Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. В. Кожан, Асимптотика собственных значений двухдиагональных матриц Якоби, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 2, 313–316

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2492>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 14:28:34

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДВУХДИАГОНАЛЬНЫХ МАТРИЦ ЯКОБИ

Р. В. Кожан

1. Введение. Рассмотрим в гильбертовом пространстве $H := \ell_2(\mathbb{N})$ со скалярным произведением $(\cdot | \cdot)$ оператор Якоби

$$J = SA + AS^*, \quad (1.1)$$

где S – оператор сдвига вправо, а A – диагональный оператор с диагональю $(a_n)_{n=1}^\infty$, т.е.

$$Se_n = e_{n+1}, \quad Ae_n = a_n e_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Здесь $(e_n)_{n=1}^\infty$ – стандартный базис в $\ell_2(\mathbb{N})$. Относительно числовой последовательности $(a_n)_{n=1}^\infty$ мы предполагаем, что она состоит из положительных чисел, для которых выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0. \quad (1.2)$$

Оператор J является компактным и самосопряженным, а все его собственные значения простые и отличные от нуля. При этом точечный спектр является симметричным относительно нуля, т.е. $\sigma_p(J) = \{\pm \lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, где последовательность $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ состоит из положительных чисел, которые монотонно стремятся к нулю.

Цель нашей работы заключается в изучении асимптотического поведения последовательности $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$. Постановка такой задачи возникла в связи с работой [1], где изучалось асимптотическое поведение последовательности $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ в случае, когда $a_n = q^{n^s}$ (где $q \in (0, 1)$, $s > 0$), и было доказано, что λ_n удовлетворяют условию $a_{2n-1} > \lambda_n > a_{2n+1}$. Основным результатом нашей работы является следующая

ТЕОРЕМА 1.1. *Если выполнено условие (1.2), то*

$$\lambda_n = (1 + o(1))a_{2n-1}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.3)$$

Отметим, что наш подход базируется на изучении квадратичной формы оператора J и является более элементарным, чем подход в [1], который использовал аппарат теории целых функций.

2. Доказательство теоремы 1.1. Пусть $P_n: H \rightarrow H$ – ортопроектор на подпространство

$$H_n = \{x \in H \mid x = (x_k)_{k=1}^\infty \ \forall k > n: x_k = 0\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Положим

$$J_n := P_n J P_n.$$

Обозначим также через T_n сужение оператора J_n на пространство H_n .

ЛЕММА 2.1. *Спектры операторов J и J_n , $n \in \mathbb{N}$, симметричны относительно нуля. При этом все собственные значения оператора J и все ненулевые собственные значения операторов J_n являются простыми. Кроме того, число $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора J .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через U диагональный оператор, который действует по формуле

$$Ue_n = (-1)^n e_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку $U^{-1} S U = -S$ и $U^{-1} A U = A$, то

$$U^{-1} J U = -J, \quad U^{-1} J_n U = -J_n,$$

откуда следует симметричность спектров операторов J и J_n . Доказательство остальных утверждений леммы очевидно.

Обозначим через $(\lambda_k)_{k=1}^\infty$ (соответственно $(\lambda_k^{(n)})_{k=1}^\infty$) последовательность неотрицательных собственных значений оператора J (соответственно J_n), занумерованную в убывающем порядке с учетом кратности. Через $(s_k(X))_{k=1}^\infty$ мы будем обозначать последовательность s -чисел компактного оператора $X: H \rightarrow H$ (см. [2]).

ЛЕММА 2.2. Для произвольных $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$\prod_{k=1}^n \lambda_k^{(2n)} = \prod_{k=1}^n a_{2k-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая лемму 2.1, получаем, что

$$\prod_{k=1}^n \lambda_k^{(2n)} = |\det T_{2n}|^{1/2}.$$

Простые подсчеты дают, что для произвольных $n > 1$

$$\det T_{2n} = -a_{2n-1}^2 \det T_{2n-2},$$

и тем самым лемма доказана.

