Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Н. Субботин, С. А. Теляковский, Нормы в L периодических интерполяционных сплайнов с равноотстоящими узлами, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 1, 108–117

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm249>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 15:29:50

УДК 517.67

НОРМЫ В L ПЕРИОДИЧЕСКИХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ СПЛАЙНОВ С РАВНООТСТОЯЩИМИ УЗЛАМИ

Ю. Н. Субботин, С. А. Теляковский

Рассматривается множество $S_{r,n}$ периодических с периодом 1 сплайнов степени r дефекта 1 с узлами в n равноотстоящих точках $x_i = i/n$. Для наборов $y = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ берутся сплайны $s_{r,n}(y, x)$ из $S_{r,n}$, решающие интерполяционную задачу

$$s_{r,n}(y, t_i) = y_i,$$

где $t_i = x_i$, если r нечетно, и t_i — середины отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, если r четно. Для норм $L_{r,n}^*$ оператора $y \rightarrow s_{r,n}(y, x)$ как оператора из l^1 в $L^1[0, 1]$ установлена оценка

$$L_{r,n}^* = \frac{4}{\pi^2 n} \log \min(r, n) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

с абсолютной постоянной в остаточном члене. Выяснена связь норм $L_{r,n}^*$ с нормами аналогичного оператора для непериодических сплайнов.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. Пусть $S_{r,n}$ — множество периодических с периодом 1 сплайнов степени r дефекта 1 с узлами в n равноотстоящих точках $x_i := i/n$, $i = 0, 1, \dots, n$.

В работе [1] была рассмотрена следующая задача.

Каждой непрерывной периодической с периодом 1 функции $f(x)$ ставится в соответствие сплайн $s_{r,n}(f, x)$ из $S_{r,n}$, интерполирующий функцию f в точках

$$t_i := x_i + \frac{1 + (-1)^r}{4n}, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

т.е. в узлах x_i , если r нечетно, и в серединах отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, если r четно. Заметим, что $t_n = 1 + t_0$. Существование и единственность интерполяционных сплайнов $s_{r,n}(f, x)$ известны, см. [2, с. 121].

В [1] изучалось асимптотическое поведение констант Лебега $L_{r,n}$ указанных интерполяционных сплайнов, т.е. норм оператора $f(x) \rightarrow s_{r,n}(f, x)$ как оператора из C в C . Было доказано, что

$$L_{r,n} = \frac{2}{\pi} \log \min(r, n) + O(1) \quad (1.1)$$

Работа первого автора была выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00764, и программы “Ведущие научные школы”, грант № 00-15-96035, работа второго автора была выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00787, программы “Ведущие научные школы”, грант № 00-15-96047, и INTAS, грант № 99-01080.

с абсолютной постоянной в остаточном члене.

Настоящая работа посвящена изучению аналогичного вопроса о нормах интерполяционных сплайнов из $S_{r,n}$ как операторов из l^1 в L^1 .

Точная постановка задачи такова. Для произвольного набора из n чисел $\mathbf{y} := (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ строится интерполяционный сплайн $s_{r,n}(\mathbf{y}, x) \in S_{r,n}$, удовлетворяющий условиям

$$s_{r,n}(\mathbf{y}, t_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1.2)$$

Для наборов $\mathbf{y}$ вводится l^1 -норма

$$\|\mathbf{y}\|_{l^1} := \sum_{i=0}^{n-1} |y_i|$$

и рассматривается норма $L_{r,n}^*$ оператора $\mathbf{y} \rightarrow s_{r,n}(\mathbf{y}, x)$ как оператора из l^1 в $L^1[0, 1]$.

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение, родственное оценке (1.1).

ТЕОРЕМА 1. *Для норм $L_{r,n}^*$ имеет место оценка*

$$L_{r,n}^* = \frac{4}{\pi^2 n} \log \min(r, n) + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (1.3)$$

с абсолютной постоянной в остаточном члене.

В п. 3 с помощью формул для интерполяционных сплайнов из работы [3] получено представление норм $L_{r,n}^*$, из которого в п. 4 выводится теорема 1. Второй раздел является вспомогательным. В п. 5 рассмотрена связь величин $L_{r,n}^*$ с подобными нормами для непериодических интерполяционных сплайнов, заданных на всей оси.

