Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. О. Обрезков, Формула Фейнмана для задачи Коши–Дирихле в ограниченной области, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 2, 316–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2493>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 12:55:34

ФОРМУЛА ФЕЙНМАНА ДЛЯ ЗАДАЧИ КОШИ–ДИРИХЛЕ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

О.О. Обрезков

1. Введение. В заметке получено представление решения задачи Коши–Дирихле для уравнения Шрёдингера в области евклидова пространства в виде предела конечнократных интегралов (формула Фейнмана). Показано, что это представление может быть интерпретировано как интеграл Фейнмана по траекториям в конфигурационном пространстве. Представление решения получено для случая непрерывного потенциала и непрерывного начального условия, обращающегося в нуль на границе области.

Как известно, решение задачи Коши для уравнения Шрёдингера в евклидовом пространстве может быть представлено в виде интеграла Фейнмана по траекториям во всем пространстве (см. [1], [2], а также математические работы [3]–[5]). В работе показано, что интеграл Фейнмана по траекториям в области соответствует решению задачи Коши–Дирихле с нулевыми граничными условиями. В доказательстве существенно используется теорема Чернова (ср. [6]), которая играет здесь ту же роль, что и формула Троттера [7] в доказательстве Нельсона [3].

2. Задача Коши–Дирихле для уравнения Шрёдингера. Пусть G – ограниченная область в $\mathbb{R}^m$ с гладкой границей. Далее рассматривается краевая задача Коши–Дирихле в этой области для уравнения, соответствующего оператору Шрёдингера с магнитным полем и потенциалом:

$$H = \frac{1}{2}(-i\nabla + B(x))^2 + V(x),$$

где $\nabla = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_m)$ – оператор градиента в $\mathbb{R}^m$, $V: G \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция (потенциал), $B: G \rightarrow \mathbb{R}^m$ – непрерывно-дифференцируемая функция (вектор-потенциал магнитного поля). Задача Коши–Дирихле для уравнения Шрёдингера с указанным гамильтонианом и начальным условием u_0 может быть записана в виде

$$\begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = (Hu)(t, x), & t \geq 0, \quad x \in G, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in G, \\ u(t, x) = 0, & t \geq 0, \quad x \in \partial G, \end{cases} \quad (1)$$

где $u_0: \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция, обращающаяся в нуль на границе, а $u: \mathbb{R}_+ \times G \rightarrow \mathbb{R}$ – решение соответствующей задачи Коши–Дирихле, при этом мы определяем

$$u(t, x) = \lim_{G \ni y \rightarrow x} u(t, y) \quad \text{для всех } x \in \partial G.$$

Отметим, что действие оператора H на функцию $f \in C^2(G)$ можно представить в (стандартном) виде

$$(Hf)(y) = -\left(\frac{\Delta f}{2}\right)(y) - i(B(y), \nabla f(y)) + \left(\frac{1}{2}B^2(y) + V(y) - \frac{i}{2}\operatorname{div} B(y)\right)f(y). \quad (2)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-01074.

Пусть u – решение задачи Коши–Дирихле с начальным условием $u_0 \in C_0(\overline{G})$, где $C_0(\overline{G})$ обозначает банахово пространство непрерывных функций $f: \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}$, обращающихся в нуль на ∂G . Рассмотрим семейство операторов $\{T_t\}_{t \geq 0}$, задаваемых равенством

$$(T_t u_0)(x) \equiv u(t, x) \quad \text{для всех } x \in G, \quad u_0 \in C_0(\overline{G}), \quad t \geq 0.$$

Мы предполагаем, что $\{T_t\}_{t \geq 0}$ является непрерывной полугруппой операторов, действующих на $C_0(\overline{G})$ ($\{T_t\}_{t \geq 0}$ называется *разрешающей полугруппой* операторов, соответствующей задаче (1)). Пусть (A, D_A) – это инфинитезимальный оператор $\{T_t\}_{t \geq 0}$.

