Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. К. Захаров, Локальная теория множеств, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 2, 194–212

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2490>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 13:07:50

УДК 510.2

ЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

В. К. Захаров

В 1945 г. Эйленбергом и Маклейном было введено новое математическое понятие *категории*. Однако с самого начала своего возникновения теория категорий столкнулась с тем неприятным обстоятельством, что она не вмещалась не только в рамки теории множеств в аксиоматике Цермело–Френкеля, но даже и в рамки теории классов и множеств в аксиоматике фон Неймана–Бернайса–Гёделя. По этой причине в 1959 г. Маклейн поставил общую проблему построения новой и более гибкой аксиоматической теории множеств, которая могла бы служить адекватным логическим основанием для всей наивной теории категорий.

В данной работе даются аксиоматические основания локальной теории множеств. Эта теория может быть одним из возможных вариантов решения проблемы Маклейна.

Библиография: 19 названий.

1. Введение. Кризис, возникший в наивной теории множеств в начале XX века, привел к возникновению нескольких строгих аксиоматических построений теорий математических совокупностей. Наиболее широко используемыми из них являются *теория множеств в аксиоматике Цермело–Френкеля* (ZF) (см. [1]) и *теория классов и множеств в аксиоматике фон Неймана–Бернайса–Гёделя* (NBG) (см. [2] и [3]).

Эти аксиоматические теории устранили все известные парадоксы наивной теории множеств за счет резкого ограничения возможных выразительных средств. В то же время они давали возможность включать почти все существовавшие тогда математические объекты и конструкции в рамки этих теорий.

Однако уже в 1945 году в основополагающей работе [4] Эйленбергом и Маклейном было введено новое математическое понятие *категории*. С самого начала своего возникновения теория категорий столкнулась с тем неприятным обстоятельством, что она не вмещалась ни в рамки ZF , ни в рамки NBG (см. [4]). Поэтому Маклейном в работе [5] 1959 года была поставлена *общая проблема построения новой и более гибкой аксиоматической теории множеств, которая могла бы служить адекватным логическим основанием для всей наивной теории категорий*.

С тех пор было предложено несколько теорий множеств в качестве оснований для теории категорий (см. [6]–[16]). Однако либо они не обслуживали всей теории категорий [12]–[16], либо были слишком сильны для теории категорий [6]–[9], либо были слишком сложны [10], [11]. Наиболее широкую известность приобрела теория множеств $ZF + U$ с

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00-218, и программы “Университеты России”.

аксиомой универсальности U , принадлежащей Эресманну, Дедекеру, Зоннеру и Гротендику и утверждающей, что каждое множество принадлежит некоторому *универсальному множеству*, которое замкнуто относительно основных теоретико-множественных конструкций и содержит ω в качестве элемента. Аксиома универсальности U равносильна *аксиоме недостижимости* I , согласно которой для любого порядкового числа α существует строго большее (сильно) недостижимое кардинальное число $\aleph$. Теория $ZF + U$ дает очень простое решение проблемы. Однако аксиома U является слишком сильной и излишней для потребностей теории категорий, поскольку она влечет существование трансфинитной коллекции $(U_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{On})$ универсальных множеств U_α , индексированной всеми ординалами α , в то время как для потребностей теории категорий (для формализации операций “категория категорий” и “категория функторов”) достаточно иметь только счетную коллекцию $(U_n \mid n \in \omega)$ универсальных множеств, как это сделано у да Косты.

Более слабая, чем $ZF + U$, теория $ZF + U(\omega)$ с *аксиомой ω -универсальности* $U(\omega)$, утверждающей существование счетной совокупности $(U_n \mid n \in \omega)$ универсальных множеств, обеспечивает все потребности теории категорий, однако она оставляет за пределами категорного рассмотрения те объекты, которые не являются элементами универсумов U_n , поскольку приводит к потере важнейшего свойства *универсального охвата*

$$\forall x \exists U \quad (x \in U \wedge U \text{ универсально}).$$

Именно эта неадекватность теорий $ZF + U$ и $ZF + U(\omega)$ и стимулировала все дальнейшие исследования по проблеме Маклейна. Необходимо было построить аксиоматическую теорию множеств S , которая

- 1) имеет свойство универсального охвата;
- 2) имеет перечислимую метасовокупность всех универсумов.

Теории $ZF + U$ и $ZF + U(\omega)$ не обладают этими двумя свойствами сразу. Теории множеств, введенные да Костой [10], [11], обладают свойствами 1) и 2), однако они не являются теориями первого порядка, поскольку используют неконструктивное правило вывода Карнапа и некоторые свойства натуральных чисел.

В 2000 г. автором статьи в качестве более адекватного основания для теории категорий была предложена *локальная теория множеств* (LTS) (см. анонсы в [17] и [18]). Основная идея LTS , отличающая ее от теорий $ZF + U$ и $ZF + U(\omega)$, состоит в отказе от задания глобальной теоретико-множественной структуры и в задании только ее локальных вариантов.

При исследовании LTS было установлено, что глобальная аксиомная схема замещения не выводится в LTS . Это показывает, что LTS не является вариантом теорий $ZF + U$ и $ZF + U(\omega)$, и LTS строго слабее теории $ZF + U$. Кроме того, было установлено, что непротиворечивость каждой из теорий $ZF + U$ и $ZF + U(\omega)$ влечет непротиворечивость LTS . Это значит, что LTS более надежна, чем эти теории.

Более того, было доказано, что в LTS не выводится аксиома ω -универсальности. Поэтому в 2003 г. автором статьи в качестве равнонепротиворечивого усиления LTS была введена *локально минимальная теория множеств* ($LMTS$), получающаяся прибавлением к LTS отрицания аксиомы ω -универсальности. Следовательно, $LMTS$ обладает указанными выше свойствами 1) и 2). Таким образом, $LMTS$ является более естественной для теории категорий, чем теории $ZF + U$ и $ZF + U(\omega)$.

В данной статье приводятся собственные аксиомы и аксиомные схемы LTS и $LMTS$ и определяются важнейшие теоретико-множественные конструкции. Для подтверждения того, что LTS может служить адекватным логическим основанием для теории категорий, в рамках LTS формализуются основные категорные понятия и доказываются теоремы, утверждающие необходимую замкнутость этих понятий относительно таких важнейших операций как “категория категорий” и “категория функторов”.

По причине ограниченности объема статьи другие указанные выше результаты для LTS и $LMTS$ в данную статью не включены и будут опубликованы в отдельных работах.

Автор выражает глубокую благодарность С.И. Адян, Н.К. Верещагину, В.Г. Кановою, В.А. Любецкому, А.В. Михалеву и А.А. Яшину за интерес к работе и ряд ценных консультаций.

2. Математические аксиомы и аксиомные схемы локальной теории множеств и локально-минимальной теории множеств. Предлагаемые теории являются теориями первого порядка (см. [3], [19]). Имеются следующие *специальные символы*: $\in, \asymp, \emptyset, \alpha$. Символы $\emptyset$ и α обозначают *постоянные*. Буквы $x, X, y, Y, z, Z, u, U, v, V, w, W$ с любым количеством штрихов обозначают *переменные*. *Функциональных символов* нет. Имеются два *предикатных символа*: унарный $\asymp$ и бинарный $\in$.

Термы и формулы определяются обычным для теории первого порядка образом (см. [3], [19]). Термы в рассматриваемом случае – это постоянные и переменные. Элементарные формулы имеют вид $A \asymp$ и $A \in B$, где A и B – термы.

Объекты данных теорий именуются *классами*.

Класс A назовем *подклассом класса* B (в обозначении $A \subset B$), если

$$\forall x (x \in A \implies x \in B).$$

Классы называются *равными* (в обозначении $A = B$), если $(A \subset B) \wedge (B \subset A)$. Это равенство подчиняется следующей аксиоме.

A1 (Аксиома объемности). Выполнено

$$\forall y \forall z ((y = z) \implies (\forall X (y \in X \iff z \in X))).$$

Пусть α – некоторый фиксированный класс. Класс A назовем *классом класса* α ($\equiv \alpha$ -классом), если $A \subset \alpha$. Класс A назовем *множеством класса* α ($\equiv \alpha$ -множеством), если $A \in \alpha$.

Следующая схема аксиом постулирует существование α -классов.

Формула φ называется α -*предикативной* (см. [3, гл. 4, § 1]), если для любых переменных x все знакосочетания $\forall x$ и $\exists x$, входящие в формулу φ , располагаются только в позициях следующих видов:

$$\forall x (x \in \alpha \implies \dots) \quad \text{и} \quad \exists x (x \in \alpha \wedge \dots).$$

AS2 (Аксиомная схема полного охвата). Пусть $\varphi(x)$ – X -предикативная формула такая, что подстановка $\varphi(x||y)$ допустима. Тогда

$$\forall X \exists Z (\forall y ((y \in Z) \iff (y \in X \wedge \varphi(y)))).$$

Отсюда и из аксиомы объемности следует, что соответствующий α -класс единственен. Будем его обозначать через $\{x \in \alpha \mid \varphi(x)\}$.

А3 (Аксиома пустого класса). Выполнено

$$\forall Z ((\forall x (x \notin Z)) \iff (Z = \emptyset)).$$

ЛЕММА 1. *Имеет место утверждение $\forall X (\emptyset \subset X)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формулы $x \in \emptyset$ и $x \in X$ обозначим через φ и ψ соответственно. Применим логическую теорему $\neg\varphi \implies (\varphi \implies \psi)$. Из А3 следует $\neg\varphi$. Отсюда по правилу импликации следует $\varphi \implies \psi$. Применяя правило обобщения, получаем $\forall x (x \in \emptyset \implies x \in X)$.

Класс α назовем *универсальным*, если $\alpha \bowtie$.

А4 (Аксиома равноуниверсальности). Выполнено

$$\forall U \forall V ((U = V) \implies (U \bowtie \iff V \bowtie)).$$

Эта аксиома постулирует, что равные классы являются равноуниверсальными.

А5 (Аксиома инфра-универсальности). Выполнено

$$(\alpha \bowtie) \wedge (\forall U (U \bowtie \implies \alpha \subset U)).$$

Эта аксиома постулирует, что класс α является “наименьшим” универсальным классом. Назовем его *инфра-универсальным* или *инфра-универсумом*.