Как и в [1], на протяжении всей работы будем считать, что $n \geq 3$ и $\nu := [(n-1)/2]$. Условие $n \geq 3$ не ограничивает общность, так как для $n = 1$ и $n = 2$ оценка (1.3) очевидна.

Все соотношения с O -символами в работе являются равномерными относительно всех параметров, но отмечать это мы будем только в формулировках утверждений.

2. Вспомогательные предложения. В представлении интерполяционных сплайнов из [3], которым мы будем пользоваться, и в представлении норм $L_{r,n}^*$ участвуют величины

$$A_{r,j,n} := \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{m(r+1)}}{(mn+j)^{r+1}}, \quad B_{r,j,n} := \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{mr}}{(mn+j)^{r+1}}, \quad (2.1)$$

$j = 1, 2, \dots, n-1$. Мы придерживаемся обозначений этих величин, которые использовались в [1]. Они отличаются от обозначений, принятых в [3], множителем $(-1)^{r+1}$.

Для величин (2.1) имеют место следующие предложения, первые два из которых были установлены в [1, леммы 1 и 2].

ЛЕММА 1. *Для всех $j = 1, \dots, n-1$ справедливы оценки*

$$\frac{1}{j^{r+1}} < A_{r,j,n} < \frac{1}{j^{r+1}} + \frac{4}{(n-j)^{r+1}}. \quad (2.2)$$

ЛЕММА 2. При $j = 1, \dots, \nu$ справедливы оценки

$$0 < B_{r,j,n} = \frac{1}{j^{r+1}} - \frac{1}{(n-j)^{r+1}} + O\left(\frac{n-2j}{nj^{r+1}}\right) \quad (2.3)$$

с абсолютной постоянной в остаточном члене.

Заметим, что из (2.3) и левой оценки (2.2) следует, что при $j = 1, \dots, \nu$

$$\frac{B_{r+1,j,n}}{A_{r,j,n}} = O\left(\frac{1}{j}\right). \quad (2.4)$$

ЛЕММА 3. При $j = 1, 2, \dots, n-1$ справедливы равенства

$$A_{r,n-j,n} = A_{r,j,n}, \quad B_{r,n-j,n} = -B_{r,j,n}. \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменяем в определении $A_{r,n-j,n}$ индекс суммирования m на $-k-1$. Тогда

$$A_{r,n-j,n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{m(r+1)}}{(mn+n-j)^{r+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{(-k-1)(r+1)}}{(-kn-j)^{r+1}} = A_{r,j,n}.$$

Доказательство второго соотношения (2.5) аналогично:

$$B_{r,n-j,n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{mr}}{(mn+n-j)^{r+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{(-k-1)r}}{(-kn-j)^{r+1}} = -B_{r,j,n}.$$

Кроме того, будут использоваться следующие оценки из [1, лемма 4].

ЛЕММА 4. Справедливы равномерные относительно всех параметров оценки

$$\sum_{j=1}^{\nu} \frac{1}{\nu+1-j} \left[1 - \left(\frac{j}{n-j} \right)^r \right] = \log \min(r, n) + O(1), \quad (2.6)$$

$$\sum_{j=1}^{\nu} \frac{1+(-1)^j}{\nu+1-j} \left[1 - \left(\frac{j}{n-j} \right)^r \right] = \log \min(r, n) + O(1), \quad (2.7)$$

$$\sum_{j=1}^{\nu} \frac{1}{\nu+1-j} \left[1 - \left(\frac{j}{n-j} \right)^r \right] \left(\frac{j}{\nu+1} \right)^r = O(1). \quad (2.8)$$

Нам понадобятся также некоторые свойства величин

$$\alpha_{j,n} := \sum_{i=0}^{\nu} (-1)^i \cos \frac{j(2i+1)}{n} \pi, \quad j = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.9)$$

ЛЕММА 5. *Имеют место следующие соотношения:*

$$\alpha_{n-j,n} = -\alpha_{j,n}; \quad (2.10)$$

в частности, если n четно и $j = n/2$, то $\alpha_{j,n} = 0$; если $j < n/2$, то при четном n

$$\alpha_{j,n} = \frac{1}{2} \left(1 + (-1)^{j+\nu} \right) \cos^{-1} \frac{j}{n} \pi, \quad (2.11)$$

а при нечетном n

$$\alpha_{j,n} = \frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{j}{n} \pi + O(1) \quad (2.12)$$

с абсолютной постоянной в остаточном члене.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого слагаемого из суммы (2.9) имеем

$$\cos \frac{(n-j)(2i+1)}{n} \pi = \cos \left((2i+1)\pi - \frac{j(2i+1)}{n} \pi \right) = -\cos \frac{j(2i+1)}{n} \pi.$$

Отсюда следует (2.10).