ЛЕММА 2.3. Для достаточно больших $n_0 \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства

$$\|J_m - J_n\| \leq a_n + a_{n+1}, \quad m > n \geq n_0, \quad (2.1)$$

$$\|J - J_n\| \leq a_n + a_{n+1}, \quad n \geq n_0. \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия (1.2) следует, что $a_{n+1} \leq a_n$, начиная с некоторого $n_0 \in \mathbb{N}$, и, следовательно, для $n > n_0$ и $\|x\| = 1$ получим

$$\begin{aligned} |(J - J_n)x| &\leq 2 \left| \sum_{k=n}^{\infty} a_k x_k \overline{x_{k+1}} \right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} a_k (|x_k|^2 + |x_{k+1}|^2) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} a_{n+2i} (|x_{n+2i}|^2 + |x_{n+2i+1}|^2) + \sum_{i=0}^{\infty} a_{n+2i+1} (|x_{n+2i+1}|^2 + |x_{n+2i+2}|^2) \\ &\leq a_n + a_{n+1}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Таким образом, (2.2) доказано. Аналогично доказывается оценка (2.1).

ЛЕММА 2.4. Неравенство

$$\lambda_k^{(2k)} \geq \frac{a_{2k-1}}{2}$$

выполняется для бесконечного количества номеров $k \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем доказательство от противного: пусть существует $n_1 \in \mathbb{N}$ такое, что $\lambda_k^{(2k)} < a_{2k-1}/2$ для всех $k \geq n_1$. Согласно условию (1.2) существует $n_2 \in \mathbb{N}$ такое, что $a_{n+1} \leq a_n/8$ для всех $n \geq n_2$. Возьмем $p = \max\{n_1, n_2\}$, и пусть $N > p$. Принимая во внимание лемму 2.2, имеем

$$\prod_{i=1}^N a_{2i-1} = \prod_{i=1}^N \lambda_i^{(2N)} = \prod_{i=1}^p \lambda_i^{(2N)} \cdot \prod_{i=p+1}^N \lambda_i^{(2N)}. \quad (2.4)$$

Так как

$$|\lambda_i^{(2N)} - \lambda_i^{(2i)}| = |s_{2i}(J_{2N}) - s_{2i}(J_{2i})| \leq \|J_{2N} - J_{2i}\|,$$

учитывая лемму 2.3, имеем

$$\lambda_i^{(2N)} < \lambda_i^{(2i)} + a_{2i} + a_{2i+1} \leq \frac{a_{2i-1}}{2} + 2 \cdot \frac{a_{2i-1}}{8} = \frac{3a_{2i-1}}{4}, \quad p < i \leq N.$$

Поскольку

$$|\lambda_i^{(2N)}| \leq \|J_{2N}\| = \|P_{2N} J P_{2N}\| \leq \|J\|, \quad 1 \leq i \leq p,$$

из (2.4) получаем

$$\prod_{i=1}^N a_{2i-1} \leq \|J\|^p \prod_{i=p+1}^N \frac{3a_{2i-1}}{4}$$

и, следовательно,

$$\prod_{i=1}^p a_{2i-1} \leq \|J\|^p \left(\frac{3}{4}\right)^{N-p}.$$

Устремляя теперь N к $+\infty$, получаем, что среди чисел a_n есть нулевые. Полученное противоречие заканчивает доказательство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Зафиксируем произвольное $\varepsilon \in (0, 1/8)$. Тогда существует (см. (1.2)) $n_1 \in \mathbb{N}$ такое, что $a_n \leq \varepsilon a_{n-1}$ для всех $n \geq n_1$.

