Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Бунина, В. К. Захаров, Канонический вид множеств Тарского в теории множеств Цермело–Френкеля, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 3, 323–333

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2494>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 15:02:13

УДК 510.223

КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД МНОЖЕСТВ ТАРСКОГО В ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ ЦЕРМЕЛО–ФРЕНКЕЛЯ

Е. И. Бунина, В. К. Захаров

Устанавливается равносильность понятий недостижимого кумулятивного множества и несчетного множества Тарского. Кроме того, устанавливается равносильность этих понятий понятию галактического множества.

Библиография: 13 названий.

Введение. Кризис, возникший в наивной теории множеств в начале 20-го века, привел к построению нескольких строгих аксиоматических теорий множеств. Наиболее широко используемыми из них являются *теория множеств в аксиоматике Цермело–Френкеля* (ZF) (1908, 1922 гг.) и *теория классов и множеств в аксиоматике фон Неймана–Бернаиса–Геделя* (NBG) (1928, 1937, 1940 гг.).

В 1917 г. Миримановым [1] была построена по трансфинитной индукции *кумулятивная коллекция* ($\equiv$ *иерархия*) *множеств* V_α для всех порядковых чисел α такая, что

- 1) $V_0 \equiv \emptyset$;
- 2) $V_{\alpha+1} = V_\alpha \cup \mathcal{P}(V_\alpha)$ ($\mathcal{P}(V_\alpha)$ обозначает множество всех подмножеств множества V_α);
- 3) $V_\alpha = \bigcup [V_\beta \mid \beta \in \alpha]$ для любого предельного порядкового числа α .

Оказалось, что и сами *кумулятивные множества* V_α , и вся коллекция $[V_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{On}]$ в целом обладают многими замечательными свойствами. В частности, фон Нейман [2] доказал, что аксиома регулярности в ZF равносильна свойству $\forall x \exists \alpha$ (α – порядковое число $\wedge x \in V_\alpha$) и класс $\bigcup [V_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{On}]$ является абстрактной ($\equiv$ классовой) моделью ZF в ZF.

Более того, после введения Цермело [3], Серпинским и Тарским [4] понятия (*сильно недостижимого кардинального числа* Цермело [3] (не строго) и Шепердсон [5] (строго) доказали, что множество является супертранзитивной стандартной моделью NBG в ZF тогда и только тогда, когда оно имеет вид $V_{\kappa+1}$ для некоторого недостижимого кардинального числа κ .

Для аксиоматического построения недостижимых кардинальных чисел Тарским [6] (см. также [7, IX, §§ 1, 5]) было введено понятие *множества Тарского* U , которое определяется следующими свойствами:

- 1) $X \in U \implies X \subset U$ (*свойство транзитивности*);
- 2) $X \in U \implies \mathcal{P}(X) \in U$ (*свойство экспоненциальности*);
- 3) $((X \subset U) \wedge \forall f (f \in U^X \implies \text{rng } f \neq U)) \implies X \in U$ (*свойство Тарского*).

Тарским в [6] было доказано, что множество $V_\aleph$ для каждого недостижимого кардинального числа $\aleph$ ($\equiv$ *недостижимое кумулятивное множество*) является множеством Тарского. В связи с этим оставался открытым вопрос: *насколько аксиоматическое понятие множества Тарского шире конструктивного понятия недостижимого кумулятивного множества?*

В данной статье дается ответ на этот вопрос: *понятия недостижимого кумулятивного множества и несчетного множества Тарского равносильны*. Кроме того, устанавливается равносильность этих понятий понятию *универсального множества* и введенному авторами понятию *галактического множества* (см. теорему о совпадении).

В данной статье указанный вопрос решается для теории множеств ZF (с аксиомой выбора). Для теории множеств NBG все остается справедливым в равной мере. Для удобства читателя все необходимые сведения, недостаточно освещенные в литературе или просто принадлежащие математическому фольклору, приводятся с полными доказательствами.

Авторы приносят благодарность П. В. Андрееву, В. Г. Кановею, В. А. Любецкому, А. В. Михалеву, а также всем участникам семинара по математической логике в МГУ под руководством академика С. И. Адяна и профессора В. А. Успенского за ряд ценных замечаний и предложений.