Если $j < n/2$, то воспользуемся тождеством [4, формула (1.341.6)]

$$\sum_{i=0}^{\nu} (-1)^i \sin(x + iy) = \sin \left(x + \frac{\nu}{2}(y + \pi) \right) \sin \frac{\nu+1}{2}(y + \pi) \cos^{-1} \frac{y}{2}$$

при

$$x = \frac{\pi}{2} + \frac{j}{n} \pi, \quad y = \frac{2j}{n} \pi.$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \alpha_{j,n} &= \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{j}{n} \pi + \frac{\nu}{2} \left(\frac{2j}{n} \pi + \pi \right) \right) \sin \frac{\nu+1}{2} \left(\frac{2j}{n} \pi + \pi \right) \cos^{-1} \frac{j}{n} \pi \\ &= \sin^2 \left((\nu+1) \frac{j}{n} \pi + \frac{\nu+1}{2} \pi \right) \cos^{-1} \frac{j}{n} \pi. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Если n четно, то $n = 2\nu + 2$ и

$$(\nu+1) \frac{j}{n} \pi + \frac{\nu+1}{2} \pi = (j + \nu + 1) \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому

$$\sin^2 \left((\nu+1) \frac{j}{n} \pi + \frac{\nu+1}{2} \pi \right) = \frac{1}{2} (1 + (-1)^{j+\nu}).$$

Таким образом, равенство (2.11) доказано.

Пусть теперь n нечетно. Тогда $n = 2\nu + 1$ и

$$(\nu+1) \frac{j}{n} \pi + \frac{\nu+1}{2} \pi = \frac{j\pi}{2n} + (j + \nu + 1) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{n-2j}{4n} \pi + (j + \nu + 1) \frac{\pi}{2}.$$

Значит,

$$\sin^2 \left((\nu+1) \frac{j}{n} \pi + \frac{\nu+1}{2} \pi \right) = \frac{1}{2} + O \left(\frac{n-2j}{n} \right). \quad (2.14)$$

Оценка (2.12) вытекает из (2.13) и (2.14), так как

$$\cos^{-1} \frac{j}{n} \pi = \sin^{-1} \frac{n-2j}{2n} \pi < \frac{n}{n-2j}.$$

Лемма доказана.

3. Представление норм $L_{r,n}^*$.

ТЕОРЕМА 2. Для норм $L_{r,n}^*$ справедливы равномерные по всем параметрам оценки:

$$L_{r,n}^* = \frac{2}{\pi n} \sum_{j=1}^{\nu} [1 + (-1)^{\nu+j}] \frac{B_{r+1,j,n}}{A_{r,j,n}} \operatorname{tg} \frac{j\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (3.1)$$

при четном n , а при нечетном n

$$L_{r,n}^* = \frac{2}{\pi n} \sum_{j=1}^{\nu} \frac{B_{r+1,j,n}}{A_{r,j,n}} \operatorname{tg} \frac{j\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $s_{r,n}^0(x)$ – фундаментальный сплайн из $S_{r,n}$, решающий интерполяционную задачу (1.2) для $\mathbf{y}^0 := (1, 0, \dots, 0)$. Тогда для произвольного набора $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ имеем

$$s_{r,n}(\mathbf{y}, x) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i s_{r,n}^0(x - t_i).$$

Поэтому

$$\int_0^1 |s_{r,n}(\mathbf{y}, x)| dx \leq \sum_{i=0}^{n-1} |y_i| \int_0^1 |s_{r,n}^0(x - t_i)| dx = \sum_{i=0}^{n-1} |y_i| \int_0^1 |s_{r,n}^0(x)| dx. \quad (3.3)$$

Так как для $\mathbf{y} = \mathbf{y}^0$ в (3.3) имеет место знак равенства, отсюда следует, что

$$L_{r,n}^* = \int_0^1 |s_{r,n}^0(x)| dx. \quad (3.4)$$

Таким образом, задача свелась к изучению интеграла из (3.4).

