Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. Пусть $\varphi \in C([0, T])$, причем $\varphi(t)$ имеет ограниченную вариацию на $[0, T]$ и хотя бы одно из значений $\varphi(0)$ или $\varphi(T)$ отлично от нуля. Пусть $\psi \in C^1([0, T])$, $\psi(0) = \psi(T) = 0$. Зададим преобразования Лапласа $\Phi(\lambda)$, $\Psi(\lambda)$ по формулам (4), (11) соответственно и предположим, что их отношение (14) определяет целую функцию $Q(\lambda)$. Тогда существует такое $a \in \mathbb{R}$, что $|Q(a + iy)| \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$, $y \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi(0) \neq 0$. Проинтегрируем по частям:

$$\lambda \Phi(\lambda) = \lambda \int_0^T e^{-\lambda t} \varphi(t) dt = \varphi(0) - e^{-\lambda T} \varphi(T) + \int_0^T e^{-\lambda t} d\varphi(t).$$

Рассмотрим функцию $\lambda \Phi(\lambda)$ на некоторой прямой $\operatorname{Re} \lambda = a > 0$. Разбив интеграл Стильтеса на два, получим оценку

$$\begin{aligned} |\lambda \Phi(\lambda)| &\geq |\varphi(0)| - |e^{-\lambda T} \varphi(T)| - \left| \int_0^\varepsilon e^{-\lambda t} d\varphi(t) \right| - \left| \int_\varepsilon^T e^{-\lambda t} d\varphi(t) \right| \\ &\geq |\varphi(0)| - e^{-aT} |\varphi(T)| - \operatorname{Var}\{\varphi(t)\}|_0^\varepsilon - e^{-a\varepsilon} \operatorname{Var}\{\varphi(t)\}|_\varepsilon^T. \end{aligned}$$

Выберем $\varepsilon > 0$ достаточно малым, а затем a достаточно большим и добьемся того, чтобы на прямой $\operatorname{Re} \lambda = a$ выполнялось соотношение $|\lambda \Phi(\lambda)| \geq \beta$ с некоторой константой $\beta > 0$. Рассмотрим функцию $Q(\lambda)$ в записи (15). Пусть $\lambda = a + iy$. Тогда

$$|Q(\lambda)| = \frac{|\lambda \Psi(\lambda)|}{|\lambda \Phi(\lambda)|} \leq \frac{1}{\beta} \left| \int_0^T (e^{-at} \psi'(t)) e^{-iyt} dt \right| \rightarrow 0 \quad \text{при } y \rightarrow \infty.$$

Построенная прямая $\operatorname{Re} \lambda = a$ является искомой. Случай $\varphi(T) \neq 0$ легко сводится к предыдущему. Лемма 4 доказана.

Завершим доказательство теоремы 2. Напомним, что рассматривается функция $\psi(t) = f^*(u(t))$, где $(u(t), p)$ – решение однородной обратной задачи (1), (3). Функция $\psi(t)$ удовлетворяет условиям (12). Исходя из предположения (A), заключаем с учетом леммы 1, что функция $Q(\lambda)$ в формуле (14) является целой. Так как для $\varphi(t)$ выполняется условие (i) или (ii) теоремы 2, то по соответствующей лемме 3 или 4 будем иметь, что $|Q(\lambda)| \rightarrow 0$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$ вдоль некоторой прямой в плоскости $\mathbb{C}$. Отсюда на основании леммы 2 заключаем, что $\psi(t) = f^*(u(t)) \equiv 0$ на $[0, T]$. Выбор функционала f^* был произвольным. По теореме Хана–Банаха $u(t) \equiv 0$ на $[0, T]$. Но тогда и $p = 0$. Решение обратной задачи (1), (3) оказывается тривиальным. Теорема доказана.

Рассмотрим для примера следствие теоремы 2 для знакопостоянной функции $\varphi(t)$. Аналогичные утверждения отмечались ранее лишь в случае, когда к оператору A была применима техника Фурье (см., например, [2], [10]). Другие достаточные признаки единственности, основанные на монотонности функции $\varphi(t)$, см. в [14].

СЛЕДСТВИЕ. Пусть A – линейный замкнутый оператор в E без комплексных собственных значений (т.е. из равенства $Af = \lambda f$ следует либо $f = 0$, либо $\lambda \in \mathbb{R}$). Пусть $\varphi \in C([0, T])$, $\varphi(t) \geq 0$ всюду на $[0, T]$, причем $\varphi(0) > 0$, $\varphi(T) > 0$. Тогда однородная обратная задача (1), (3) имеет только тривиальное решение $u(t) \equiv 0$, $p = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2 в части (i). Так как $\varphi(t) \geq 0$, то нули характеристической функции $\Phi(\lambda)$ являются комплексными (невещественными). Но у оператора A нет комплексных собственных значений. По теореме 2 получаем требуемый результат.