А6 (Аксиома универсальности). Выполнено

$$\forall X \exists U (U \bowtie \wedge X \in U).$$

Эта аксиома постулирует, что каждый класс A является элементом некоторого универсального класса α .

Последующие аксиомы разъясняют значение понятия универсальности.

А7 (Аксиома транзитивности). Выполнено

$$\forall U (U \bowtie \implies \forall X (X \in U \implies X \subset U)).$$

Эта аксиома постулирует, что, если α – универсальный класс, то каждое α -множество является α -классом.

А8 (Аксиома подмножества). Выполнено

$$\forall U (U \bowtie \implies \forall X \forall Y (X \in U \wedge Y \subset X \implies Y \in U)).$$

Эта аксиома постулирует, что если α – универсальный класс, то подкласс α -множества является α -множеством.

В рамках каждого класса α определим все основные теоретико-множественные конструкции.

Для каждого класса A α -класс

$$\mathcal{P}_\alpha(A) \equiv \{x \in \alpha \mid x \subset A\}$$

назовем *полным α -ансамблем класса A* .

A9 (Аксиома полного ансамбля). Выполнено

$$\forall U (U \bowtie \implies \forall X (X \in U \implies \mathcal{P}_U(X) \in U)).$$

Эта аксиома постулирует, что если α – универсальный класс и A – α -множество, то его полный α -ансамбль $\mathcal{P}_\alpha(A)$ является тоже α -множеством.

Для классов A и B α -класс

$$A \cup_\alpha B \equiv \{x \in \alpha \mid x \in A \vee x \in B\}$$

назовем α -объединением классов A и B ; α -класс

$$A \cap_\alpha B \equiv \{x \in \alpha \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

назовем α -пересечением классов A и B .

A10 (Аксиома бинарного объединения). Выполнено

$$\forall U (U \bowtie \implies \forall X \forall Y (X \in U \wedge Y \in U \implies X \cup_U Y \in U)).$$

Эта аксиома постулирует, что если α – универсальный класс, то бинарное α -объединение α -множеств является α -множеством. Из A10 и A8 следует, что то же самое верно и для бинарного α -пересечения.

Для класса A рассмотрим *одиночный α -класс*

$$\{A\}_\alpha \equiv \{x \in \alpha \mid x = A\}.$$

Для α -множеств A и B назовем α -класс

$$\{A, B\}_\alpha \equiv \{A\}_\alpha \cup_\alpha \{B\}_\alpha$$

неупорядоченной α -парой, а α -класс

$$\langle A, B \rangle_\alpha \equiv \{\{A\}_\alpha, \{A, B\}_\alpha\}_\alpha$$

– *координатной α -парой*.

ЛЕММА 2. Пусть α – универсальный класс и классы a и b являются α -множествами. Тогда $\{a\}_\alpha$, $\{b\}_\alpha$, $\{a, b\}_\alpha$ и $\langle a, b \rangle_\alpha$ являются α -множествами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По A9 $\mathcal{P}_\alpha(a) \in \alpha$. Из $\{a\}_\alpha \subset \mathcal{P}_\alpha(a)$ по A8 следует, что $\{a\}_\alpha$ является α -множеством. Аналогично $\{b\}_\alpha$ является α -множеством.

Из A10 теперь следует, что $\{a, b\}_\alpha \in \alpha$. Отсюда и из $\{b\}_\alpha \in \alpha$ по доказанному свойству следует, что $\langle a, b \rangle_\alpha \in \alpha$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть α – универсальный класс, $a, a', b, b' \in \alpha$ и $\langle a, b \rangle_\alpha = \langle a', b' \rangle_\alpha$. Тогда $a = a'$ и $b = b'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится непосредственным рассмотрением всех возможных случаев (см. [1, гл. 2, § 3]).

Для классов A и B назовем α -класс

$$A *_{\alpha} B \equiv \{x \in \alpha \mid \exists y \exists z (y \in \alpha \wedge y \in A \wedge z \in \alpha \wedge z \in B \wedge x = \langle y, z \rangle_{\alpha})\}$$

координатным α -произведением классов A и B .

Далее A и B обозначают фиксированные α -классы.

α -подкласс u α -класса $A *_{\alpha} B$ будем называть α -соответствием из α -класса A в α -класс B и будем обозначать через u : $A \longrightarrow_{\alpha} B$. Формулу $u \subset A *_{\alpha} B$ будем обозначать также через $u \rightleftharpoons A \longrightarrow_{\alpha} B$.

Для α -соответствия u : $A \longrightarrow_{\alpha} B$ рассмотрим α -классы

$$\begin{aligned} \text{dom}_{\alpha} u &\equiv \{x \in \alpha \mid x \in A \wedge (\exists y (y \in B \wedge \langle x, y \rangle_{\alpha} \in u))\}, \\ \text{rng}_{\alpha} u &\equiv \{y \in \alpha \mid y \in B \wedge (\exists x (x \in A \wedge \langle x, y \rangle_{\alpha} \in u))\}; \end{aligned}$$

α -подкласс

$$B_a \equiv u \langle a \rangle \equiv \{y \in \alpha \mid y \in B \wedge (\langle a, y \rangle_{\alpha} \in u)\}$$

α -класс B будем называть α -классом значений α -соответствия u на элементе $a \in A$; α -подкласс

$$u[A'] \equiv \{y \in \alpha \mid y \in B \wedge (\exists x (x \in A' \wedge \langle x, y \rangle_{\alpha} \in u))\}$$

α -класс B будем называть образом подкласса A' α -класса A относительно α -соответствия u : $A \longrightarrow_{\alpha} B$. Ясно, что $u[\{a\}_{\alpha}] = u \langle a \rangle$ для каждого $a \in A$ и $u[A] = \text{rng}_{\alpha} u$.

Если $u \langle a \rangle$ содержит единственный элемент $b \in B$ (в том смысле, что $\exists y (y \in B \wedge (u \langle a \rangle = \{y\}_{\alpha}))$), то этот единственный элемент b называется значением α -соответствия u на элементе $a \in A$ и обозначается через $u(a)$ или через b_a .

α -соответствие u : $A \longrightarrow_{\alpha} B$ назовем *тотальным*, если $\text{dom}_{\alpha} u = A$, и *однозначным*, если $u \langle a \rangle = \{u(a)\}_{\alpha}$ для каждого $a \in \text{dom}_{\alpha} u$.

α -соответствие u : $A \longrightarrow_{\alpha} B$ будем называть также (многозначной) α -коллекцией α -подклассов B_a α -класса B , индексированной α -классом A . В этом случае класс u и формулу $u \rightleftharpoons A \longrightarrow_{\alpha} B$ будем обозначать также через $(B_a \subset B \mid a \in A)_{\alpha}$ и $u \rightleftharpoons (B_a \subset B \mid a \in A)_{\alpha}$ соответственно.

Тотальное однозначное α -соответствие u : $A \longrightarrow_{\alpha} B$ называется α -отображением из α -класса A в α -класс B и обозначается через u : $A \rightarrow_{\alpha} B$. Формула

$$(u \rightleftharpoons A \longrightarrow_{\alpha} B) \wedge (\text{dom}_{\alpha} u = A) \wedge \forall x (x \in A \implies (\exists y (y \in B \wedge u \langle x \rangle = \{y\}_{\alpha})))$$

обозначается через $u \rightleftharpoons A \rightarrow_{\alpha} B$.

α -отображение u : $A \rightarrow_{\alpha} B$ будем называть также *простой α -коллекцией элементов b_a α -класса B , индексированной α -классом A* . В этом случае класс u и формулу $u \rightleftharpoons A \rightarrow_{\alpha} B$ будем обозначать также через $(b_a \in B \mid a \in A)_{\alpha}$ и $u \rightleftharpoons (b_a \in B \mid a \in A)_{\alpha}$.

Для α -коллекции $u \equiv (B_a \subset B \mid a \in A)_{\alpha}$ рассмотрим α -классы

$$\cup_{\alpha} (B_a \subset B \mid a \in A)_{\alpha} \equiv \{y \in \alpha \mid \exists x (x \in A \wedge y \in B_x)\}$$

и

$$\cap_{\alpha}(B_a \subset B \mid a \in A)_{\alpha} \equiv \{y \in \alpha \mid \forall x (x \in A \implies y \in B_x)\}.$$

Ясно, что

$$\cup_{\alpha}(B_a \subset B \mid a \in A)_{\alpha} = \text{rng}_{\alpha} u.$$

Следующая аксиома постулирует, что если α – универсальный класс и $(B_a \subset B \mid a \in A)_{\alpha}$ – α -коллекция α -множеств B_a из α -класса B , индексированная α -множеством A , то ее α -объединение

$$\cup_{\alpha}(B_a \subset B \mid a \in A)_{\alpha}$$

является α -множеством.

A11 (Аксиома общего объединения). Выполнено

$$\begin{aligned} \forall U (U \bowtie \implies \forall X \forall Y \forall z ((X \in U \wedge Y \subset U \wedge (z \subset X *_U Y) \\ \wedge \forall x (x \in X \implies z \langle x \rangle \in U) \implies (\text{rng}_U z \in U))). \end{aligned}$$

В форме коллекции эта аксиома записывается следующим образом:

A11' (Аксиома общего объединения). Выполнено

$$\begin{aligned} \forall U (U \bowtie \implies \forall X \forall Y \forall z ((X \in U \wedge Y \subset U \wedge (z \equiv (Y_a \subset Y \mid a \in X)_U) \\ \wedge \forall x (x \in X \implies Y_x \in U) \implies (\cup_U (Y_a \subset Y \mid a \in X)_U \in U))). \end{aligned}$$

Следующая аксиома служит для исключения самопринадлежности в универсальном классе α .

A12 (Аксиома регулярности). Выполнено

$$\forall U (U \bowtie \implies \forall X (X \subset U \wedge X \neq \emptyset \implies \exists x (x \in X \wedge x \cap_U X = \emptyset))).$$

Следующая аксиома постулирует существование бесконечного множества.

A13 (Аксиома инфра-бесконечности). Выполнено

$$\exists X (X \in \mathfrak{a} \wedge \emptyset \in X \wedge \forall x (x \in X \implies (x \cup_{\mathfrak{a}} \{x\}_{\mathfrak{a}} \in X))).$$

Последняя аксиома постулирует существование функции выбора в любом универсальном классе α .