Так как сплайн $s_{r,n}^0(x)$ имеет период 1, то

$$L_{r,n}^* = \int_{t_0}^{1+t_0} |s_{r,n}^0(x)| dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |s_{r,n}^0(x)| dx.$$

Из определения $s_{r,n}^0(x)$ в силу единственности интерполяционных сплайнов следует равенство

$$s_{r,n}^0(t_0 + x) = s_{r,n}^0(t_0 - x). \quad (3.5)$$

А. А. Женсыкбаев [3, теорема 1] установил, что если n четно, то при $i = 0, 1, \dots, \nu$

$$\operatorname{sign} s_{r,n}^0(x) = (-1)^i, \quad x \in (t_i, t_{i+1}), \quad (3.6)$$

а если n нечетно, равенство (3.6) имеет место при всех $i = 0, 1, \dots, n-1$. Поэтому, учитывая (3.5), имеем

$$L_{r,n}^* = 2 \sum_{i=0}^{\nu} (-1)^i \int_{t_i}^{t_{i+1}} s_{r,n}^0(x) dx - \frac{1 - (-1)^n}{2} (-1)^{\nu} \int_{t_{\nu}}^{t_{\nu+1}} s_{r,n}^0(x) dx. \quad (3.7)$$

Для сплайнов $s_{r,n}^0(x)$ справедливо представление [3, формула (7)]

$$s_{r,n}^0(x) = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^{r+1}}{n} \sum_{j=1}^{n-1} A_{r,j,n}^{-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2\pi[(mn-j)x + jt_0]}{(mn-j)^{r+1}}.$$

Пользуясь этим представлением и равенством

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \cos 2\pi[(mn-j)x + jt_0] dx &= \frac{1}{2\pi(mn-j)} 2 \sin \pi \frac{mn-j}{n} \\ &\quad \times \cos 2\pi \left[(mn-j) \left(t_0 + \frac{2i+1}{2n} \pi \right) + jt_0 \right] \\ &= \frac{1}{\pi(mn-j)} (-1)^{m(r+1)+1} \sin \frac{j\pi}{n} \cdot \cos \frac{j(2i+1)}{n} \pi, \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+1}} s_{r,n}^0(x) dx &= \frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^{r+1}}{\pi n} \\ &\quad \times \sum_{j=1}^{n-1} A_{r,j,n}^{-1} \sin \frac{j\pi}{n} \cos \frac{j(2i+1)}{n} \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{m(r+1)+1}}{(mn-j)^{r+2}} \\ &= \frac{1}{n^2} + \frac{1}{\pi n} \sum_{j=1}^{n-1} \sin \frac{j\pi}{n} \cos \frac{j(2i+1)}{n} \pi \frac{B_{r+1,j,n}}{A_{r,j,n}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Заметим, что при n четном последнее слагаемое в правой части (3.7) равно нулю.

Если же n нечетно, то согласно (3.8) модуль последнего слагаемого из правой части (3.7) не превосходит суммы

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \sin \frac{j\pi}{n} \frac{|B_{r+1,j,n}|}{A_{r,j,n}} = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{\nu} \sin \frac{j\pi}{n} \frac{B_{r+1,j,n}}{A_{r,j,n}};$$

здесь мы воспользовались равенствами (2.5).

Полученное выражение в силу (2.4) есть

$$\frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\nu} \frac{j}{n} \frac{1}{j}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Поэтому из (3.7) и (3.8) следует, что

$$L_{r,n}^* = \frac{2}{\pi n} \sum_{j=1}^{n-1} \sin \frac{j\pi}{n} \frac{B_{r+1,j,n}}{A_{r,j,n}} \sum_{i=0}^{\nu} (-1)^i \cos \frac{j(2i+1)}{n} \pi + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (3.9)$$