Сначала покажем, что при больших $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\lambda_n \leq (1 + \varepsilon) a_{2n-1}. \quad (2.5)$$

Действительно, согласно с (2.2) существует $n_0 > n_1$, для которого

$$\|J - J_{2n-1}\| \leq a_{2n-1} + a_{2n}, \quad n > n_0.$$

Легко видеть, что $\lambda_n = s_{2n}(J)$ и $s_{2n}(J_{2n-1}) = 0$. Поэтому при $n > n_0$ имеем

$$\lambda_n = s_{2n}(J) - s_{2n}(J_{2n-1}) \leq \|J - J_{2n-1}\| \leq a_{2n-1} + a_{2n} \leq (1 + \varepsilon) a_{2n-1}.$$

Теперь убедимся, что для достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\lambda_n \geq (1 - 2\varepsilon) a_{2n-1}. \quad (2.6)$$

Исходя из результата леммы 2.4, фиксируем $m > n_1$ такое, что $\lambda_m^{(2m)} \geq a_{2m-1}/2$. Поскольку $\lambda_i^{(2m)} \geq \lambda_m^{(2m)} \geq a_{2m-1}/2$, $i = 1, \dots, m$, то, как следует из спектральной теоремы,

$$(J_{2m}x | J_{2m}x) \geq \frac{1}{4} a_{2m-1}^2 \sum_{k=1}^{2m} |x_k|^2, \quad x \in H_{2m}. \quad (2.7)$$

Для произвольного $r > m + 1$ рассмотрим пространство

$$G_{2r}^m := \{(x_n)_{n=1}^\infty \in H_{2r} \mid x_{2m+1} = 0\}.$$

Заметим, что $\dim G_{2r}^m = 2r - 1$. С помощью непосредственных вычислений получаем, что для произвольных $x \in G_{2r}^m$

$$\begin{aligned} (Jx | Jx) &= (J_{2m}x | J_{2m}x) + a_{2m}^2 |x_{2m}|^2 \\ &+ \sum_{k=2m+2}^{2r} (a_k^2 + a_{k-1}^2) |x_k|^2 + 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{k=2m}^{2r-2} a_k a_{k+1} x_k \overline{x_{k+2}} \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Поскольку $a_k < \varepsilon a_{k-1}$ для всех $k \geq 2m$, то

$$2|a_k a_{k+1} x_k \overline{x_{k+2}}| \leq 2\varepsilon |a_{k-1} x_k| \cdot |a_{k+1} x_{k+2}| \leq \varepsilon (a_{k-1}^2 |x_k|^2 + a_{k+1}^2 |x_{k+2}|^2), \quad k \geq 2m,$$

и, следовательно,

$$2 \operatorname{Re} \left(\sum_{k=2m}^{2r-2} a_k a_{k+1} x_k \overline{x_{k+2}} \right) \geq -\varepsilon a_{2m-1}^2 |x_{2m}|^2 - 2\varepsilon \sum_{k=2m+2}^{2r} a_{k-1}^2 |x_k|^2.$$

Отсюда на основании (2.8) и (2.7) получаем, что

$$(Jx | Jx) \geq \frac{a_{2m-1}^2}{4} \sum_{k=1}^{2m} |x_k|^2 - \varepsilon a_{2m-1}^2 |x_{2m}|^2 + (1 - 2\varepsilon) \sum_{k=2m+2}^{2r} a_{k-1}^2 |x_k|^2. \quad (2.9)$$

Поскольку $\varepsilon \in (0, 1/8)$ и $r > m + 1$, то $a_{2m-1}^2 (1/4 - \varepsilon) \geq a_{2r-1}^2$, откуда, учитывая (2.9), получаем

$$(Jx | Jx) \geq (1 - 2\varepsilon) a_{2r-1}^2 \sum_{k=1}^{2r} |x_k|^2, \quad x \in G_{2r}^m. \quad (2.10)$$

Применяя теперь принцип минимакса [3, гл. 8] с учетом леммы 2.1 и того, что $\dim G_{2r}^m = 2r - 1$, получаем

$$\lambda_r \geq (1 - 2\varepsilon)^{1/2} a_{2r-1} \geq (1 - 2\varepsilon) a_{2r-1}, \quad r > m + 1. \quad (2.11)$$

Тем самым, неравенство (2.6) доказано. Из (2.5) и (2.6) очевидным образом следует справедливость утверждения теоремы 1.1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тур Э. А. // Матем. заметки. 2003. Т. 74. № 3. С. 449–462. 2. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965. 3. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. М.: Мир, 1982.

Львовский национальный университет им. И. Франко
E-mail: rkozhan@yahoo.com

Поступило
15.06.2004