A14 (Аксиома выбора). Выполнено

$$\begin{aligned} \forall U (U \bowtie \implies \forall X (X \in U \wedge X \neq \emptyset \implies \exists z ((z \equiv \mathcal{P}_U(X) \setminus \{\emptyset\})_U \rightarrow_U X) \\ \wedge \forall Y (Y \in \mathcal{P}_U(X) \setminus \{\emptyset\}_U \implies z(Y) \in Y))). \end{aligned}$$

Описание математических аксиом и аксиомных схем *локальной теории множеств* (LTS) закончено. Из них следует, что для каждого универсального класса α (в том числе и для инфра-универсума $\mathfrak{a}$) совокупность всех α -классов и всех α -множеств удовлетворяет всем аксиомам NBG (см. [3]). Поэтому α является обычным NBG -универсумом. Это значит, что данная теория включает в себя NBG и, следовательно, ZF . Если отбросить в $AS2$ условие α -предикативности формулы φ , то в этом случае теория будет включать в себя теорию Мостовского–Келли–Морса (MKM) (см. [2, добавление], [19, п. 5.6]).

Рассмотрим в LTS аксиому ω -универсальности

$$U(\omega)_{LTS} \equiv \exists X (\forall U \in X (U \bowtie) \wedge X \neq \emptyset \wedge \forall V \in X \exists W \in X (V \in W)),$$

утверждающую существование бесконечного класса универсальных классов.

Следующая аксиома является отрицанием аксиомы ω -универсальности.

A15 (Аксиома экономности). Выполнено $\neg U(\omega)_{LTS}$.

Локальную теорию множеств вместе с аксиомой A15 назовем *локально-минимальной теорией множеств*.

3. Некоторые начальные конструкции локальной теории множеств. Наша задача теперь – показать, что вся наивная теория категорий может быть адекватно формализована в рамках локальной теории множеств (с предикативной формой аксиомной схемы AS2).

Для этого нам сначала нужно ввести аналог координатной α -пары $\langle A, B \rangle_\alpha$, который может работать также и для собственных α -классов A и B (см. следствие к лемме 2).

А для этого нужно сначала ввести натуральные числа.

Обозначим $\mathfrak{a}$ -множество, существование которого постулируется аксиомой инфрабесконечности, через π .

ЛЕММА 3. Пусть α – универсальный класс. Тогда $\emptyset \in \alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По A13 $\pi \in \mathfrak{a}$ и $\emptyset \in \pi$. Тогда по A7 $\pi \subset \mathfrak{a}$ и, следовательно, $\emptyset \in \mathfrak{a}$. Отсюда в силу A5 $\emptyset \in \alpha$.

Рассмотрим $\mathfrak{a}$ -класс

$$\varkappa \equiv \{Y \in \mathfrak{a} \mid Y \subset \pi \wedge \emptyset \in Y \wedge \forall ya(y \in \mathfrak{a} \wedge y \in Y \implies (y \cup_a \{y\}_\mathfrak{a} \in Y))\}.$$

Так как по AS2 $\varkappa \subset \mathcal{P}_\mathfrak{a}(\pi)$, то из A9 и A8 следует, что $\varkappa$ является $\mathfrak{a}$ -множеством.

Рассмотрим $\mathfrak{a}$ -класс

$$\omega \equiv \{y \in \mathfrak{a} \mid \forall Y(Y \in \mathfrak{a} \wedge Y \in \varkappa \implies y \in Y)\}.$$

ЛЕММА 4. Пусть α – универсальный класс. Тогда $\omega \in \alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По A13 и AS2 следует, что $\pi \in \varkappa$. Если $y \in \omega$, то AS2 и $\pi \in \varkappa$ влекут $y \in \pi$. Значит, $\omega \subset \pi$. По A8 $\omega \in \mathfrak{a}$. Отсюда в силу A5 $\omega \in \alpha$.

В силу этой леммы мы можем назвать класс ω “множеством” натуральных чисел, поскольку ω является множеством в любом универсальном классе.

Рассмотрим начальные натуральные числа

$$0 \equiv \emptyset, \quad 1 \equiv 0 \cup_a \{0\}_\mathfrak{a}, \quad 2 \equiv 1 \cup_a \{1\}_\mathfrak{a}, \quad 3 \equiv 2 \cup_a \{2\}_\mathfrak{a}, \quad \dots$$

Из определения $\varkappa$ и ω следует, что $0, 1, 2, 3, \dots \in \omega$. Из леммы 4 и A7 следует, что $0, 1, 2, 3, \dots \in \alpha$ для каждого универсального класса α .

Последнее утверждение обеспечивает корректность следующих определений.

Пусть α – фиксированный универсальный класс. Пусть даны α -классы $A, A', A'', \dots$, где штрих использован только ради единообразия обозначений.

α -коллекцию $(A_i \subset \alpha \mid i \in 2)_\alpha$ такую, что $A_0 \equiv A$ и $A_1 \equiv A'$, назовем (*многозначной*) *последовательной α -парой α -классов A и A'* и обозначим через $(A, A')_\alpha$; α -коллекцию $(A_i \subset \alpha \mid i \in 3)_\alpha$ такую, что $A_0 = A$, $A_1 = A'$ и $A_2 = A''$, назовем (*многозначной*) *последовательной α -тройкой α -классов A, A' и A''* и обозначим через $(A, A', A'')_\alpha$, и т.д.

Пусть теперь даны α -множества $a, a', a'', \dots$.

Простую α -коллекцию $(a_i \in \alpha \mid i \in 2)_\alpha$ такую, что $a_0 = a$ и $a_1 = a'$, назовем *простой последовательной α -парой α -множеств a и a'* и обозначим через $(a, a')_\alpha$. Простую α -коллекцию $(a_i \in \alpha \mid i \in 3)_\alpha$ такую, что $a_0 = a$, $a_1 = a'$ и $a_2 = a''$, назовем *простой последовательной α -тройкой α -множеств a, a' и a''* и обозначим через $(a, a', a'')_\alpha$, и т.д.

ЛЕММА 5. Пусть α – универсальный класс, A, A', B, B' – α -классы и a, a', b, b' – α -множества. Тогда

- 1) если $(A, A')_\alpha = (B, B')_\alpha$, то $A = B$ и $A' = B'$;
- 2) если $(a, a')_\alpha = (b, b')_\alpha$, то $a = a'$ и $b = b'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Из определения α -классов $u \equiv (A, A')_\alpha$ и $v \equiv (B, B')_\alpha$ следует, что $u \subset 2 *_\alpha \alpha$, $v \subset 2 *_\alpha \alpha$, $u\langle 0 \rangle = A$, $u\langle 1 \rangle = A'$, $v\langle 0 \rangle = B$ и $v\langle 1 \rangle = B'$. Если $x \in A = u\langle 0 \rangle$, то по AS2 $x \in \alpha \wedge \langle 0, x \rangle_\alpha \in u$. Так как $u = v$, то $x \in \alpha \wedge \langle 0, x \rangle_\alpha \in v$. Снова по AS2 $x \in v\langle 0 \rangle = B$. Значит, $A \subset B$. Обратное вложение проверяется аналогично. Таким образом, $A = B$. Второе равенство доказывается аналогично.

2) Из определения α -классов $u \equiv (a, a')_\alpha$ и $v \equiv (b, b')_\alpha$ следует, что $u \equiv 2 \rightarrow_\alpha \alpha$, $v \equiv 2 \rightarrow_\alpha \alpha$, $u(0) = a$, $u(1) = a'$, $v(0) = b$ и $v(1) = b'$. По условию $a = u(0) \in u\langle 0 \rangle$. Поэтому по AS2 $a \in \alpha \wedge \langle 0, a \rangle_\alpha \in u$. Так как $u = v$, то $a \in \alpha \wedge \langle 0, a \rangle_\alpha \in v$. Отсюда по AS2 $a \in v\langle 0 \rangle = \{v(0)\}_\alpha$. Снова применяя AS2, получаем $a = v(0) = b$. Аналогично проверяется, что $a' = b'$.

Из леммы 5 следует, что α -пары $(A, A')_\alpha$ и $(a, a')_\alpha$ обладают свойством α -пары Куратовского $\langle a, a' \rangle_\alpha$ из следствия к лемме 2. Однако в отличие от последней α -пара $(A, A')_\alpha$ работает также и для собственных α -классов.

Используя понятия коллекции α -классов и конечного набора α -классов, определим теперь понятия соответствующих произведений. Пусть дана некоторая α -коллекция $u \equiv (A_i \subset \alpha \mid i \in I)_\alpha$, индексированная непустым α -классом I .

α -класс

$$\prod_\alpha (A_i \subset \alpha \mid i \in I)_\alpha \equiv \{z \in \alpha \mid (z \equiv I \rightarrow_\alpha \alpha) \wedge \forall x (x \in \alpha \wedge x \in I \implies z(x) \in A_x)\}$$

назовем α -произведением α -коллекции u . Если все α -классы A_i не пусты, то из A14 следует, что α -произведение тоже не пусто.

В частном случае для α -классов $A, A', A'', \dots$ α -классы $\prod_\alpha (A, A')_\alpha$, $\prod_\alpha (A, A', A'')_\alpha$, $\dots$ назовем α -произведением α -пары $(A, A')_\alpha$, α -тройки $(A, A', A'')_\alpha$, $\dots$ и обозначим через $A \times_\alpha A'$, $A \times_\alpha A' \times_\alpha A''$, $\dots$.

ЛЕММА 6. Пусть α – универсальный класс и A, A' – α -классы. Тогда

$$A \times_\alpha A' = \{x \in \alpha \mid \exists y \exists y' (y \in \alpha \wedge y \in A \wedge y' \in \alpha \wedge y' \in A' \wedge x = (y, y')_\alpha)\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим левую часть этого равенства через P , а правую – через Q . По определению $(A, A')_\alpha \equiv (A_i \subset \alpha \mid i \in 2)_\alpha$, где $A_0 = A$ и $A_1 = A'$. Поэтому

$$P = \{z \in \alpha \mid (z \equiv 2 \rightarrow_\alpha \alpha) \wedge \forall x (x \in \alpha \wedge x \in 2 \implies z(x) \in A_x)\}.$$

Пусть $p \in P$. Тогда по AS2 $p \equiv 2 \rightarrow_\alpha \alpha$, $p(0) \in A_0$ и $p(1) \in A_1$. Обозначим $p(0)$ через a и a_0 ; соответственно $p(1)$ обозначим через a' и a_1 . Тогда $p \equiv (a_i \in \alpha \mid i \in 2)_\alpha$. Рассмотрим α -пару $(a, a')_\alpha$. По определению $(a, a')_\alpha \equiv (x_i \in \alpha \mid i \in 2)_\alpha$, где $x_0 = a$ и $x_1 = a'$. Так как $x_0 = a$ и $x_1 = a_1$, то $(a, a')_\alpha = (a_i \in \alpha \mid i \in 2)$. Следовательно, $(a, a')_\alpha = p$. Так как $a \in A \subset \alpha$ и $a' \in A' \subset \alpha$, мы приходим к α -предикативной формуле

$$\exists y \exists y' (y \in \alpha \wedge y \in A \wedge y' \in \alpha \wedge y' \in A' \wedge p = (y, y')_\alpha).$$

Используя AS2, мы получаем $p \in Q$. Значит, $P \subset Q$.