Далее мы построим однопараметрическое семейство операторов $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, являющееся эквивалентным по Чернову полугруппе $\{T_t\}_{t \geq 0}$ (понятие эквивалентности по Чернову введено в [8]):

$$\|S(t)f - f - tAf\| = o(t), \quad t \rightarrow 0, \quad \forall f \in D_1 \subset D_A, \quad (3)$$

где D_1 – существенная область определения оператора A , т.е. оператор (A, D_A) является замыканием (A, D_1) . Если (3) выполняется для $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, то из теоремы Чернова [9] следует, что

$$T_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(S\left(\frac{t}{n}\right) \right)^n \quad \text{компактно по } t \in [0, \infty), \quad (4)$$

где $\lim$ обозначает предел в сильной операторной топологии на $C_0(\overline{G})$. При подходящем выборе семейства $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ предельное выражение в (4) совпадает с интегралом Фейнмана по траекториям в области.

3. Построение аппроксимирующего по Чернову семейства операторов. Мы разобьем построение приближающего семейства операторов на несколько этапов. Везде далее в качестве существенной области определения оператора A будет использовано множество функций

$$C_0^4(G) = \{f \in C^4(G) \mid \text{supp } f \subset G\}.$$

Сначала рассмотрим задачу Коши для уравнения Шрёдингера без потенциала и магнитного поля ($V \equiv 0, B \equiv 0$) на всем пространстве $\mathbb{R}^m$:

$$\begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = (H_0 u)(t, x), & t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^m, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \quad (5)$$

где $H_0 = -\Delta/2$ и предполагается, что $u_0 \in C_0^4(G)$. Тогда явную формулу для решения задачи (5) можно записать в следующем виде:

$$u(t, x) = (e^{-itH_0} u_0)(x) \equiv (S_1(t) u_0)(x) = \frac{1}{(2\pi i)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} \exp\left\{i \frac{(x-y)^2}{2t}\right\} u_0(y) dy.$$

Доказательство этой формулы содержится в [10] (в [10] правая часть последнего равенства определяется как предел в $L^2(\mathbb{R}^m)$ функций

$$x \mapsto \frac{1}{(2\pi t(i-\varepsilon))^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} \exp\left\{(i-\varepsilon) \frac{(x-y)^2}{2t}\right\} u_0(y) dy \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0$$

для произвольных $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^m) \cap L^1(\mathbb{R}^m)$; отметим, что в нашем случае интеграл справа существует в обычном смысле и при $\varepsilon = 0$, ибо носитель функции u_0 ограничен).

Для того чтобы получить решение уравнения Шрёдингера с ненулевыми потенциалом и магнитным полем, необходимо модифицировать аппроксимирующее семейство операторов. В частности, для каждого t определим $S_2(t)$ так:

$$\begin{aligned} (S_2(t) u_0)(x) &= \exp\left\{-it\left(V(x) - \frac{i}{2} \text{div } B(x)\right)\right\} \\ &\times \frac{1}{(2\pi i)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} \exp\left\{i \frac{(x-y)^2}{2t}\right\} \exp\{iB(x), y-x\} u_0(y) dy \end{aligned}$$

для всех $u_0 \in C_0(\overline{G})$ и $x \in G$.

Можно проверить, что с точностью до слагаемых второго порядка малости по t выполнено равенство

$$(S_2(t)u_0)(x) = u_0(x) - it(Hu_0)(x).$$

Следовательно, семейство операторов $\{S_2(t)\}_{t \geq 0}$ эквивалентно по Чернову разрешающей полугруппе операторов, соответствующей уравнению Шрёдингера с потенциалом V и магнитным полем B на $\mathbb{R}^m$. Отметим, что при этом граничные условия в исходной задаче Коши–Дирихле (1) будут нарушены: при построении аппроксимирующего семейства операторов область G никак не использовалась. Для того чтобы удовлетворить граничным условиям Дирихле, следует использовать дополнительное семейство операторов умножения на функции, удовлетворяющие граничным условиям.

Введем следующие обозначения:

$$G_\varepsilon = \{x \in G \mid \text{dist}(x, G^c) > \varepsilon\},$$

$I_B(\cdot)$ – индикатор множества $B \subset \mathbb{R}^m$. Далее мы приводим построение семейства $\{h_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ гладких функций на $\mathbb{R}^m$, $\text{supp } h_\varepsilon \subset G$, приближающих $I_G(\cdot)$ в смысле поточечной сходимости на $\mathbb{R}^m$. Зафиксируем некоторую гладкую, неотрицательную функцию g на $\mathbb{R}^m$ такую, что

$$\text{supp } g \subset \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x| \leq 1\}, \quad \int_{\mathbb{R}^m} g(x) dx = 1.$$