3. Критерий единственности: обобщение. Дадим обобщение критерия единственности в терминах некоторого дефектного значения d_φ , связанного с функцией $\varphi(t)$. Начнем с соответствующих определений.

Фиксируем отрезок $[0, T]$. Пусть $\varphi \in C([0, T])$, $\varphi(t) \not\equiv 0$ на $[0, T]$. Рассмотрим множество нулей $\Lambda_\Phi = \{\lambda_k\}$ преобразования Лапласа $\Phi(\lambda)$ из формулы (4). Пусть m_k – кратность нуля λ_k . Сопоставим каждому нулю λ_k показательную функцию $e^{-\lambda_k t}$. Если $m_k \geq 2$, добавим “присоединенные” функции $te^{-\lambda_k t}, \dots, t^{m_k-1}e^{-\lambda_k t}$. Построенную систему функций по всем нулям $\lambda_k \in \Lambda_\Phi$ обозначим $\mathcal{E}_\varphi$. Таким образом,

$$\mathcal{E}_\varphi = \bigcup_{\lambda_k \in \Lambda_\Phi} \{e^{-\lambda_k t}, \dots, t^{m_k-1}e^{-\lambda_k t}\}. \quad (17)$$

Система $\mathcal{E}_\varphi$ содержит все показательные и присоединенные к ним функции такие, что мера $\varphi(t) dt$ ортогональна системе $\mathcal{E}_\varphi$.

Точнее понятие “ортогональности” вводится так. Для функции $\psi \in C([0, T])$ будем говорить, что мера $\psi(t)dt$ ортогональна системе $\mathcal{E}_\varphi$, если выполняются соотношения

$$\int_0^T t^j e^{-\lambda_k t} \psi(t) dt = 0, \quad \lambda_k \in \Lambda_\Phi, \quad j = 0, \dots, m_k - 1.$$

Коротко записываем так: $\psi(t) dt \perp \mathcal{E}_\varphi$.

Очевидно, что $\varphi(t) dt \perp \mathcal{E}_\varphi$. Рассмотрим линейное подпространство

$$Z_\varphi = \{\psi \in C([0, T]) : \psi(t) dt \perp \mathcal{E}_\varphi\}, \quad Z_\varphi \subset C([0, T]).$$

Пространство Z_φ является неким “ортогональным дополнением” к системе $\mathcal{E}_\varphi$ (порожденной, в свою очередь, функцией $\varphi(t)$). Для характеристики размерности ортогонального дополнения используют понятие “дефекта”. Это объясняет следующую терминологию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Дефектным значением функции $\varphi(t)$ назовем величину

$$d_\varphi \equiv \dim Z_\varphi$$

(линейную размерность пространства Z_φ).

Вопрос о вычислении d_φ обсуждается далее в п. 4. Сейчас лишь отметим, что $1 \leq d_\varphi \leq \infty$. Соотношение $d_\varphi \geq 1$ очевидно, ибо $\varphi \in Z_\varphi$ и, значит, $Z_\varphi \neq \{0\}$. Соотношение $d_\varphi = \infty$ не исключается (см. п. 4). Особо подчеркнем, что понятие дефектного значения d_φ привязано к фиксированному отрезку $[0, T]$, изменение которого не допускается.

Самого определения d_φ достаточно для доказательства следующего критерия.

ТЕОРЕМА 3. Пусть A – линейный замкнутый оператор в банаховом пространстве E . Пусть $\varphi \in C([0, T])$, $\varphi(t) \not\equiv 0$ на $[0, T]$. Предположим, что

$$d_\varphi \equiv \dim Z_\varphi < \infty.$$

Тогда для того чтобы однородная обратная задача (1), (3) имела только тривиальное решение $u(t) \equiv 0$, $p = 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось предположение (Λ) : ни один нуль $\lambda_k \in \Lambda_\Phi$ характеристической функции $\Phi(\lambda)$ из формулы (4) не является собственным значением оператора A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость получается так же, как в теореме 2, ссылкой на формулу (5). Доказываем достаточность. Пусть ни один нуль $\lambda_k \in \Lambda_\Phi$ характеристической функции $\Phi(\lambda)$ не является собственным значением оператора A . Рассмотрим решение $(u(t), p)$ однородной обратной задачи (1), (3) и покажем, что $u(t) \equiv 0$, $p = 0$.

Для функционала $f^* \in E^*$ положим $\psi(t) \equiv f^*(u(t))$. Тогда $\psi \in C([0, T])$. По формуле (11) введем преобразование Лапласа $\Psi(\lambda)$. Так же, как в п. 2, из леммы 1 следует, что всякий нуль λ_k характеристической функции $\Phi(\lambda)$ будет нулем не меньшей кратности для $\Psi(\lambda)$. Поэтому $\psi(t) dt \perp \mathcal{E}_\varphi$. Но тогда функция $\psi(t) = f^*(u(t))$ принадлежит Z_φ при любом выборе функционала $f^* \in E^*$. По условию $d_\varphi \equiv \dim Z_\varphi < \infty$. Выведем отсюда, что функция $u(t)$ является конечномерной, т. е. что все ее значения принадлежат конечномерному подпространству пространства E .