Обратно, пусть $q \in Q$. Тогда по AS2 $q = (b, b')_\alpha$ для некоторых $b \in A$ и $b' \in A'$. По определению $(b, b')_\alpha \equiv (y_i \in \alpha \mid i \in 2)_\alpha$, где $y_0 = b$ и $y_1 = b'$. Следовательно, $q \Rightarrow 2 \rightarrow_\alpha \alpha$, $q(0) = y_0 = b \in A$ и $q(1) = y_1 = b' \in A'$. Используя AS2, мы получаем $q \in P$. Значит, $Q \subset P$.

Из этой леммы следует, что α -произведение $A \times_\alpha A'$ сходно с координатным α -произведением $A *_\alpha A'$, но в отличие от последнего является частным случаем общего произведения $\prod_\alpha (A_i \subset \alpha \mid i \in I)_\alpha$.

4. Формализация наивной теории категорий в рамках локальной теории множеств. Под наивным понятием категории понимается понятие метакатегории, данное Маклейном в [14]. Согласно [14] *метакатегория* состоит из *объектов* $\pi, \kappa, \rho, \dots$, *стрелок* $F, G, H, \dots$ и *четырёх операций*

$$F \mapsto \text{dom } F, \quad F \mapsto \text{codom } F, \quad \pi \mapsto i_\pi, \quad (F, G) \mapsto G \circ F,$$

удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям. К сожалению, под это определение подходит даже такой патологический объект, как метакатегория всех метакатегорий.

В связи с внутренней противоречивостью понятия метакатегории и возникла проблема формализации наивной теории категорий. Цель такой формализации состоит в том, чтобы в некоторой точно описанной аксиоматике (теоретико-множественной, стрелочной или смешанной) дать точное определение некоторого объекта, которое

- 1) соответствует наивному представлению о категории;
- 2) является замкнутым относительно всех операций и конструкций наивной теории категорий;
- 3) включает в себя все известные содержательные конкретные примеры категорий;
- 4) отсекает такие наивные патологические примеры, как метакатегория всех метакатегорий.

Используя понятия предыдущих пунктов, мы можем формализовать наивное понятие категории следующим образом.

Для каждого универсального класса α мы определим α -катеорию как большую двусортную алгебраическую систему с двумя отношениями и одной операцией. Для этой цели будем использовать понятия α -коллекции α -классов и α -пары α -классов, введенные ранее.

Рассмотрим символьное α -множество Ω_c , состоящее из трех α -множеств, обозначенных знаками $\#$, $\circ$ и $\leftrightarrow$. Эти знаки будем называть *знаком разбиения*, *знаком композиции* и *знаком идентификации* соответственно. Множество Ω_c назовем *сигнатурой категории*. Это понятие аналогично таким понятиям, как *сигнатура абелевой группы* $\Omega_g \equiv \{\{0\}, -, +\}$, *сигнатура кольца* $\Omega_r \equiv \{\{0\}, -, +, \cdot\}$ и т.п.

Так как по A5 $\alpha \subset \alpha$, то Ω_c является также α -множеством для каждого универсального класса α .

Зафиксируем некоторый универсальный класс α .

Рассмотрим α -пару $A \equiv (\text{Obj}, \text{Arr})_\alpha$, состоящую из некоторых α -классов Obj и Arr . Рассмотрим также α -коллекцию

$$s_c \equiv (A_\omega \subset \alpha \mid \omega \in \Omega_c)_\alpha$$

с тремя компонентами $A_{\#}$, $A_{\circ}$ и $A_{\leftrightarrow}$. Далее для удобства эти компоненты будем обозначать в более привычном перевернутом виде $\#_A$, $\circ_A$ и $\leftrightarrow_A$, означающем *разбиение в A* , *композицию в A* и *идентификацию в A* . Это обозначение удобно потому, что при выборе другой α -пары B мы будем иметь $\#_B$, $\circ_B$ и $\leftrightarrow_B$.

Рассмотрим α -класс $\mathcal{C} \equiv (A, s_c)$. Классы A и s_c будем называть соответственно *носителем* и *структурой класса $\mathcal{C}$* . Классы Obj и Arr будем называть соответственно *классом объектов* и *классом стрелок класса $\mathcal{C}$* .

Дадим теперь определение α -категории. Мы вынуждены привести точное формальное определение по той причине, что оно будет использовано далее в статье. Для того, чтобы сделать его более понятным, мы разобьем его на отдельные части и снабдим каждую часть параллельным комментарием с использованием стандартных обозначений и понятий.

α -класс $\mathcal{C}$ назовем α -категорией, если

$$\text{cat}_{\alpha}(\mathcal{C}) \equiv \text{cat}_{\alpha}(X \parallel \mathcal{C}),$$

где аксиома α -категории $\text{cat}_{\alpha}(X)$ со свободной переменной X имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{cat}_{\alpha}(X) \equiv & (X \subset \alpha) \wedge \exists Y', Y'', Z (Y', Y'', Z \subset \alpha \wedge X = ((Y', Y'')_{\alpha}, Z)_{\alpha} \\ & \wedge (Z \Rightarrow \Omega_c \prec_{\alpha} \alpha) \wedge A_c 1(Y', Y'', Z) \wedge \dots \wedge A_c 7(Y', Y'', Z)), \end{aligned}$$

где формулы $A_c 1$ – $A_c 7$ приводятся ниже.

(Свойство $\text{cat}_{\alpha}(\mathcal{C})$ означает, что $\mathcal{C} \subset \alpha$, $\mathcal{C} = (A, s_c)_{\alpha}$, $A = (\text{Obj}, \text{Arr})_{\alpha}$, $s_c = (\omega_A \subset \alpha \mid \omega \in \Omega)_{\alpha}$, а α -классы Obj , Arr , $\#_A \equiv s_c(\#)$, $\circ_A \equiv s_c(\circ)$ и $\leftrightarrow_A \equiv s_c(\leftrightarrow)$ обладают приводимыми ниже свойствами $P_c 1$ – $P_c 7$.)

Формула $A_c 1$:

$$A_c 1 \equiv (Z(\#) \subset (Y' \times_{\alpha} Y') *_{\alpha} Y'') \wedge (Z(\circ) \subset (Y'' \times_{\alpha} Y'') *_{\alpha} Y'') \wedge (Z(\leftrightarrow) \subset Y' *_{\alpha} Y'').$$

(Свойство $P_c 1 \equiv A_c 1(\text{Obj}, \text{Arr}, s_c)$ означает, что компоненты $\#_A$, $\circ_A$ и $\leftrightarrow_A$ структуры s_c являются двусортными алгебраическими α -соответствиями.)

Формула $A_c 2$:

$$\begin{aligned} A_c 2 \equiv & (\text{rng}_{\alpha} Z(\#) = Y'') \wedge (\forall x, y \in \alpha (x, y \in Y' \times_{\alpha} Y' \wedge x \neq y \\ & \implies Z(\#)\langle x \rangle \cap_{\alpha} Z(\#)\langle y \rangle = \emptyset)). \end{aligned}$$

(Свойство $P_c 2 \equiv A_c 2(\text{Obj}, \text{Arr}, s_c)$ означает, что α -класс стрелок Arr является объединением α -коллекции

$$(\text{Arr}(\pi, \varkappa) \subset \text{Arr} \mid (\pi, \varkappa)_{\alpha} \in \text{Obj} \times_{\alpha} \text{Obj})_{\alpha}$$

попарно непересекающихся α -подклассов $\text{Arr}(\pi, \varkappa)$, состоящих из стрелок $F: \pi \dot{\rightarrow} \varkappa$ из объекта π в объект $\varkappa$ для всех α -пар $(\pi, \varkappa)_{\alpha}$ объектов $\pi, \varkappa \in \text{Obj}$.)

Формула $A_c 3$:

$$\begin{aligned} A_c 3 \equiv & (\text{dom}_{\alpha} Z(\circ) = \{x \in \alpha \mid \exists x', y', z', y'', z'' \in \alpha (x', y', z' \in Y' \\ & \wedge y'', z'' \in Y'' \wedge (y'' \in Z(\#)\langle (x', y')_{\alpha} \rangle \wedge z'' \in Z(\#)\langle (y', z')_{\alpha} \rangle) \\ & \wedge (x = (y'', z'')_{\alpha})\}) \wedge (Z(\circ) \Rightarrow \text{dom}_{\alpha} Z(\circ) \rightarrow_{\alpha} Y''). \end{aligned}$$

(Свойство $P_c3 \equiv A_c3(\text{Obj}, \text{Arr}, s_c)$ означает, что композиция $\circ_A$ является частично определенной бинарной операцией и стрелка $G \circ F \equiv \circ_A(F, G)$ определена только для стрелок вида $F: \pi \dot{\rightarrow} \varkappa$ и $G: \varkappa \dot{\rightarrow} \rho$.)

Формула A_c4 :

$$A_c4 \equiv (Z\langle \leftrightarrow \rangle = (Y' \rightarrow_\alpha Y'') \wedge \forall x' \in \alpha(x' \in Y' \implies (Z\langle \leftrightarrow \rangle(x') \in Z\langle \# \rangle\langle (x', x')_\alpha \rangle))).$$

(Свойство $P_c4 \equiv A_c4(\text{Obj}, \text{Arr}, s_c)$ означает, что идентификация $\leftrightarrow_A$ является α -отображением из Obj в Arr , сопоставляющим каждому объекту π некоторую стрелку $i_\pi \equiv \leftrightarrow_A(\pi)$ из π в π .)