Пользуясь обозначением (2.9), эту оценку можно записать так:

$$L_{r,n}^* = \frac{2}{\pi n} \sum_{j=1}^{n-1} \sin \frac{j\pi}{n} \frac{B_{r+1,j,n}}{A_{r,j,n}} \alpha_{j,n} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Если n четно и $j = n/2 = \nu + 1$, то согласно лемме 5 $\alpha_{\nu+1,n} = 0$. Поэтому для всех n имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} \sin \frac{j\pi}{n} \frac{B_{r+1,j,n}}{A_{r,j,n}} \alpha_{j,n} &= \sum_{j=1}^{\nu} \sin \frac{j\pi}{n} \frac{B_{r+1,j,n}}{A_{r,j,n}} \alpha_{j,n} \\ &+ \sum_{j=1}^{\nu} \sin \frac{(n-j)\pi}{n} \frac{B_{r+1,n-j,n}}{A_{r,n-j,n}} \alpha_{n-j,n}. \end{aligned}$$

Таким образом, из (3.9) в силу равенств (2.5) и (2.10) получаем

$$L_{r,n}^* = \frac{4}{\pi n} \sum_{j=1}^{\nu} \sin \frac{j\pi}{n} \frac{B_{r+1,j,n}}{A_{r,j,n}} \alpha_{j,n} + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (3.10)$$

Если n четно, то оценка (3.1) сразу вытекает из (3.10) и (2.11). А если n нечетно, то чтобы из (3.10) и (2.12) получить (3.2), нужно воспользоваться тем, что в силу (2.4)

$$\sum_{j=1}^{\nu} \sin \frac{j\pi}{n} \frac{B_{r+1,j,n}}{A_{r,j,n}} = O\left(\sum_{j=1}^{\nu} \frac{j}{n} \frac{1}{j}\right) = O(1).$$

Теорема доказана.

4. Доказательство теоремы 1. Будем исходить из оценок теоремы 2. Рассмотрим сначала нечетные n . Положим

$$P_{r,n} := \sum_{j=1}^{\nu} \frac{B_{r+1,j,n}}{A_{r,j,n}} \operatorname{tg} \frac{j\pi}{n}.$$

Пусть $\mu := [\nu/2]$. Тогда $\mu \leq \nu/2 < n/4$ и, значит, для $j \leq \mu$ имеем

$$\operatorname{tg} \frac{j\pi}{n} = O\left(\frac{j}{n}\right).$$

Поэтому согласно (2.4)

$$\sum_{j=1}^{\mu} \frac{B_{r+1,j,n}}{A_{r,j,n}} \operatorname{tg} \frac{j\pi}{N} = O\left(\sum_{j=1}^{\mu} \frac{1}{j} \frac{j}{n}\right) = O(1).$$

Таким образом,

$$P_{r,n} := \sum_{j=\mu+1}^{\nu} \frac{B_{r+1,j,n}}{A_{r,j,n}} \operatorname{tg} \frac{j\pi}{n} + O(1).$$

Так как для $j \leq \nu < n/2$ справедлива оценка

$$\operatorname{tg} \frac{j\pi}{n} = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} \frac{n-2j}{n} \right) = \frac{2}{\pi} \frac{n}{n-2j} + O(1) = \frac{4}{\pi} \frac{j}{n-2j} + O(1),$$

то

$$P_{r,n} = \frac{4}{\pi} \sum_{j=\mu+1}^{\nu} \frac{j}{n-2j} \frac{B_{r+1,j,n}}{A_{r,j,n}} + O(1), \quad (4.1)$$

поскольку в силу (2.4)

$$\sum_{j=\mu+1}^{\nu} \frac{B_{r+1,j,n}}{A_{r,j,n}} = O\left(\sum_{j=\mu+1}^{\nu} \frac{1}{j}\right) = O(1).$$

Подставим теперь в (4.1) вместо величин $B_{r+1,j,n}$ их выражения по формуле (2.3). Так как в силу левой оценки (2.2)

$$\sum_{j=\mu+1}^{\nu} \frac{j}{n-2j} \frac{1}{A_{r,j,n}} \frac{n-2j}{nj^{r+2}} < \sum_{j=\mu+1}^{\nu} \frac{1}{n} < 1,$$

получим

$$P_{r,n} = \frac{4}{\pi} \sum_{j=\mu+1}^{\nu} \frac{j}{n-2j} \frac{1}{A_{r,j,n}} \left(\frac{1}{j^{r+2}} - \frac{1}{(n-j)^{r+2}} \right) + O(1).$$