Фиксируем подпространство $E_0 \equiv \text{span}\{u(t) : 0 \leq t \leq T\}$ – линейную оболочку значений функции $u(t)$ (множество конечных линейных комбинаций, составленных из этих значений). Тогда $u(t) \in E_0 \subset E$ при каждом $t \in [0, T]$. Из определения E_0 вытекает также включение $E_0 \subset D(A)$. Покажем, что $\dim E_0 \leq d_\varphi$.

Пусть $\dim E_0 > d_\varphi \equiv d$. Тогда существуют элементы $u(t_1), \dots, u(t_d), u(t_{d+1})$, линейно независимые в пространстве E . Рассмотрим биортогональную систему функционалов $f_1^*, \dots, f_d^*, f_{d+1}^* \in E^*$:

$$f_k^*(u(t_j)) = \delta_{kj}, \quad k, j = 1, \dots, d, d+1.$$

Функции $\psi_k(t) = f_k^*(u(t))$, $k = 1, \dots, d, d+1$, принадлежат Z_φ и являются линейно независимыми, ибо $\dim Z_\varphi = d_\varphi \equiv d$. Следовательно, существует набор констант $\alpha_1, \dots, \alpha_d, \alpha_{d+1}$ такой, что $\sum |\alpha_k| > 0$ и

$$\alpha_1 f_1^*(u(t)) + \dots + \alpha_d f_d^*(u(t)) + \alpha_{d+1} f_{d+1}^*(u(t)) \equiv 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Подставляя значения $t = t_j$, получаем $\alpha_j = 0$ для $j = 1, \dots, d, d+1$. Противоречие с условием $\sum |\alpha_k| > 0$ показывает невозможность допущения $\dim E_0 > d_\varphi$.

Итак, $\dim E_0 \leq d_\varphi < \infty$. Значения функции $u(t)$ принадлежат конечномерному подпространству E_0 пространства E . В силу конечномерности подпространство E_0 замкнуто в E и, значит, этому же подпространству принадлежат значения производной $u'(t)$. Рассмотрим теперь элемент p – второй компонент решения $(u(t), p)$ обратной задачи (1), (3). Покажем, что $p \in E_0$.

Вновь будем рассуждать “от противного”. Пусть $p \notin E_0$. Тогда $p \neq 0$ и, значит, $u(t) \not\equiv 0$ на $[0, T]$. Поэтому $\dim E_0 = n$ для $1 \leq n \leq d_\varphi$. Выберем базис $e_1, \dots, e_n$ в E_0 . Система векторов $e_1, \dots, e_n, p$ линейно независима в E . Рассмотрим систему функционалов $e_1^*, \dots, e_n^*, p^* \in E^*$, биортогональную к системе $e_1, \dots, e_n, p$. Положим

$\nu_k(t) = e_k^*(u(t))$, $k = 1, \dots, n$. Все функции $\nu_k(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[0, T]$, $\nu'_k(t) = e_k^*(u'(t))$. Запишем разложения по базису:

$$u(t) = \nu_1(t)e_1 + \dots + \nu_n(t)e_n, \quad u'(t) = \nu'_1(t)e_1 + \dots + \nu'_n(t)e_n. \quad (18)$$

Подставим разложения (18) в соотношения (1), (3). Имеем

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n \nu'_k(t)e_k = \sum_{k=1}^n \nu_k(t)Ae_k + \varphi(t)p, & 0 \leq t \leq T, \\ \nu_1(0)e_1 + \dots + \nu_n(0)e_n = \nu_1(T)e_1 + \dots + \nu_n(T)e_n = 0. \end{cases}$$

Поддействуем на полученную систему функционалами $e_1^*, \dots, e_n^*$. Для краткости обозначим $a_{jk} = e_j^*(Ae_k)$. Имеем набор соотношений

$$\begin{cases} \nu'_j(t) = \sum_{k=1}^n a_{jk}\nu_k(t) + 0, & 0 \leq t \leq T, \quad j = 1, \dots, n, \\ \nu_j(0) = \nu_j(T) = 0, & j = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (19)$$

Соотношения (19) представляют собой линейную однородную систему ОДУ с нулевыми граничными условиями на обоих краях. Ясно, что $\nu_j(t) \equiv 0$ на $[0, T]$ для $j = 1, \dots, n$. Но тогда из (18) следует, что $u(t) \equiv 0$ на $[0, T]$. Подставив в уравнение (1), получаем $p = 0$, что противоречит допущению $p \notin E_0$. Значит, допущение неверно, и $p \in E_0$.