Формула A_c5 :

$$A_c5 \equiv \forall x', y', z' \in \alpha(x', y', z' \in Y' \implies Z\langle \circ \rangle[Z\langle \# \rangle\langle (x', y')_\alpha \rangle \times_\alpha Z\langle \# \rangle\langle (y', z')_\alpha \rangle] \subset Z\langle \# \rangle\langle (x', z')_\alpha \rangle).$$

(Свойство $P_c5 \equiv A_c5(\text{Obj}, \text{Arr}, s_c)$ означает, что для стрелок $F: \pi \dot{\rightarrow} \varkappa$ и $G: \varkappa \dot{\rightarrow} \rho$ их композиция дает стрелку $G \circ F: \pi \dot{\rightarrow} \rho$.)

Формула A_c6 :

$$A_c6 \equiv \forall x', y', z', u', x'', y'', z'' \in \alpha(x', y', z', u' \in Y' \wedge x'', y'', z'' \in Y'' \wedge (x'' \in Z\langle \# \rangle\langle (x', y')_\alpha \rangle) \wedge (y'' \in Z\langle \# \rangle\langle (y', z')_\alpha \rangle) \wedge (z'' \in Z\langle \# \rangle\langle (z', u')_\alpha \rangle) \implies (Z\langle \circ \rangle((Z\langle \circ \rangle((x'', y'')_\alpha), z'')_\alpha) = Z\langle \circ \rangle((x'', Z\langle \circ \rangle((y'', z'')_\alpha))_\alpha))).$$

(Свойство $P_c6 \equiv A_c6(\text{Obj}, \text{Arr}, s_c)$ выражает *свойство ассоциативности* $H \circ (G \circ F) = (H \circ G) \circ F$ для стрелок $F: \pi \dot{\rightarrow} \varkappa$, $G: \varkappa \dot{\rightarrow} \rho$ и $H: \rho \dot{\rightarrow} \sigma$.)

Формула A_c7 :

$$A_c7 \equiv \forall x', y', z', x'', y'' \in \alpha(x', y', z' \in Y' \wedge x'', y'' \in Y'' \wedge (x'' \in Z\langle \# \rangle\langle (y', x')_\alpha \rangle) \wedge (y'' \in Z\langle \# \rangle\langle (x', z')_\alpha \rangle) \implies ((Z\langle \circ \rangle((x'', Z\langle \leftrightarrow \rangle(x''))_\alpha) = x'') \wedge (Z\langle \circ \rangle((Z\langle \leftrightarrow \rangle(x'), y'')_\alpha) = y''))).$$

(Свойство $P_c7 \equiv A_c7(\text{Obj}, \text{Arr}, s_c)$ выражает *свойство тождественности стрелки* $i_\pi: \pi \dot{\rightarrow} \pi$ в том смысле, что $i_\pi \circ F = F$ и $G \circ i_\pi = G$ для стрелок $F: \varkappa \dot{\rightarrow} \pi$ и $G: \pi \dot{\rightarrow} \rho$.)

α -категория $\mathcal{C}$ называется *малой*, если $\mathcal{C}$ является α -множеством. В противном случае она называется *большой*.

Далее определения будем давать в более свободной форме. При необходимости они могут быть записаны в таком же строгом виде, как и определение α -категории.

Формализуем теперь наивное понятие функтора. Пусть даны α -категории

$$\mathcal{C} \equiv ((\text{Obj } \mathcal{C}, \text{Arr } \mathcal{C})_\alpha, s_c)_\alpha \quad \text{и} \quad \mathcal{D} \equiv ((\text{Obj } \mathcal{D}, \text{Arr } \mathcal{D})_\alpha, t_c)_\alpha.$$

α -класс $\Phi \equiv (\phi, \phi_\alpha)_\alpha$ назовем (*ковариантным*) α -функтором из α -категории $\mathcal{C}$ в α -категорию $\mathcal{D}$, если α -классы ϕ и ϕ_α входят в следующие формулы (записанные неформальным образом):

- формула $P_f1: \phi \Rightarrow \text{Obj } \mathcal{C} \rightarrow_\alpha \text{Obj } \mathcal{D}$;
- формула $P_f2: \phi_\alpha \Rightarrow \text{Arr } \mathcal{C} \rightarrow_\alpha \text{Arr } \mathcal{D}$;

- формула P_f3 : $\phi_a(F) \in \text{Arr}\mathcal{D}(\phi(\pi), \phi(\kappa))$ для всех объектов $\pi, \kappa \in \text{Obj } \mathcal{C}$ и каждой стрелки $F \in \text{Arr}_{\mathcal{C}}(\pi, \kappa)$;
- формула P_f4 : $\phi_a(G \circ F) = \phi_a(G) \circ \phi_a(F)$ для всех объектов $\pi, \kappa, \rho \in \text{Obj } \mathcal{C}$ и каждых стрелок $F \in \text{Arr}_{\mathcal{C}}(\pi, \kappa)$ и $G \in \text{Arr}_{\mathcal{C}}(\kappa, \rho)$;
- формула P_f5 : $\phi_a(i_\pi) = i_{\phi(\pi)}$ для каждого объекта $\pi \in \text{Obj } \mathcal{C}$.

α -функторы являются в точности гомоморфизмами между α -категориями как алгебраическими системами.

α -функтор Φ из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{D}$ будем обозначать через $\Phi: \mathcal{C} \xrightarrow{f}_\alpha \mathcal{D}$. Формулу, выражающую для α -класса Φ свойство быть α -функтором из α -категории $\mathcal{C}$ в α -категорию $\mathcal{D}$, будем обозначать через $\Phi \equiv \mathcal{C} \xrightarrow{f}_\alpha \mathcal{D}$.

α -тройку $F \equiv (\Phi, \mathcal{C}, \mathcal{D})_\alpha$ будем называть (*функторной*) *стрелкой*, определяемой α -категориями $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ и α -функтором $\Phi: \mathcal{C} \xrightarrow{f}_\alpha \mathcal{D}$.

Композиция α -функторов

$$\Phi \equiv (\phi, \phi_a)_\alpha: \mathcal{C} \xrightarrow{f}_\alpha \mathcal{D} \quad \text{и} \quad \Psi \equiv (\psi, \psi_a)_\alpha: \mathcal{D} \xrightarrow{f}_\alpha \mathcal{E}$$

есть α -функтор

$$\Psi \circ \Phi \equiv (\psi \circ \phi, \psi_a \circ \phi_a)_\alpha: \mathcal{C} \xrightarrow{f}_\alpha \mathcal{E}.$$

Эта композиция задает *композицию стрелок* $F \equiv (\Phi, \mathcal{C}, \mathcal{D})_\alpha$ и $G \equiv (\Psi, \mathcal{D}, \mathcal{E})_\alpha$ как стрелку $G \circ F \equiv (\Psi \circ \Phi, \mathcal{C}, \mathcal{E})_\alpha$.

Тождественный α -функтор для α -категории $\mathcal{C}$ есть α -функтор $I_{\mathcal{C}} \equiv (\text{id}_{\text{Obj } \mathcal{C}}, \text{id}_{\text{Arr } \mathcal{C}})_\alpha$, состоящий из двух тождественных отображений для α -классов $\text{Obj } \mathcal{C}$ и $\text{Arr } \mathcal{C}$ соответственно. Этот α -функтор задает *тождественную стрелку* для α -категории $\mathcal{C}$ как стрелку $i_{\mathcal{C}} \equiv (I_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}, \mathcal{C})_\alpha$.

Формализуем теперь наивное понятие естественного преобразования. Пусть даны фиксированные α -категории $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ и два α -функтора $\Phi: \mathcal{C} \xrightarrow{f}_\alpha \mathcal{D}$ и $\Psi: \mathcal{C} \xrightarrow{f}_\alpha \mathcal{D}$.

α -класс

$$T \equiv (t_\pi \in \text{Arr } \mathcal{D} \mid \pi \in \text{Obj } \mathcal{C})_\alpha$$

назовем (*естественным*) α -преобразованием из α -функтора $\Phi \equiv (\phi, \phi_a)_\alpha$ в α -функтор $\Psi \equiv (\psi, \psi_a)_\alpha$, если

- 1) $t_\pi \in \text{Arr}_{\mathcal{D}}(\phi(\pi), \psi(\pi))$ для каждого объекта π из $\text{Obj } \mathcal{C}$;
- 2) $\psi_a(F) \circ t_\pi = t_\kappa \circ \phi_a(F)$ для каждых объектов π, κ из $\text{Obj } \mathcal{C}$ и каждой стрелки F из $\text{Arr}_{\mathcal{C}}(\pi, \kappa)$.

α -преобразование из Φ в Ψ будем обозначать через $T: \Phi \xrightarrow{t}_\alpha \Psi$. Формулу, выражающую для α -класса T свойство быть α -преобразованием из α -функтора Φ в α -функтор Ψ , будем обозначать через $T \equiv \Phi \xrightarrow{t}_\alpha \Psi$.

α -тройку $F \equiv (T, \Phi, \Psi)_\alpha$ будем называть (*преобразовательной*) *стрелкой*, определяемой α -функторами Φ и Ψ и α -преобразованием $T: \Phi \xrightarrow{t}_\alpha \Psi$.

Композиция α -преобразований $T \equiv (t_\pi \in \text{Arr } \mathcal{D} \mid \pi \in \text{Obj } \mathcal{C})_\alpha: \Phi \xrightarrow{t}_\alpha \Psi$ и $U \equiv (u_\pi \in \text{Arr } \mathcal{D} \mid \pi \in \text{Obj } \mathcal{C})_\alpha: \Psi \xrightarrow{t}_\alpha \Omega$ есть α -преобразование $U \circ T \equiv (u_\pi \circ t_\pi \in \text{Arr } \mathcal{D} \mid \pi \in \text{Obj } \mathcal{C})_\alpha: \Phi \xrightarrow{t}_\alpha \Omega$. Эта композиция задает *композицию стрелок* $F \equiv (T, \Phi, \Psi)_\alpha$ и $G \equiv (U, \Psi, \Omega)_\alpha$ как стрелку $G \circ F \equiv (U \circ T, \Phi, \Omega)_\alpha$.