Поскольку для нечетных n , которые мы сейчас рассматриваем, $n-2j = 2\nu+1-2j$, то

$$\frac{1}{n-2j} = \frac{1}{2(\nu+1-j)} + O\left(\frac{1}{(\nu+1-j)^2}\right). \quad (4.2)$$

Поэтому с помощью левой оценки (2.2) находим

$$P_{r,n} = \frac{2}{\pi} \sum_{j=\mu+1}^{\nu} \frac{j}{\nu+1-j} \frac{1}{A_{r,j,n}} \left(\frac{1}{j^{r+2}} - \frac{1}{(n-j)^{r+2}} \right) + O(1). \quad (4.3)$$

Из оценок (2.2) следует, что

$$\frac{1}{A_{r,j,n}} = j^{r+1} + O\left(\frac{j^{2(r+1)}}{(n-j)^{r+1}}\right). \quad (4.4)$$

Прежде чем подставить это выражение в (4.3), заметим, что сумма

$$\begin{aligned} & \sum_{j=\mu+1}^{\nu} \frac{j}{\nu+1-j} \left(\frac{1}{j^{r+2}} - \frac{1}{(n-j)^{r+2}} \right) \frac{j^{2(r+1)}}{(n-j)^{r+1}} \\ &= \sum_{j=\mu+1}^{\nu} \frac{1}{\nu+1-j} \left(1 - \left(\frac{j}{n-j} \right)^{r+2} \right) \left(\frac{j}{n-j} \right)^{r+1} \end{aligned}$$

равномерно ограничена в силу (2.8).

Таким образом, из (4.3) и (4.4) следует, что

$$\begin{aligned} P_{r,n} &= \frac{2}{\pi} \sum_{j=\mu+1}^{\nu} \frac{j}{\nu+1-j} j^{r+1} \left(\frac{1}{j^{r+2}} - \frac{1}{(n-j)^{r+2}} \right) + O(1) \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{j=\mu+1}^{\nu} \frac{1}{\nu+1-j} \left(1 - \left(\frac{j}{n-j} \right)^{r+2} \right) + O(1). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Так как при $j \leq \mu$ имеем $\nu+1-j \geq \nu+1-\mu > \mu$, то (4.5) равносильно оценке

$$P_{r,n} = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\nu} \frac{1}{\nu+1-j} \left(1 - \left(\frac{j}{n-j} \right)^{r+2} \right) + O(1). \quad (4.6)$$

Оценка (1.3) для нечетных n вытекает из (4.6) и (2.6).

Если n четно, то, пользуясь вместо (4.2) равенством $n - 2j = 2(\nu + 1 - j)$, точно так же, как была доказана оценка (4.6), приходим к оценке

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\nu} [1 + (-1)^{\nu+j}] \frac{B_{r+1,j,n}}{A_{r,j,n}} \operatorname{tg} \frac{j\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\nu} \frac{1 + (-1)^{\nu+j}}{\nu + 1 - j} \left(1 - \left(\frac{j}{n-j}\right)^{r+2}\right) + O(1). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Оценка (1.3) для четных n следует из (4.7) и (2.7).

Теорема 1 доказана.

5. Сравнение с непериодическим случаем. Задача об асимптотическом поведении норм $L_{r,n}^*$ близка к следующей задаче, рассматривавшейся в работе [5].

Пусть S_r – множество сплайнов степени r дефекта 1 с узлами в целых точках i , $-\infty < i < +\infty$. Для последовательностей чисел $\mathbf{z} := (z_i, -\infty < i < +\infty)$, удовлетворяющих условию

$$\|\mathbf{z}\|_{l^1} := \sum_{i=-\infty}^{\infty} |z_i| < \infty, \quad (5.1)$$

строятся интерполяционные сплайны $\sigma_r(\mathbf{z}, x) \in S_r$ такие, что

$$\sigma_r(\mathbf{z}, \tau_i) = z_i, \quad -\infty < i < +\infty, \quad (5.2)$$

где

$$\tau_i := i + \frac{1 + (-1)^r}{4}.$$

Спрашивается, как ведут себя нормы $\mathcal{L}_r$ оператора $\mathbf{z} \rightarrow \sigma_r(\mathbf{z}, x)$ как оператора из l^1 в $L^1(-\infty, +\infty)$.