Итак, $u(t), u'(t), p \in E_0$. Но тогда $Au(t) = u'(t) - \varphi(t)p \in E_0$ при $0 \leq t \leq T$. Отсюда $A(E_0) \subset E_0$, т.е. подпространство $E_0 = \text{span}\{u(t)\}$ инвариантно относительно оператора A . Обозначим $A_0 \equiv A|_{E_0}$ – сужение оператора A на конечномерное подпространство E_0 . Оператор $A_0: E_0 \rightarrow E_0$ ограничен, предположение (A) для него сохраняется. Пара $(u(t), p)$ будет решением конечномерной обратной задачи

$$\frac{du(t)}{dt} = A_0 u(t) + \varphi(t)p, \quad 0 \leq t \leq T, \quad u(0) = u(T) = 0, \quad (20)$$

рассматриваемой в пространстве E_0 . По теореме 1 обратная задача (20) с ограниченным оператором A_0 имеет только тривиальное решение $u(t) \equiv 0, p = 0$. Теорема доказана.

Для применения полученной теоремы 3 надо рассмотреть вопрос о вычислении дефектного значения d_φ .

4. О дефектном значении d_φ . Всюду по-прежнему считаем, что $\varphi \in C([0, T])$, $\varphi(t) \not\equiv 0$ на $[0, T]$. Понятия $\Phi(\lambda)$, $\mathcal{E}_\varphi$, Z_φ , d_φ определяем, как в п. 3. Для произвольной функции $\psi \in C([0, T])$ вводим преобразование Лапласа $\Psi(\lambda)$ по формуле (11). Из определения Z_φ легко выводится, что $\psi \in Z_\varphi$ тогда и только тогда, когда всякий нуль $\lambda_k \in \Lambda_\Phi$ функции $\Phi(\lambda)$ является нулем не меньшей кратности для функции $\Psi(\lambda)$. Другими словами, отношение $\Psi(\lambda)/\Phi(\lambda)$ должно определять целую функцию $Q(\lambda)$. Этот удобный критерий принадлежности $\psi(t)$ пространству Z_φ используется далее без оговорок.

Сопоставим полученные теоремы 2 и 3 с точки зрения дефектного значения d_φ .

ЛЕММА 5. Пусть $\varphi \in C([0, T])$ и выполнены соотношения невырожденности (7). Пусть, сверх того, выполняется любое из предположений (i) или (ii) теоремы 2. Тогда $d_\varphi \equiv \dim Z_\varphi = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $d_\varphi > 1$. Значит, пространство Z_φ содержит функцию $\psi \in C([0, T])$, линейно независимую с функцией $\varphi(t)$. Отношение преобразований Лапласа $\Psi(\lambda)/\Phi(\lambda)$ будет определять целую функцию $Q(\lambda)$, отличную от тождественной константы. По лемме 2 функция $Q(\lambda)$ имеет порядок не выше первого и минимальный тип. У такой функции заведомо есть нули (например, на основании классической теоремы Адамара [17, с. 38]). Пусть λ_0 – нуль функции $Q(\lambda)$. Тогда λ_0 будет нулем функции $\Psi(\lambda) = Q(\lambda)\Phi(\lambda)$. Определим новую функцию

$$\psi_1(t) = \int_0^t e^{\lambda_0(t-s)} \psi(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Здесь $\psi_1 \in C^1([0, T])$, $\psi_1(0) = \psi_1(T) = 0$, т.е. для функции $\psi_1(t)$ выполнены соотношения (12). (Равенство $\psi_1(T) = 0$ следует из того, что λ_0 есть нуль функции $\Psi(\lambda)$.) Рассмотрим преобразование Лапласа:

$$\Psi_1(\lambda) = \int_0^T e^{-\lambda t} \psi_1(t) dt = \int_0^T e^{-\lambda t} \left(\int_0^t e^{\lambda_0(t-s)} \psi(s) ds \right) dt.$$

После элементарных подсчетов получим $\Psi_1(\lambda) = \Psi(\lambda)/(\lambda - \lambda_0)$. Таким образом, отношение $Q_1(\lambda) \equiv \Psi_1(\lambda)/\Phi(\lambda) = Q(\lambda)/(\lambda - \lambda_0)$ есть целая функция переменной λ . Теперь в предположении (i) воспользуемся леммой 3, а в предположении (ii) – леммой 4. Применим эти леммы к функции $\psi_1(t)$, после чего по лемме 2 $\psi_1(t) \equiv 0$ на $[0, T]$. Но тогда $\psi(t) = \psi_1'(t) - \lambda_0 \psi_1(t) \equiv 0$ на $[0, T]$, что противоречит выбору $\psi(t)$. Следовательно, предположение $d_\varphi > 1$ невозможно, и $d_\varphi = 1$. Лемма доказана.

Из леммы 5 следует, что теорема 2 включается в общую теорему 3 на правах частного случая с $d_\varphi = 1$. Покажем, что с помощью теоремы 3 можно еще ослабить условие (i) теоремы 2. Воспользуемся одним результатом Любича [18, с. 101], изучавшего вопрос о вычислении дефектного значения d_φ в более широкой (необязательной для наших целей) постановке. Получим следующее утверждение для обратной задачи.