Тождественное α -преобразование для α -функтора $\Phi: \mathcal{C} \xrightarrow{f} \mathcal{D}$ есть α -преобразование

$$I_\Phi \equiv (i_{\Phi(\pi)} \in \text{Arr } \mathcal{D} \mid \pi \in \text{Obj } \mathcal{C})_\alpha: \Phi \xrightarrow{t} \Phi.$$

Это α -преобразование задает *тождественную стрелку для α -функтора Φ* как стрелку $i_\Phi \equiv (I_\Phi, \Phi, \Phi)_\alpha$.

Приведенные определения показывают, что в рамках универсального класса α естественно определяются необходимые первичные понятия теории категорий. Отметим, что соответствующие определения без каких-либо изменений можно дать и в универсумах теорий *NBG* или *MKM*.

Покажем теперь, как в рамках локальной теории множеств можно формализовать операции наивной теории категорий, известные как “категория категорий” и “категория функторов” (чего нельзя, как известно, сделать в *NBG* и *MKM*).

Поскольку нам потребуются “большие” совокупности α -классов, не существующие в самом универсальном классе α , возьмем любой “бóльший” универсальный класс β , т.е. такой, что $\alpha \in \beta$. В силу аксиомы универсальности A6 это можно сделать.

Пользуясь тем, что аксиома α -категории $\text{cat}_\alpha(X)$ выписана в строгом и полном виде, легко убедиться, что аксиома $\text{cat}_\alpha(X)$ является β -предикативной (точнее, может быть в силу $\alpha \in \beta$ приведена к β -предикативной форме). Поэтому в силу AS2 существует β -класс

$$\text{Cat}_\alpha^\beta \equiv \{X \in \beta \mid \text{cat}_\alpha(X)\},$$

состоящий из всех α -категорий $\mathcal{C}$.

Аналогичным образом можно убедиться, что *аксиома α -функторной стрелки*

$$\text{arr}_\alpha(U) \equiv (U \subset \alpha) \wedge \exists X, Y, Z (\text{cat}_\alpha(X) \wedge \text{cat}_\alpha(Y) \wedge Z \Rightarrow X \xrightarrow{f} Y \wedge U = (Z, X, Y)_\alpha)$$

тоже является β -предикативной. Поэтому в силу AS2 существует β -класс

$${}^f\text{Arr}_\alpha^\beta \equiv \{U \in \beta \mid \text{arr}_\alpha(U)\},$$

состоящий из всех α -функторных стрелок $F \equiv (\Phi, \mathcal{C}, \mathcal{D})_\alpha$.

Если $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ – α -категории, то из $\alpha \in \beta$ и аксиомы подмножества A8 следует, что $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ являются β -множествами. Поэтому мы можем рассмотреть простую β -пару $(\mathcal{C}, \mathcal{D})_\beta$. Для такой пары также существует β -класс

$${}^f\text{Arr}_\alpha^\beta(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \equiv \{U \in \beta \mid \exists Z (Z \Rightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{f} \mathcal{D} \wedge U = (Z, \mathcal{C}, \mathcal{D})_\alpha)\},$$

состоящий из всех α -функторных стрелок $F \equiv (\Phi, \mathcal{C}, \mathcal{D})_\alpha$ из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{D}$.

Используя этот β -класс и аксиомную схему AS2 мы можем корректно определить следующие β -классы:

$$\begin{aligned} \zeta &\equiv \{x \in \beta \mid \exists X, Y, U \in \beta (X, Y \in \text{Cat}_\alpha^\beta \wedge U \in {}^f\text{Arr}_\alpha^\beta(X, Y) \wedge x = \langle (X, Y)_\beta, U \rangle_\beta)\} \\ &\subset (\text{Cat}_\alpha^\beta \times_\beta \text{Cat}_\alpha^\beta) *_\beta {}^f\text{Arr}_\alpha^\beta, \\ \eta &\equiv \{x \in \beta \mid \exists X, Y, Z, U, V, W \in \beta (X, Y, Z \in \text{Cat}_\alpha^\beta \wedge U \in {}^f\text{Arr}_\alpha^\beta(X, Y) \\ &\quad \wedge V \in {}^f\text{Arr}_\alpha^\beta(Y, Z) \wedge W \in {}^f\text{Arr}_\alpha^\beta(X, Z) \wedge W = V \circ U \wedge x = \langle (U, V)_\beta, W \rangle_\beta)\} \\ &\subset ({}^f\text{Arr}_\alpha^\beta \times_\beta {}^f\text{Arr}_\alpha^\beta) *_\beta {}^f\text{Arr}_\alpha^\beta, \end{aligned}$$

$$\vartheta \equiv \{x \in \beta \mid \exists X, U \in \beta (X \in \text{Cat}_\alpha^\beta \wedge U \in {}^f\text{Arr}_\alpha^\beta(X, X) \wedge U = i_X \wedge x = \langle X, U \rangle_\beta)\} \\ \subset \text{Cat}_\alpha^\beta *_\beta {}^f\text{Arr}_\alpha^\beta.$$

Имея компоненты ζ , η и ϑ , мы можем рассмотреть β -подкласс

$$s \equiv \{x \in \beta \mid \exists y, z \in \beta (y \in \Omega_c \wedge x = \langle y, z \rangle_\beta \wedge (y = \# \implies z \in \zeta) \\ \wedge (y = \circ \implies z \in \eta) \wedge (y = \leftrightarrow \implies z \in \vartheta))\}$$

β -класса $\Omega_c *_\beta \beta$.

Наконец, рассмотрим β -класс

$$\mathbb{C}_\alpha^\beta \equiv ((\text{Cat}_\alpha^\beta, {}^f\text{Arr}_\alpha^\beta)_\beta, s)_\beta$$

с носителем $A \equiv (\text{Cat}_\alpha^\beta, {}^f\text{Arr}_\alpha^\beta)_\beta$ и структурой s .

ТЕОРЕМА 1. β -класс $\mathbb{C}_\alpha^\beta$ является β -категорией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения следует, что s является β -соответствием из Ω_c в β .

Проверим, что $s\langle \# \rangle = \zeta$. Пусть $A \in s\langle \# \rangle$. Это значит, что $\langle \#, A \rangle_\beta \in s$. По AS2 $\langle \#, A \rangle_\beta = \langle \omega, B \rangle_\beta$ для некоторых $\omega \in \Omega_c$ и $B \in \beta$. По следствию к лемме 2 $\omega = \#$ и $A = B$. Снова применяя AS2, получаем $B \in \zeta$. Следовательно, $A \in \zeta$. Обратно, пусть $C \in \zeta \subset \beta$. Рассмотрим β -множество $r \equiv \langle \#, C \rangle_\beta \in \Omega_c *_\beta \beta$. По AS2 $r \in s$ и, значит, $C \in s\langle \# \rangle$.

Аналогично проверяется, что $s\langle \circ \rangle = \eta$ и $s\langle \leftrightarrow \rangle = \vartheta$. Из этих равенств и определения β -классов ζ , η и ϑ следует, что свойство

$$P_c 1 \equiv A_c 1(\text{Cat}_\alpha^\beta, {}^f\text{Arr}_\alpha^\beta, s)$$

выполнено.

Проверим, что классы $L \equiv \zeta\langle (\mathcal{C}, \mathcal{D})_\beta \rangle$ и $R \equiv {}^f\text{Arr}_\alpha^\beta(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ равны. Если $l \in L$, то $\langle (\mathcal{C}, \mathcal{D})_\beta, l \rangle_\beta \in \zeta$. Значит, по AS2 $\langle (\mathcal{C}, \mathcal{D})_\beta, l \rangle_\beta = \langle (\mathcal{C}', \mathcal{D}')_\beta, F \rangle_\beta$ для некоторых α -категорий $\mathcal{C}'$ и $\mathcal{D}'$ и некоторой α -функторной стрелки $F \equiv (\Phi, \mathcal{C}', \mathcal{D}')_\alpha$. По следствию к лемме 2 $\langle (\mathcal{C}, \mathcal{D})_\beta \rangle = \langle (\mathcal{C}', \mathcal{D}')_\beta \rangle$ и $l = F$. По лемме 5 $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$ и $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$. Значит, $l \in R$. Обратно, если $r \in R$, то по AS2 $\langle (\mathcal{C}, \mathcal{D})_\beta, r \rangle_\beta \in \zeta$. Значит, $r \in L$. Таким образом, $L = R$.

Из доказанного следует, что $s\langle \# \rangle\langle (\mathcal{C}, \mathcal{D})_\beta \rangle = {}^f\text{Arr}_\alpha^\beta(\mathcal{C}, \mathcal{D})$.

Из определения ясно, что

$${}^f\text{Arr}_\alpha^\beta = \cup({}^f\text{Arr}_\alpha^\beta(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \mid (\mathcal{C}, \mathcal{D})_\beta \in \text{Cat}_\alpha^\beta \times_\beta \text{Cat}_\alpha^\beta).$$

Проверим, что классы $L \equiv \text{rng}_\beta \zeta$ и $R \equiv {}^f\text{Arr}_\alpha^\beta$ равны. Если $l \in L$, то $\langle p, l \rangle_\beta \in \zeta$ для некоторого $p \in \text{Cat}_\alpha^\beta \times_\beta \text{Cat}_\alpha^\beta$. Значит, по AS2 $\langle p, l \rangle_\beta = \langle (\mathcal{C}, \mathcal{D})_\beta, F \rangle_\beta$ для некоторых α -категорий $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ и некоторой стрелки $F \equiv (\Phi, \mathcal{C}, \mathcal{D})_\alpha$. По следствию к лемме 2 $l = F \in R$. Обратно, если $r \in R$, то $r \in {}^f\text{Arr}_\alpha^\beta(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ для некоторых α -категорий $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$. По AS2 $\langle (\mathcal{C}, \mathcal{D})_\beta, r \rangle_\beta \in \zeta$. Значит, $r \in L$. Таким образом, $L = R$.

Из доказанного следует, что $\text{rng}_\beta s\langle \# \rangle = {}^f\text{Arr}_\alpha^\beta$.