В [5, теорема 2.1] для величин $\mathcal{L}_r$ получена оценка

$$\mathcal{L}_r = \frac{4}{\pi^2} \log r + \frac{2A}{\pi} + \frac{4}{\pi^2} \left(\log \frac{4}{\pi} + \gamma \right) + o(1), \quad r \rightarrow \infty, \quad (5.3)$$

где

$$A := \int_0^\pi \left(\frac{1}{t} \operatorname{tg} \frac{t}{2} - \frac{2}{\pi(\pi-t)} \right) dt$$

и γ – постоянная Эйлера.

Пусть $\sigma_r^0(x)$ – фундаментальный сплайн из S_r , решающий интерполяционную задачу (5.2) для последовательности $\mathbf{z}^0 := (z_0 = 1, z_i = 0 \text{ при } i \neq 0)$.

Известно, что для каждого $r = 1, 2, \dots$ сплайн $\sigma_r^0(x)$ принадлежит пространству $L^1(-\infty, +\infty)$, см., например, [6, теорема 12]. Этот факт очевидным образом вытекает из результатов работы [7], но в явном виде в [7] он не был отмечен.

При доказательстве оценки (5.3) в [5] было установлено равенство

$$\mathcal{L}_r = \int_{-\infty}^{\infty} |\sigma_r^0(x)| dx. \quad (5.4)$$

Чтобы сравнить оценки (5.3) и (1.3), преобразуем интеграл из (5.4) следующим образом:

$$\mathcal{L}_r = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^n |\sigma_r^0(x + kn)| dx = \int_0^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\sigma_r^0(x + kn)| dx.$$

Последний шаг обосновывается ссылкой на теорему Б. Леви о предельном переходе под знаком интеграла (теорему Лебега о монотонной сходимости).

Функция

$$\sigma_{r,n}^*(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma_r^0(x + kn)$$

представляет собой сплайн периода n с узлами в целых точках.

Понятно, что сплайн $\sigma_{r,n}^*(x)$ связан со сплайном $s_{r,n}^0(x)$, для которого справедливо равенство (3.4), соотношением

$$\sigma_{r,n}^*(x) = s_{r,n}^0\left(\frac{x}{n}\right).$$

Поэтому

$$\int_0^n |\sigma_{r,n}^*(x)| dx = n \int_0^1 |s_{r,n}^0(x)| dx = n L_{r,n}^*.$$

В силу (5.3) и (1.3) равномерно относительно параметров r и n

$$\mathcal{L}_r = \int_0^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\sigma_r^0(x + kn)| dx = \frac{4}{\pi^2} \log r + O(1)$$

и

$$n L_{r,n}^* = \int_0^n \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma_r^0(x + kn) \right| dx = \frac{4}{\pi^2} \log \min(r, n) + O(1).$$

Таким образом, здесь имеет место тот же эффект, что и отмеченный в [1] эффект для интерполяционных сплайнов в равномерной метрике, когда $\log r$ в главном члене асимптотики констант Лебега для произвольных сплайнов заменяется на $\log \min(r, n)$ при переходе к сплайнам периода n .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Субботин Ю. Н., Теляковский С. А. Асимптотика констант Лебега периодических интерполяционных сплайнов с равноотстоящими узлами // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 8. С. 131–140.
- [2] Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. Сплайны в вычислительной математике. М.: Физматгиз, 1976.
- [3] Женсыкбаев А. А. Точные оценки равномерного приближения непрерывных периодических функций сплайнами r -го порядка // Матем. заметки. 1973. Т. 13. № 2. С. 217–228.
- [4] Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
- [5] Marsden M. J., Richards F. B., Riemenschneider S. D. Cardinal spline interpolation operators on l^p data // Indiana University Math. J. 1975. V. 24. P. 677–689.
- [6] Schoenberg I. J. Cardinal interpolation and spline functions // J. Approx. Theory. 1969. V. 2. P. 167–206.
- [7] Субботин Ю. Н. О связи между конечными разностями и соответствующими производными // Тр. МИАН. 1965. Т. 78. С. 24–42.