ТЕОРЕМА 4. Пусть A – линейный замкнутый оператор в банаховом пространстве E . Пусть $\varphi \in C([0, T])$ и выполнены соотношения

$$\varphi(t) \sim C_0 t^{\alpha_0}, \quad \varphi(T-t) \sim C_1 t^{\alpha_1} \quad \text{при } t \rightarrow 0+ \quad (21)$$

с константами $C_k \neq 0$, $\alpha_k \geq 0$ для $k = 0, 1$. Тогда $d_\varphi < \infty$ и однородная обратная задача (1), (3) удовлетворяет требованиям теоремы 3. Следовательно, для того чтобы обратная задача (1), (3) имела только тривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось предположение (A).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Надо показать, что $d_\varphi < \infty$. Сведем ситуацию к схеме работы [18]. Рассмотрим функцию

$$\mu(t) = \int_0^t \varphi(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

По правилу Лопиталя из (21) выводятся соотношения

$$\mu(t) - \mu(0) \sim \frac{C_0}{\alpha_0 + 1} t^{\alpha_0 + 1}, \quad \mu(T) - \mu(T - t) \sim \frac{C_1}{\alpha_1 + 1} t^{\alpha_1 + 1}, \quad t \rightarrow 0 +.$$

Применим к мере $d\mu(t) = \varphi(t) dt$ теорему 3 работы [18]. Получим, что ортогональное дополнение $\mathcal{E}_\varphi^\perp$ к системе $\mathcal{E}_\varphi$ в пространстве $(C([0, T]))^*$ имеет конечную размерность, не превосходящую меньшего из чисел $[\alpha_0] + 2$ или $[\alpha_1] + 2$. Пространство Z_φ вкладывается в $\mathcal{E}_\varphi^\perp$ при отображении $\psi \rightarrow \psi(t) dt$. Следовательно, $d_\varphi \equiv \dim Z_\varphi \leq \dim \mathcal{E}_\varphi^\perp < \infty$. Остальное очевидно. Теорема доказана.

Итак, если на краях – при $t = 0$ и $t = T$ – функция $\varphi(t)$ имеет нули не выше конечного порядка, то $d_\varphi < \infty$. Такие функции образуют весьма широкий класс, удобный для приложений. Но случай $d_\varphi = \infty$ тоже не исключается. Так будет, например, всякий раз, когда для $\varphi(t)$ не выполняется хотя бы одно соотношение невырожденности (7). Это нетрудно заметить, сравнивая выводы примера 1 и теорему 3. Для полноты изложения приведем явный пример, не ссылающийся на предыдущие результаты.

ПРИМЕР 2. Пусть функция $\varphi(t)$ не удовлетворяет какому-то условию (7), например, при $t = T$. Тогда $\varphi(t) \equiv 0$ на промежутке $[T - \varepsilon, T]$ с некоторым малым $\varepsilon > 0$. Для $h \in (0, \varepsilon)$ рассмотрим функцию

$$\psi_h(t) = \begin{cases} \int_0^t \varphi(s) ds, & 0 \leq t \leq h, \\ \int_{t-h}^t \varphi(s) ds, & h \leq t \leq T. \end{cases}$$

Непрерывность $\psi_h(t)$ на $[0, T]$ очевидна. Вычислим преобразование Лапласа:

$$\Psi_h(\lambda) = \int_0^T e^{-\lambda t} \psi_h(t) dt = \int_0^h e^{-\lambda t} \left(\int_0^t \varphi(s) ds \right) dt + \int_h^T e^{-\lambda t} \left(\int_{t-h}^t \varphi(s) ds \right) dt.$$

После элементарных подсчетов с учетом того, что $\varphi(t) \equiv 0$ на $[T - h, T]$, получим

$$\Psi_h(\lambda) = \frac{1 - e^{-h\lambda}}{\lambda} \Phi(\lambda).$$

Отношение $\Psi_h(\lambda)/\Phi(\lambda)$ определяет целую функцию $(1 - e^{-h\lambda})/\lambda$. Поэтому $\psi_h \in Z_\varphi$ при любом $h \in (0, \varepsilon)$. Функций $\psi_h(t)$ бесконечно много. Все они линейно независимы в $C([0, T])$. Последнее следует, например, из того, что правая граница носителя функции $\psi_h(t)$ сдвигается вправо при росте h . Таким образом, пространство Z_φ бесконечномерно и $d_\varphi \equiv \dim Z_\varphi = \infty$. Аналогично рассматривается случай, когда (7) не выполняется при $t = 0$.

Итак, соотношения невырожденности (7) необходимы для $d_\varphi < \infty$. Необходимы, но еще не достаточны.