Пусть $p \equiv (\mathcal{C}, \mathcal{D})_\beta \neq (\mathcal{C}', \mathcal{D}')_\beta \equiv q$ для некоторых α -категорий $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$. По следствию к лемме 2 или $\mathcal{C} \neq \mathcal{C}'$, или $\mathcal{D} \neq \mathcal{D}'$. Если $F \in s\langle \# \rangle\langle p \rangle = {}^f\text{Arr}_\alpha^\beta(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ и

$G \in s\langle\#\rangle\langle q\rangle = {}^f\text{Arr}_\alpha^\beta(\mathcal{C}', \mathcal{D}')$, то $F = (\Phi, \mathcal{C}, \mathcal{D})_\alpha$ и $G = (\Psi, \mathcal{C}', \mathcal{D}')_\alpha$ для некоторых α -функторов $\Phi: \mathcal{C} \xrightarrow{f}_\alpha \mathcal{D}$ и $\Psi: \mathcal{C}' \xrightarrow{f}_\alpha \mathcal{D}'$. Поэтому в любом случае по лемме 5 $F \neq G$. Это означает, что $s\langle\#\rangle\langle p\rangle \cap s\langle\#\rangle\langle q\rangle = \emptyset$. Из доказанного следует, что свойство

$$P_c2 \equiv A_c2(\text{Cat}_\alpha^\beta, {}^f\text{Arr}_\alpha^\beta, s)$$

выполнено.

Проверим выполнимость свойства

$$P_c3 \equiv A_c3(\text{Cat}_\alpha^\beta, {}^f\text{Arr}_\alpha^\beta, s).$$

Если $l \in L \equiv \text{dom}_\beta s\langle\circ\rangle = \text{dom}_\beta \eta$, то $\langle l, a \rangle_\beta \in \eta$ для некоторого $a \in {}^f\text{Arr}_\alpha^\beta$. Поэтому по AS2 $\langle l, a \rangle_\beta = \langle (F, G)_\beta, H \rangle_\beta$ для некоторых α -категорий $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ и $\mathcal{E}$ и некоторых α -функторных стрелок $F \equiv (\Phi, \mathcal{C}, \mathcal{D})_\alpha$, $G \equiv (\Psi, \mathcal{D}, \mathcal{E})_\alpha$ и $H \equiv (\Omega, \mathcal{C}, \mathcal{E})_\alpha$ таких, что $H = G \circ F$. По следствию к лемме 2 $l = (F, G)_\beta$ и $a = H$. Как установлено выше, $F \in s\langle\#\rangle\langle (\mathcal{C}, \mathcal{D})_\beta \rangle$ и $G \in s\langle\#\rangle\langle (\mathcal{D}, \mathcal{E})_\beta \rangle$.

Это значит, что $H \in s\langle\circ\rangle\langle l \rangle$ и

$$\begin{aligned} l \in \{x \in \alpha \mid \exists x', y', z', y'', z'' \in \alpha(x', y', z' \in \text{Cat}_\alpha^\beta \\ \wedge y'', z'' \in {}^f\text{Arr}_\alpha^\beta \wedge (y'' \in s\langle\#\rangle\langle (x', y')_\beta \rangle) \\ \wedge (z'' \in s\langle\#\rangle\langle (y', z')_\beta \rangle) \wedge (x = (y'', z'')_\beta))\} \equiv R. \end{aligned}$$

Обратно, если $r \in R$, то $r = (F, G)_\beta$ для некоторых α -категорий $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ и $\mathcal{E}$ и некоторых α -функторных стрелок $F \in s\langle\#\rangle\langle (\mathcal{C}, \mathcal{D})_\beta \rangle = {}^f\text{Arr}_\alpha^\beta(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ и $G \in s\langle\#\rangle\langle (\mathcal{D}, \mathcal{E})_\beta \rangle = {}^f\text{Arr}_\alpha^\beta(\mathcal{D}, \mathcal{E})$. Рассмотрим α -функторную стрелку $H \equiv G \circ F \in {}^f\text{Arr}_\alpha^\beta(\mathcal{C}, \mathcal{E})$. По AS2 $\langle r, H \rangle_\beta = \langle (F, G)_\beta, H \rangle_\beta \in \eta = s\langle\circ\rangle$. Значит, $r \in L$. Таким образом, $L = R$.

Проверим теперь, что соответствие $s\langle\circ\rangle$ является однозначным. Пусть $l \in L$ и $a, a' \in s\langle\circ\rangle\langle l \rangle = \eta\langle l \rangle$. Тогда $\langle l, a \rangle_\beta \in \eta$ и $\langle l, a' \rangle_\beta \in \eta$. По AS2 $\langle l, a \rangle_\beta = \langle (F, G)_\beta, H \rangle_\beta$ и $\langle l, a' \rangle_\beta = \langle (F', G')_\beta, H' \rangle_\beta$ для некоторых α -категорий $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{C}'$, $\mathcal{D}'$ и $\mathcal{E}'$ и некоторых α -функторных стрелок $F \equiv (\Phi, \mathcal{C}, \mathcal{D})_\alpha$, $G \equiv (\Psi, \mathcal{D}, \mathcal{E})_\alpha$, $H \equiv (\Omega, \mathcal{C}, \mathcal{E})_\alpha$, $F' \equiv (\Phi', \mathcal{C}', \mathcal{D}')_\alpha$, $G' \equiv (\Psi', \mathcal{D}', \mathcal{E}')_\alpha$ и $H' \equiv (\Omega', \mathcal{C}', \mathcal{E}')_\alpha$ таких, что $H \equiv G \circ F$ и $H' \equiv G' \circ F'$. По следствию к лемме 2 $l = (F, G)_\beta$, $l = (F', G')_\beta$, $a = H$ и $a' = H'$. По лемме 5 $F = F'$ и $G = G'$. Значит, $a = H = G \circ F = G' \circ F' = H' = a'$. Таким образом, $s\langle\circ\rangle$ является α -отображением из $\text{dom}_\alpha s\langle\circ\rangle$ в ${}^f\text{Arr}_\alpha^\beta$. Это заканчивает проверку справедливости свойства P_c3 . Более того, мы получаем равенство

$$s\langle\circ\rangle\langle (F, G)_\beta \rangle = s\langle\circ\rangle\langle l \rangle = H = G \circ F.$$

Проверим справедливость свойства

$$P_c4 \equiv A_c4(\text{Cat}_\alpha^\beta, {}^f\text{Arr}_\alpha^\beta, s).$$

Если $l \in L \equiv \text{dom}_\beta s\langle\leftrightarrow\rangle = \text{dom}_\beta \vartheta$, то $\langle l, a \rangle_\beta \in \vartheta$ для некоторого $a \in {}^f\text{Arr}_\alpha^\beta$. Поэтому по AS2 $\langle l, a \rangle_\beta = \langle \mathcal{C}, i_{\mathcal{C}} \rangle_\beta$ для некоторой α -категории $\mathcal{C}$. По следствию к лемме 2 $l = \mathcal{C} \in \text{Cat}_\alpha^\beta \equiv R$. Обратно, если $\mathcal{C} \in R$, то по AS2 $\langle \mathcal{C}, i_{\mathcal{C}} \rangle_\beta \in \vartheta$. Следовательно, $\mathcal{C} \in \text{dom}_\beta \vartheta = L$. Это означает, что $L = R$, т.е. β -соответствие $s\langle\leftrightarrow\rangle$ является тотальным.

Пусть $l \in L$ и $a, a' \in s\langle \leftrightarrow \rangle(l) = \vartheta(l)$. Тогда $\langle l, a \rangle_\beta \in \vartheta$ и $\langle l, a' \rangle_\beta \in \vartheta$. По AS2 $\langle l, a \rangle_\beta = \langle \mathcal{C}, i_{\mathcal{C}} \rangle_\beta$ и $\langle l, a' \rangle_\beta = \langle \mathcal{C}', i_{\mathcal{C}'} \rangle_\beta$ для некоторых α -категорий $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}'$. По следствию к лемме 2 $l = \mathcal{C}$, $a = i_{\mathcal{C}}$, $l = \mathcal{C}'$ и $a' = i_{\mathcal{C}'}$. Следовательно, $a = a'$, т.е. β -соответствие $s\langle \leftrightarrow \rangle$ является однозначным. Значит, оно является β -отображением из Cat_α^β в ${}^f\text{Arr}_\alpha^\beta$ таким, что

$$s\langle \leftrightarrow \rangle(\mathcal{C}) = i_{\mathcal{C}} \in {}^f\text{Arr}_\alpha^\beta(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = s\langle \# \rangle(\langle \mathcal{C}, \mathcal{C} \rangle_\beta).$$

Это заканчивает проверку справедливости свойства $P_c 4$.

Пусть

$$l \in s\langle \circ \rangle[s\langle \# \rangle(\langle \mathcal{C}, \mathcal{D} \rangle_\beta) \times_\beta s\langle \# \rangle(\langle \mathcal{D}, \mathcal{E} \rangle_\beta)].$$

Тогда по AS2 $\langle (a, b)_\beta, l \rangle_\beta \in s\langle \circ \rangle = \eta$ для некоторых элементов $a \in s\langle \# \rangle(\langle \mathcal{C}, \mathcal{D} \rangle_\beta) = {}^f\text{Arr}_\alpha^\beta(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ и $b \in s\langle \# \rangle(\langle \mathcal{D}, \mathcal{E} \rangle_\beta) = {}^f\text{Arr}_\alpha^\beta(\mathcal{D}, \mathcal{E})$. Снова по AS2 $\langle (a, b)_\beta, l \rangle_\beta = \langle (F, G)_\beta, H \rangle_\beta$ для некоторых α -категорий $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ и $\mathcal{E}$ и некоторых α -функторных стрелок $F \equiv (\Phi, \mathcal{C}, \mathcal{D})_\alpha$, $G \equiv (\Psi, \mathcal{D}, \mathcal{E})_\alpha$ и $H \equiv (\Omega, \mathcal{C}, \mathcal{E})_\alpha$ таких, что $H = G \circ F$. По следствию к лемме 2 $l = H \in {}^f\text{Arr}_\alpha^\beta(\mathcal{C}, \mathcal{E}) = s\langle \# \rangle(\langle \mathcal{C}, \mathcal{E} \rangle_\beta)$. Это доказывает свойство

$$P_c 5 \equiv A_c 5(\text{Cat}_\alpha^\beta, {}^f\text{Arr}_\alpha^\beta, s).$$

Пусть $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, F$ – α -категории и F, G, H – стрелки такие, что

$$F \in s\langle \# \rangle(\langle \mathcal{C}, \mathcal{D} \rangle_\beta) = {}^f\text{Arr}_\alpha^\beta(\mathcal{C}, \mathcal{D}),$$

$$G \in s\langle \# \rangle(\langle \mathcal{D}, \mathcal{E} \rangle_\beta) = {}^f\text{Arr}_\alpha^\beta(\mathcal{D}, \mathcal{E}),$$

$$H \in s\langle \# \rangle(\langle \mathcal{C}, \mathcal{E} \rangle_\beta) = {}^f\text{Arr}_\alpha^\beta(\mathcal{C}, \mathcal{E}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} s\langle \circ \rangle((s\langle \circ \rangle((F, G)_\beta), H)_\beta) &= H \circ s\langle \circ \rangle((F, G)_\beta) = H \circ (G \circ F) \\ &= (H \circ G) \circ F = s\langle \circ \rangle((G, H)_\beta) \circ F \\ &= s\langle \circ \rangle((F, s\langle \circ \rangle((G, H)_\beta))_\beta). \end{aligned}$$

