Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. С. Кашин, Т. Ю. Куликова, О справедливости для фреймов одного результата об ортогональных системах, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 2, 311–312

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2491>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 12:24:42

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О СПРАВЕДЛИВОСТИ ДЛЯ ФРЕЙМОВ ОДНОГО РЕЗУЛЬТАТА ОБ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Б. С. Кашин, Т. Ю. Куликова

В заметке установлены оценки снизу канонических n -членных приближений по фреймам общего вида одного естественного с точки зрения приложений семейства функций. Обобщаются результаты, установленные в [1] для ортогональных базисов пространств $L^2(0, 1)$. Целесообразность такого обобщения связана в основном с систематическим использованием фреймов и неортогональных базисов в прикладных задачах сжатия графической информации. Введем необходимые определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство. Система ненулевых элементов $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty} \subset H$ называется *фреймом*, если выполнены неравенства

$$A\|v\|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} (v, \varphi_j)^2 \leq B\|v\|^2 \quad \forall v \in H,$$

где $0 < A \leq B < \infty$ – абсолютные константы, а $\|\cdot\|$ и $(\cdot, \cdot)$ – норма и скалярное произведение соответственно. Постоянные B и A называются соответственно *верхней* и *нижней границами* фрейма Φ .

Очевидно, что фреймом является любая полная ортонормированная система в H , а также произвольный базис Рисса. Критерий того, что система Φ является фреймом см. в [2]. Для каждого фрейма $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ определен двойственный фрейм $\tilde{\Phi} = \{\tilde{\varphi}_j\}_{j=1}^{\infty}$, причем каждый элемент $f \in H$ представим сходящимся по норме рядом

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} (f, \tilde{\varphi}_j) \varphi_j.$$

Этот ряд называется *каноническим разложением* элемента $f \in H$ по фрейму Φ (см. подробнее [3]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Наилучшим каноническим n -членным приближением* ($n = 1, 2, \dots$) элемента $f \in H$ по фрейму Φ будем называть величину

$$e_n(f, \Phi, H) = \inf_{\Lambda \subset \mathbb{N}, \#\Lambda \leq n} \left\| f - \sum_{j \in \Lambda} (f, \tilde{\varphi}_j) \varphi_j \right\|$$

(здесь $\Lambda \subset \mathbb{N}$ – подмножество натурального ряда, $\#$ – число элементов в множестве).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-00062.

Далее, если K – подмножество H , то наилучшим каноническим n -членным приближением класса K мы назовем

$$e_n(K, \Phi, H) = \sup_{f \in K} e_n(f, \Phi, H).$$

Рассмотрим однопараметрическое семейство $\mathbb{X} = \{\chi_t\}$, $t \in [0, a]$, характеристических функций подмножеств единичного куба I^d в пространстве $\mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, \dots$, таких, что

$$\chi_t = \chi_{\Omega_t} = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_t, \\ 0, & x \notin \Omega_t, \end{cases} \quad (1)$$

$$\mu_d\{\Omega_t\} = t, \quad \Omega_{t_1} \subset \Omega_{t_2} \quad \text{при } 0 \leq t_1 < t_2 \leq a$$

(здесь μ_d – мера Лебега множества в I^d).

Примером семейств со свойством (1) является множество характеристических функций интервалов $(0, t)$, $0 \leq t \leq 1$, лежащее в $L^2(0, 1)$, или семейство характеристических функций концентрических шаров в $L^2(I^d)$. Наша задача состоит в нахождении оценок снизу наилучших канонических n -членных приближений для классов со свойством (1).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^\infty \subset L^2(I^d)$ – фрейм с границами A и B . Тогда каноническое n -членное приближение по фрейму Φ любого класса функций $\mathbb{X} = \{\chi_t\}$, $t \in [0, a]$, со свойством (1) оценивается снизу следующим образом:

$$e_n(\mathbb{X}, \Phi, L^2(I^d)) \geq (C(A, B, a))^{-n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $C(A, B, a) > 0$ – постоянная, зависящая только от A , B и a .

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ – базис Рисса в $L^2(I^d)$ такой, что

$$\|\varphi_j\|_{L^\infty(I^d)} \leq M, \quad \|\tilde{\varphi}_j\|_{L^\infty(I^d)} \leq \widetilde{M}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Тогда при $n = 1, 2, \dots$ для канонического n -членного приближения по базису Φ любого класса $\mathbb{X}$ со свойством (1) выполнена оценка

$$e_n(\mathbb{X}, \Phi, L^2(I^d)) \geq \frac{C(\Phi, a)}{n^{1/2}} > 0,$$

где $C(\Phi, a)$ – постоянная, зависящая только от Φ и a .

Теорема 2 показывает, что использование для аппроксимации базисов, “похожих” на тригонометрическую систему, не позволяет обеспечить порядок приближения лучший, чем $n^{-1/2}$, даже для такого “тонкого” класса функций, как семейство со свойством (1). Этот факт есть косвенное подтверждение целесообразности использования в приложениях систем типа всплесков.

Доказательство теорем 1 и 2 получается модификацией доказательств из [1]. Существенно новым обстоятельством является неединственность разложений по фрейму, которая проявляется, в частности, в том, что каноническое разложение полинома по фрейму не всегда является полиномом. Это приводит, например, к ухудшению оценки снизу из теоремы 2 с $\dots \geq cn^{-1/2}$ до $\dots \geq cn^{-1}$ при рассмотрении тем же методом произвольных фреймов со свойством (2).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kashin B. S. // Approximation Theory. Volume Dedicated to B. Sendov. Sofia: Darba, 2002. P. 241–257.
2. Кашин Б. С., Куликова Т. Ю. // Матем. заметки. 2002. Т. 72. № 6. С. 941–945.
3. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: РХД, 2001.

(Б. С. Кашин) Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
(Т. Ю. Куликова) Научно-исследовательский актуарно-финансовый центр
E-mail: kashin@mi.ras.ru, koulikt@mi.ras.ru

Поступило
19.09.2004