ПРИМЕР 3 (Любич [18, с. 95]). Пусть $\varphi \in C^\infty([0, T])$, $\varphi(t) > 0$ при $0 < t < T$ и $\varphi^{(n)}(0) = \varphi^{(n)}(T) = 0$ при $n = 0, 1, 2, \dots$. Соотношения (7) здесь выполняются. Отношение преобразования Лапласа для $\varphi^{(n)}(t)$ к преобразованию Лапласа для $\varphi(t)$ есть целая функция λ^n , что следует из очевидного тождества

$$\int_0^T e^{-\lambda t} \varphi^{(n)}(t) dt = \lambda^n \int_0^T e^{-\lambda t} \varphi(t) dt.$$

Поэтому пространство Z_φ кроме самой функции $\varphi(t)$ содержит все ее производные. Функции $\varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n)}(t), \dots$ линейно независимы в пространстве $C([0, T])$, так как в противном случае функция $\varphi(t)$ была бы решением линейного однородного ОДУ с нулевыми условиями Коши. Таким образом, $d_\varphi \equiv \dim Z_\varphi = \infty$.

Ключевая особенность примера 3 состоит в том, что на краях – при $t = 0$ и $t = T$ – функция $\varphi(t)$ имеет нули бесконечного порядка. Такие функции не подпадают под действие теоремы 4. Это неслучайное обстоятельство. Покажем, что для обратной задачи (1), (2) с функцией $\varphi(t)$ из примера 3 единственность решения может уже не выражаться предположением (A).

5. Пример обратной задачи для $d_\varphi = \infty$. Рассмотрим банахово пространство $E = C([0, 1])$ с обычной суп-нормой. Фиксируем натуральное $N \geq 2$ и зададим оператор $A = d^N/dx^N$ на области определения

$$D(A) = \{f \in C^N([0, 1]) : f(0) = f'(0) = \dots = f^{(N-1)}(0) = 0\}. \quad (22)$$

Непосредственно проверяется, что A – линейный замкнутый оператор в E , не имеющий собственных значений. Его резольвента $(\lambda - A)^{-1}$ определена всюду в $\mathbb{C}$. Запишем через свертку:

$$(\lambda - A)^{-1}g(x) = - \int_0^x y(x-s, \lambda)g(s) ds = - \int_0^x y(s, \lambda)g(x-s) ds, \quad g \in E, \quad (23)$$

где $y(x, \lambda)$ – решение задачи Коши

$$\frac{d^N y}{dx^N} = \lambda y, \quad y(0) = \dots = y^{(N-2)}(0) = 0, \quad y^{(N-1)}(0) = 1,$$

с параметром $\lambda \in \mathbb{C}$. Функция $y(x, \lambda)$ выражается в виде

$$y(x, \lambda) = \frac{x^{N-1}}{(N-1)!} + \lambda \frac{x^{2N-1}}{(2N-1)!} + \lambda^2 \frac{x^{3N-1}}{(3N-1)!} + \dots = x^{N-1} Y_N(\lambda x^N),$$

где

$$Y_N(z) = \frac{1}{(N-1)!} + \frac{z}{(2N-1)!} + \frac{z^2}{(3N-1)!} + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(mN + N)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Функция $Y_N(z)$ совпадает с целой функцией типа Миттаг-Леффлера $E_{1/N}(z; N)$, имеющей порядок $\rho = 1/N < 1$ (см. [21]).

Выберем функцию $\varphi(t)$ на некотором отрезке $[0, T]$ со следующими свойствами:

- 1) $\varphi \in C^\infty([0, T])$, $\varphi(t) > 0$ на $(0, T)$, $\varphi^{(k)}(0) = \varphi^{(k)}(T) = 0$ при $k = 0, 1, 2, \dots$;
- 2) производные функции $\varphi(t)$ удовлетворяют оценкам

$$|\varphi^{(k)}(t)| \leq 2^k (k!)^{3/2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (24)$$

Существование таких $\varphi(t)$ доказывается в теории квазианалитических функций. Можно, например, воспользоваться результатом Хёрмандера [22, с. 32]. (Чтобы получить наш случай, надо в теореме 1.3.5 [22] положить $a_0 = 1$, $a_k = k^{-3/2}$ для всех натуральных k .)

Оператор A и функция $\varphi(t)$ соответствуют поставленным целям. Оператор A не имеет собственных значений, и предположение (Λ) заведомо выполняется. Функция $\varphi(t)$ подчинена соотношениям невырожденности (7), но $d_\varphi = \infty$ (см. пример 3 в п. 4). Запишем обратную задачу (1), (3) для указанных A , $\varphi(t)$ в виде

$$\begin{cases} u_t(x, t) = u_{x^N}(x, t) + \varphi(t)p(x), & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(0, t) = u_x(0, t) = \dots = u_{x^{N-1}}(0, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u(x, T) = 0. \end{cases} \quad (25)$$

Рассмотрим пару функций

$$u(x, t) = \frac{x^N}{N!}\varphi(t) + \frac{x^{2N}}{(2N)!}\varphi'(t) + \dots + \frac{x^{(k+1)N}}{((k+1)N)!}\varphi^{(k)}(t) + \dots, \quad p(x) \equiv -1. \quad (26)$$

Сходимость ряда для $u(x, t)$ и возможность почленного дифференцирования следуют из оценок (24). Подстановка пары (26) в (25) дает верные тождества. Таким образом, несмотря на отсутствие собственных значений у оператора A , обратная задача (25) имеет нетривиальное решение $(u(x, t), p(x))$.