Определим h_ε следующим образом:

$$h_\varepsilon(z) = \int_{\mathbb{R}^m} I_{G_{2\varepsilon}}(x) g\left(\frac{z-x}{\varepsilon}\right) \varepsilon^{-m} dx, \quad z \in \mathbb{R}^m. \quad (6)$$

Очевидно, что h_ε является гладкой функцией. Кроме этого, для каждого $z \in \mathbb{R}^m$ выполняется равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_\varepsilon(z) = I_G(z).$$

Далее мы фиксируем некоторую функцию $\varepsilon: (0, 1) \rightarrow (0, \infty)$ такую, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0,$$

и рассматриваем однопараметрическое семейство операторов $\{S_3(t)\}_{t \geq 0}$, определяемое так:

$$(S_3(t)u_0)(x) = h_{\varepsilon(t)}(x)u_0(x)$$

для всех $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^m$ и $x \in C_0(\overline{G})$. Согласно определению $\{h_\varepsilon\}$, для каждого $x \in G$ найдется $t_0 > 0$ такое, что для всех $t \in [0, t_0]$ выполнено $(S_3(t)u_0)(x) = u_0(x)$.

Введем семейство операторов $\{S(t) = S_3(t)S_2(t)\}_{t \geq 0}$. Так как $S_3(t)$ является оператором умножения на функцию, финитную в G , то $S(t)$ можно рассматривать как оператор в банаховом пространстве $C_0(\overline{G})$.

4. Формула Фейнмана для уравнения Шрёдингера в области и интегралы Фейнмана по траекториям в области.

ЛЕММА 1 (Формула Фейнмана). Пусть $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ – это введенное выше семейство интегральных операторов в $C_0(\overline{G})$, а $\{T_t\}_{t \geq 0}$ – это разрешающая полугруппа операторов, соответствующая уравнению Шрёдингера с магнитным полем в ограниченной области. Тогда для каждого $t > 0$ выполнено

$$T_t = \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(S\left(\frac{t}{n}\right) \right)^n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опишем основную идею доказательства. Очевидно, что достаточно проверить выполнение условий теоремы Чернова. Из предыдущих рассуждений следует, что

$$(S(t)f)(x) = f(x) + t(Af)(x) + o(t), \quad x \in G.$$

Так как соотношение (3) достаточно проверить только для функций из некоторой плотной в D_A области D_1 , то в качестве D_1 можно взять $C_0^A(G)$. В силу того, что носитель каждой такой функции находится строго внутри области (т.е. для всех $f \in D_1$ $\text{dist}(\text{supp } f, \partial G) = \delta > 0$), нетрудно заметить, что согласно определению $S_4(t)$ последнее равенство выполнено равномерно по $x \in G$ (для этого достаточно рассматривать t такие, что $3\varepsilon(t) < \delta$).

Отметим, что $s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} (S(t/n))^n$ можно интерпретировать как интеграл Фейнмана. Действительно, если $K(t, \cdot, \cdot)$ — ядро интегрального оператора $S(t)$, то формула для решения (1) может быть записана в виде

$$(T_t u_0)(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m} \cdots \int_{\mathbb{R}^m} dx_1 \cdots dx_n u_0(x_n) \prod_{j=1}^n K\left(\frac{t}{n}, x_{j-1}, x_j\right). \quad (7)$$

ТЕОРЕМА 1. Решение и задачи Коши–Дуришле (1) с начальным условием $u_0 \in C_0(\overline{G})$ может быть представлено в виде интеграла Фейнмана по траекториям в G :

$$u(t, x) = \int_{C_x([0, t], G)} \exp\left\{-i \int_0^t \left(V(z(s)) - \frac{i}{2} \text{div } B(z(s))\right) ds + i \int_0^t (B(z(s-0)), dz(s))\right\} u_0(z(t)) \Phi_G^x(dz),$$

где Φ_G^x — это (определяемая как предел конечнократных интегралов) псевдомера Фейнмана, сосредоточенная на траекториях $z \in C([0, t], G)$ таких, что $z(0) = x$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что решение задачи (1) может быть представлено в виде интеграла по траекториям в области. Введем обозначение

$$K_1(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi i)^{m/2}} \exp\left\{-it\left(V(x) - \frac{i}{2} \text{div } B(x)\right) + i \frac{(x-y)^2}{2t} + i(B(x), y-x)\right\}.$$