Отсюда следует свойство

$$P_c 6 \equiv A_c 6(\text{Cat}_\alpha^\beta, {}^f\text{Arr}_\alpha^\beta, s).$$

Пусть $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ – α -категории и F, G – стрелки такие, что

$$F \in s\langle \# \rangle(\langle \mathcal{D}, \mathcal{C} \rangle_\beta) = {}^f\text{Arr}_\alpha^\beta(\mathcal{D}, \mathcal{C}) \quad \text{и} \quad G \in s\langle \# \rangle(\langle \mathcal{C}, \mathcal{E} \rangle_\beta) = {}^f\text{Arr}_\alpha^\beta(\mathcal{C}, \mathcal{E}).$$

Тогда

$$s\langle \circ \rangle((F, s\langle \leftrightarrow \rangle(\mathcal{C}))_\beta) = i_{\mathcal{C}} \circ F = F \quad \text{и} \quad s\langle \circ \rangle((s\langle \leftrightarrow \rangle(\mathcal{C}), G)_\beta) = G \circ i_{\mathcal{C}} = G.$$

Отсюда следует свойство

$$P_c 7 \equiv A_c 7(\text{Cat}_\alpha^\beta, {}^f\text{Arr}_\alpha^\beta, s).$$

Теорема доказана.

β -категорию $\mathbb{C}_\alpha^\beta$ естественно назвать β -категорией всех α -категорий и всех α -функторных стрелок между ними.

Пусть теперь $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ – фиксированные α -категории. Формулу

$$X \rightleftharpoons \mathcal{C} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{D}$$

будем называть *аксиомой α -функтора из α -категории $\mathcal{C}$ в α -категорию $\mathcal{D}$ (со свободной переменной X)*. Так же, как и выше, можно убедиться, что эта аксиома является β -предикативной. Поэтому в силу AS2 существует β -класс

$$\text{Funct}_{\alpha}^{\beta}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \equiv \{X \in \beta \mid X \rightleftharpoons \mathcal{C} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{D}\},$$

состоящий из всех α -функторов из α -категории $\mathcal{C}$ в α -категорию $\mathcal{D}$.

Аналогично аксиома α -преобразовательной стрелки

$$\begin{aligned} {}^t\text{arr}_{\alpha}(U) &\equiv (U \subset \alpha) \wedge \exists X, Y, Z (X \rightleftharpoons \mathcal{C} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{D} \\ &\wedge Y \rightleftharpoons \mathcal{C} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{D} \wedge Z \rightleftharpoons X \xrightarrow{\alpha} Y \wedge U = (Z, X, Y)_{\alpha}) \end{aligned}$$

тоже является β -предикативной. Поэтому в силу AS2 существует β -класс

$${}^t\text{Arr}_{\alpha}^{\beta} \equiv \{U \in \beta \mid {}^t\text{Arr}_{\alpha}(U)\},$$

состоящий из всех α -преобразовательных стрелок $F \equiv (T, \Phi, \Psi)_{\alpha}$.

Если Φ и Ψ – α -функторы из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{D}$, то из $\alpha \in \beta$ и аксиомы подмножества A8 следует, что Φ и Ψ являются β -множествами. Поэтому можно рассмотреть простую β -пару $(\Phi, \Psi)_{\beta}$. Для такой пары также существует β -класс

$${}^t\text{Arr}_{\alpha}^{\beta}(\Phi, \Psi) \equiv \{U \in \beta \mid \exists Z (Z \rightleftharpoons \Phi \xrightarrow{\alpha} \Psi \wedge U = (Z, \Phi, \Psi)_{\alpha})\},$$

состоящий из всех α -преобразовательных стрелок $F \equiv (T, \Phi, \Psi)_{\alpha}$.

Используя введенные β -классы и аксиомную схему AS2, мы можем корректно определить следующие β -классы:

$$\begin{aligned} \zeta &\equiv \{x \in \beta \mid \exists X, Y, U \in \beta (X, Y \in \text{Funct}_{\alpha}^{\beta}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \\ &\wedge U \in {}^t\text{Arr}_{\alpha}^{\beta}(X, Y) \wedge x = \langle (X, Y)_{\beta}, U \rangle_{\beta})\} \\ &\subset (\text{Funct}_{\alpha}^{\beta}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \times_{\beta} \text{Funct}_{\alpha}^{\beta}(\mathcal{C}, \mathcal{D})) *_{\beta} {}^t\text{Arr}_{\alpha}^{\beta}; \\ \eta &\equiv \{x \in \beta \mid \exists X, Y, Z, U, V, W \in \beta (X, Y, Z \in \text{Funct}_{\alpha}^{\beta}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \\ &\wedge U \in {}^t\text{Arr}_{\alpha}^{\beta}(X, Y) \wedge V \in {}^t\text{Arr}_{\alpha}^{\beta}(Y, Z) \\ &\wedge W \in {}^t\text{Arr}_{\alpha}^{\beta}(X, Z) \wedge W = V \circ U \wedge x = \langle (U, V)_{\beta}, W \rangle_{\beta})\} \\ &\subset ({}^t\text{Arr}_{\alpha}^{\beta} \times_{\beta} {}^t\text{Arr}_{\alpha}^{\beta}) *_{\beta} {}^t\text{Arr}_{\alpha}^{\beta}; \\ \vartheta &\equiv \{x \in \beta \mid \exists X, U \in \beta (X \in \text{Funct}_{\alpha}^{\beta}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \\ &\wedge U \in {}^t\text{Arr}_{\alpha}^{\beta}(X, X) \wedge U = i_X \wedge x = \langle X, U \rangle_{\beta})\} \\ &\subset \text{Funct}_{\alpha}^{\beta}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) *_{\beta} {}^t\text{Arr}_{\alpha}^{\beta}. \end{aligned}$$

Имея компоненты ζ , η и ϑ , рассмотрим β -класс s , определенный перед теоремой 1.

Наконец, рассмотрим β -класс

$$\mathbb{F}_{\alpha}^{\beta}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \equiv ((\text{Funct}_{\alpha}^{\beta}(\mathcal{C}, \mathcal{D}), {}^t\text{Arr}_{\alpha}^{\beta})_{\beta}, s)_{\beta}$$

с носителем $A \equiv (\text{Funct}_{\alpha}^{\beta}(\mathcal{C}, \mathcal{D}), {}^t\text{Arr}_{\alpha}^{\beta})_{\beta}$ и структурой s .

ТЕОРЕМА 2. β -класс $\mathbb{F}_\alpha^\beta(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ является β -категорией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится полностью по той же схеме, что и доказательство теоремы 1, и мы не будем его здесь приводить.

β -категорию $\mathbb{F}_\alpha^\beta(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ естественно назвать β -категорией всех α -функторов из α -категории $\mathcal{C}$ в α -категорию $\mathcal{D}$ и всех α -преобразовательных стрелок между ними.

Конструкции $\mathbb{C}_\alpha^\beta$ и $\mathbb{F}_\alpha^\beta(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ показывают, что понятие α -категории является замкнутым относительно таких важных операций наивной теории категорий, как “категория категорий” и “категория функторов”.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970.
- [2] Келли Дж. Л. Общая топология. М.: Наука, 1968.
- [3] Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1971.
- [4] Eilenberg S., MacLane S. General theory of natural equivalences // Trans. Amer. Math. Soc. 1945. V. 58. P. 231–294.
- [5] MacLane S. Locally small categories and the foundations of set theory // Symposium. Warsaw 1959. Oxford: Pergamon, 1961. P. 25–43.
- [6] Ehresmann C. Guttungen von lokalen Strukturen // J. -ber. Deutsch. Math. Verein. 1957. V. 60. № 2. P. 49–77.
- [7] Dedecker P. Introduction aux structures locales // Coll. Géom. Diff. Glob. Bruxelles. 1958. P. 103–135.
- [8] Sonner J. The formal definition of categories // Math. Z. 1962. V. 80. P. 163–176.
- [9] Gabriel P. Des catégories abéliennes // Bull. Soc. Math. France. 1962. V. 90. P. 323–448.
- [10] da Costa N. On two systems of set theory // Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wet. Ser. A. 1965. V. 68. № 1. P. 95–98.
- [11] da Costa N. Two formal systems of set theory // Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wet. Ser. A. 1967. V. 70. № 1. P. 45–51.
- [12] Isbell J. Structure of categories // Bull. Amer. Math. Soc. 1966. V. 72. P. 619–655.
- [13] MacLane S. One universe as a foundation for category theory // Lecture Notes in Math. 1969. V. 106. P. 192–200.
- [14] MacLane S. Categories for Working Mathematician. Berlin: Springer-Verlag, 1971.
- [15] Feferman S. Set-theoretical foundations of category theory // Lecture Notes in Math. 1969. V. 106. P. 201–247.
- [16] Herrlich H., Strecker G. Category Theory. An Introduction. Berlin: Heldermann Verlag, 1979.
- [17] Захаров В. К., Михалёв А. В. Локальная теория классов и множеств как основание для теории категорий // Математические методы и приложения. Тр. IX математических чтений МГСУ. Москва: МГСУ, 2002. С. 91–94.
- [18] Андреев П. В., Бунина Е. И., Захаров В. К., Михалёв А. В. Основания теории категорий в рамках локальной теории множеств // Тезисы докладов международной алгебраической конференции. Санкт-Петербург: ПОМИ, 2002. С. 10–11.
- [19] Hatcher W. S. The Logical Foundations of Mathematics. Oxford: Pergamon Press, 1982.

Центр новых информационных технологий
Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова
E-mail: valeri@zaharov.mccme.ru

Поступило
16.12.2002
Исправленный вариант
18.02.2004