6. Дополнения к примеру. При $N = 2$ пример п. 5 указан в [14] без обсуждения дефектного значения d_φ . Ряд, выражающий $u(x, t)$ в (26), напоминает известную конструкцию А. Н. Тихонова, использованную в [23] с иной целью: показать неединственность решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.

Отметим, что при $N \geq 2$ оператор $A = d^N/dx^N$ с областью определения (22) обладает интересной особенностью: однородное уравнение $du(t)/dt = Au(t)$ на любом промежутке $[0, T]$ имеет только тривиальное решение $u(t) \equiv 0$. При $N = 2$ данный факт также упомянут в [23, с. 201], где рассматривалось уравнение $u_t = u_{xx}$ при условиях $u(0, t) = u_x(0, t) = 0$. Кроме того, понятна связь с теоремой Хольмгрена [24, с. 259]. Эти классические результаты основаны на технике “уравнений с частными производными”. Другое, “операторное” доказательство равенства $u(t) \equiv 0$ можно получить, применяя в нашей ситуации результаты Любича и Ткаченко [25, с. 430–433] о решениях уравнения $du(t)/dt = Au(t)$ с оператором A , имеющим мероморфную резольвенту. Но методы работы [25] довольно сложны и требуют специальной теории “локального преобразования Лапласа”.

Дадим сейчас новое, очень короткое доказательство тривиальности решения $u(t)$ в уравнении $du(t)/dt = Au(t)$ с оператором $A = d^N/dx^N$, $N \geq 2$, на области определения (22) в пространстве $E = C([0, 1])$. Пространство $C([0, 1])$ взято, конечно, лишь для удобства; аналогично можно рассмотреть $C([0, l])$, $L^p([0, l])$ и т.д. Решение уравнения $du(t)/dt = Au(t)$ понимается в классическом смысле, как функция $u: [0, T] \rightarrow E$ из класса $C^1([0, T]; E)$ со значениями в $D(A)$.

Пусть $u(t)$ – такое решение. При всех $\lambda \in \mathbb{C}$ справедливо равенство

$$A \int_0^T e^{-\lambda t} u(t) dt = \int_0^T e^{-\lambda t} u'(t) dt.$$

Проинтегрируем правую часть по частям и запишем в виде

$$(\lambda - A) \int_0^T e^{-\lambda t} u(t) dt = u(0) - e^{-\lambda T} u(T).$$

Отсюда

$$\int_0^T e^{-\lambda t} u(t) dt = (\lambda - A)^{-1} (u(0) - e^{-\lambda T} u(T)), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (27)$$

Резольвента $(\lambda - A)^{-1}$ определена при $\lambda \in \mathbb{C}$ формулой (23) с функцией $y(x, \lambda) = x^{N-1} Y_N(\lambda x^N)$. Напомним, что $Y_N(z) = E_{1/N}(z; N)$ – целая функция порядка $1/N$. С помощью элементарных оценок получаем, что сама резольвента $(\lambda - A)^{-1}$ является операторной целой функцией от λ порядка $\rho \leq 1/N < 1$.

Подставим в (27) значения $\lambda = \zeta_k \equiv 2k\pi i/T$, $k \in \mathbb{Z}$. Имеем

$$(\zeta_k - A)^{-1} (u(0) - u(T)) = \int_0^T e^{-(2k\pi i/T)t} u(t) dt \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (28)$$

Рассмотрим векторную целую функцию $v(\lambda) \equiv (\lambda - A)^{-1} (u(0) - u(T))$. Порядок $v(\lambda)$ не превосходит $1/N$ и согласно (28) $|v(\zeta_k)| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Точки $\zeta_k = 2k\pi i/T$ образуют двустороннюю арифметическую прогрессию. На основании известной теоремы Поля [16, с. 118] заключаем, что $v(\lambda) \equiv 0$ в плоскости $\mathbb{C}$. В частности, $v(\zeta_k) = 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Вновь обращаясь к (28), видим, что функция $u(t)$ ортогональна на $[0, T]$ всем экспонентам $e^{(2k\pi i/T)t}$, $k \in \mathbb{Z}$. Поэтому $u(t) \equiv 0$ на $[0, T]$. Требуемое получено.