Тогда для ядра оператора $S(t)$ выполнено равенство $K(t, x, y) = h_{\varepsilon(t)}(x) K_1(t, x, y)$. Далее заметим, что скорость сходимости $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ не влияет на предел в (7). Поэтому для каждого фиксированного n можно выбрать $\varepsilon(t/n)$ таким образом, что

$$\left| \int_{\mathbb{R}^m} \cdots \int_{\mathbb{R}^m} dx_1 \cdots dx_n \prod_{j=1}^n K_1\left(\frac{t}{n}, x_{j-1}, x_j\right) \times \left(\prod_{j=1}^n h_{\varepsilon(t/n)}(x_{j-1}) - \prod_{j=1}^n I_G(x_{j-1}) \right) u_0(x_n) \right| < \frac{1}{n}$$

(это можно сделать, так как интегрирование фактически производится по компакту $\overline{G} \times \cdots \times \overline{G} \subset \mathbb{R}^{mn}$, подынтегральное выражение ограничено и имеет место сходимость $h_\varepsilon \rightarrow I_G$). При таком выборе $\varepsilon(t/n)$ предельное выражение в (7) будет совпадать с

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_G \cdots \int_G dx_1 \cdots dx_n \prod_{j=1}^n K_1\left(\frac{t}{n}, x_{j-1}, x_j\right) u_0(x_n).$$

Последнее выражение уже является соответствующим интегралом Фейнмана по траекториям в G .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В формуле для представления решения уравнения (1) присутствует символ

$$\int_0^t (B(z(s-0)), dz(s)).$$

Конечномерная аппроксимация этого интеграла равна

$$\sum_{j=1}^n B(x_{j-1})(x_j - x_{j-1}).$$

По аналогии со случаем меры Винера $x_j - x_{j-1}$ можно интерпретировать как приращение на промежутке $((j-1)t/n, jt/n)$ эвристического случайного процесса, соответствующего псевдомере Фейнмана. Таким образом, указанная интегральная сумма является конечномерным приближением эвристического стохастического интеграла. При этом значение функции $B(\cdot)$ вычисляется в точке x_{j-1} , т.е. соответствует моменту времени $(j-1)t/n$. Это обстоятельство позволяет рассматривать символ $\int_0^t (B(z(s-0)), dz(s))$ как интеграл Ито по эвристическому процессу, соответствующему псевдомере Фейнмана. Заметим еще, что $\int_0^t (B(z(s-0)), dz(s))$ связан с аналогом формулы Камерона–Мартина для псевдомеры Фейнмана.

Отметим также, что в связи с континуальными интегралами “сдвиг по времени назад” (т.е. символ $z(s-0)$ под знаком континуального интеграла) впервые появился в работе Березина [11] для получения представлений решений уравнений Шрёдингера с псевдодифференциальными операторами и qp -символами с помощью интегралов Фейнмана по траекториям в фазовом пространстве.

Автор выражает благодарность профессору О. Г. Смолянову за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Feynman R. D. // Rev. Mod. Phys. 1948. V. 20. № 2. P. 367–387.
2. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968.
3. Nelson E. // J. Math. Phys. 1964. V. 5. № 3. P. 332–343.
4. Albeverio S., Hoegh-Krohn R. Mathematical theory of Feynman integrals // Lecture Notes in Math. V. 523. Berlin: Springer, 1976.
5. Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. Континуальные интегралы. М.: Изд-во МГУ, 1990.
6. Smolyanov O. G., Tokarev A. G., Truman A. // J. Math. Phys. 2002. V. 43. № 10. P. 5161–5171.
7. Trotter H. F. // Proc. Amer. Math. Soc. 1959. V. 10. P. 545–551.
8. Smolyanov O. G., von Weizsäcker H., Wittich O. Chernoff's Theorem and the Construction of Semigroups. GSF-National Research Center for Environment and Health. Preprint № 01-11. Neuherberg, Germany: Institute of Biomathematics and Biometrics, 2001.
9. Chernoff R. // Mem. Amer. Math. Soc. 1974. V. 140. P. 1–121.
10. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 2. М.: Мир, 1978.
11. Березин Ф. А. // Успехи физ. наук. 1980. Т. 132. № 3. С. 497–548.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: obr_oo@mail.ru.

Поступило
15.09.2004