Отсутствие нетривиальных решений у однородного уравнения $du(t)/dt = Au(t)$ не означает, конечно, “тривиальности” самого оператора A . Как показывает пример в п. 5, неоднородное уравнение $du(t)/dt = Au(t) + \varphi(t)p$ при соответствующем выборе $\varphi(t)$ имеет нетривиальное “решение” (26), представляющее интерес для обратных задач.

7. Заключительные замечания. Итак, в работе рассмотрен общий случай линейного замкнутого оператора A . Полученные результаты, как видится, близки к предельным. Однако если A порождает C_0 -полугруппу, то теория единственности для обратной задачи (1), (2) допускает дальнейшее развитие. Как выяснилось в процессе исследований, для такого оператора A достаточно считать, что функция $\varphi(t)$ не обращается тождественно в нуль ни в какой окрестности точки $t = T$, т.е. что выполняется только второе соотношение невырожденности (7). Тогда единственность решения обратной задачи (1), (2) полностью выражается предположением (Λ). Изложение результатов этого цикла готовится авторами к печати. Предварительное утверждение для дифференцируемых полугрупп см. в [8].

Отметим, что в статье совершенно не затрагивается тема разрешимости обратной задачи (1), (2) с произвольными элементами $u_0, u_1 \in D(A)$. Сошлемся здесь на работы [7], [9], где имеется теория для C_0 -полугруппового случая.

Авторы признательны А. И. Прилепко, А. М. Седлецкому и М. Л. Содину за интерес, проявленный к нашей работе, и А. Б. Костину за плодотворные обсуждения в процессе исследований.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics*. New York–Basel: Marcel Dekker, 2000.
- [2] Искендеров А. Д. Некоторые обратные задачи об определении правых частей дифференциальных уравнений // Изв. АН Азерб. ССР. Сер. физ. -техн. и матем. наук. 1976. № 2. С. 58–63.
- [3] Егоров А. И. *Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами*. М.: Наука, 1978.
- [4] Орловский Д. Г. К задаче определения параметра эволюционного уравнения // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 9. С. 1614–1621.
- [5] Rundell W. Determination of an unknown non-homogeneous term in a linear partial differential equation from overspecified boundary data // Appl. Anal. 1980. V. 10. № 3. P. 231–242.
- [6] Эйдельман Ю. С. Единственность решения обратной задачи для дифференциального уравнения в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 9. С. 1647–1649.
- [7] Эйдельман Ю. С. Одна обратная задача для эволюционного уравнения // Матем. заметки. 1991. Т. 49. № 5. С. 135–141.
- [8] Eidelman Y. S. Conditions of existence and uniqueness of solution of inverse problem for the evolutionary equation // Докл. АН Украины. 1992. № 8. P. 8–11.
- [9] Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С. Вопросы корректности прямых и обратных задач для эволюционного уравнения специального вида // Матем. заметки. 1994. Т. 56. № 2. С. 99–113.
- [10] Аниконов Ю. Е., Вишневский М. П. Формулы в обратной задаче для эволюционного уравнения // Сиб. матем. ж. 1996. Т. 37. № 5. С. 963–976.
- [11] Аюпова Н. Б., Голубятников В. П. О формальных решениях многомерных эволюционных уравнений // Матем. труды. Т. 1. № 2. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1998. С. 3–23.
- [12] Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С. Единственность решения двухточечной обратной задачи для абстрактного дифференциального уравнения с неизвестным параметром // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 8. С. 1132–1133.
- [13] Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С. Обратная задача для дифференциального уравнения в банаховом пространстве и распределение нулей целой функции типа Миттаг-Леффлера // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 5. С. 637–644.
- [14] Тихонов И. В. Соображения монотонности в обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения // Интегральные преобразования и спец. функции. Информ. бюлл. 2001. Т. 2. № 1. С. 119–128.
- [15] Леонтьев А. Ф. *Ряды экспонент*. М.: Наука, 1976.
- [16] Хилле Э., Филлипс Р. *Функциональный анализ и полугруппы*. М.: ИЛ, 1962.
- [17] Левин Б. Я. *Распределение корней целых функций*. М.: ГИТТЛ, 1956.
- [18] Любич Ю. И. О собственных и присоединенных функциях оператора дифференцирования // Изв. вузов. Матем. 1959. № 4. С. 94–103.
- [19] Titchmarsh E. C. The zeros of certain integral functions // Proc. London Math. Soc. 1926. V. 25. № 4. P. 283–302.
- [20] Федорюк М. В. *Метод перевала*. М.: Наука, 1977.
- [21] Джрбашян М. М. *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области*. М.: Наука, 1966.
- [22] Хёрмандер Л. *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986.
- [23] Tychonoff A. Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur // Матем. сб. 1935. V. 42. № 2. P. 199–216.
- [24] Мидзохота С. *Теория уравнений с частными производными*. М.: Мир, 1977.
- [25] Любич Ю. И., Ткаченко В. А. Теория и некоторые применения локального преобразования Лапласа // Матем. сб. 1966. Т. 70. № 3. С. 416–437.