1. Недостижимые кумулятивные множества и универсальные множества в теории ZF. За определениями в теории ZF (с аксиомой выбора) понятий *класса* $\mathbf{C}(\vec{u}) \equiv \{x \mid \varphi(x, \vec{u})\}$, *определимого формулой* $\varphi(x, \vec{u})$, *универсального класса* ($\equiv$ класса всех множеств) $\mathbf{V}$, *ординального числа*, *класса всех ординальных чисел* $\mathbf{On}$, *последующего ординального числа* $\alpha + 1$, *предельного ординального числа*, *кардинала*, *мощности множества* (обозначение $\text{card } X$ или $|X|$) мы отсылаем к монографиям [8]–[10].

В теории ZF для классов, определяемых формулами, вводятся многие теоретико-множественные конструкции и понятия (см. [8], [9], [10, 12.3]). В том числе в ZF определяются *пересечение* $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$, *объединение* $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$, *пара* $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$, *упорядоченная пара* $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle$, *координатное произведение* $\mathbf{A} * \mathbf{B}$ классов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, *одиночка* $\{\mathbf{A}\}$, *объединение* $\cup \mathbf{A}$ и *полный ансамбль* $\mathcal{P}(\mathbf{A})$ класса $\mathbf{A}$, *соответствие* $\mathbf{C}$ с областью определения $\text{dom } \mathbf{C}$ и областью значений $\text{rng } \mathbf{C}$, *функция* $\mathbf{F}$, *соответствие* $\mathbf{C}: \mathbf{A} \prec \mathbf{B}$, *функция* $\mathbf{F}: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$, (многозначная) *коллекция* $[\mathbf{B}_a \subset \mathbf{B} \mid a \in \mathbf{A}]$ с *объединением* $\cup [\mathbf{B}_a \subset \mathbf{B} \mid a \in \mathbf{A}]$ и *пересечением* $\cap [\mathbf{B}_a \subset \mathbf{B} \mid a \in \mathbf{A}]$, *простая коллекция* $(b_a \in \mathbf{B} \mid a \in \mathbf{A})$ с *классом членов* $\{b_a \in \mathbf{B} \mid a \in \mathbf{A}\}$ и т.д.

Хорошо известным в теории ZF является следующий

Принцип трансфинитной индукции. Пусть $\mathbf{C}$ – класс ординальных чисел такой, что

- 1) $\emptyset \in \mathbf{C}$;
- 2) $\alpha \in \mathbf{C} \implies \alpha + 1 \in \mathbf{C}$;
- 3) $(\alpha \text{ – предельное ординальное число} \wedge \alpha \subset \mathbf{C}) \implies \alpha \in \mathbf{C}$.

Тогда $\mathbf{C} = \mathbf{On}$.

Кроме того, в теории ZF существует следующий

Принцип $\in$ -индукции. Если класс $\mathbf{C}$ таков, что $\forall x (x \subset \mathbf{C} \implies x \in \mathbf{C})$, то $\mathbf{C} = \mathbf{V}$.

Кардинальное число κ называется *регулярным*, если для любого ординального числа β , для которого существует функция $f: \beta \rightarrow \kappa$ такая, что $\bigcup \text{rng } f = \kappa$, справедливо $\kappa \leq \beta$, где $\bigcup \text{rng } f = \kappa$ означает, что для любого $y \in \kappa$ существует $x \in \beta$ такое, что $y < f(x)$.

Кардинальное число $\kappa > \omega$ называется (*сильно*) *недостижимым*, если κ регулярно и $\text{card } \mathcal{P}(\lambda) < \kappa$ для всех ординальных чисел $\lambda < \kappa$.

Существование недостижимых кардинальных чисел недоказуемо в теории ZF (см. [8, п. 13]).

Построением по трансфинитной индукции можно получить коллекцию $[V_\alpha \subset \mathbf{V} \mid \alpha \in \mathbf{On}]$, удовлетворяющую следующим соотношениям:

- 1) $V_0 = \emptyset$;
- 2) $V_\alpha = \bigcup [V_\beta \mid \beta \in \alpha]$, если α – предельное ординальное число;
- 3) $V_{\alpha+1} = V_\alpha \cup \mathcal{P}(V_\alpha)$.

Эта коллекция называется *кумулятивной коллекцией* (Мириманова–фон Неймана–Цермело), а ее элементы V_α называются *кумулятивными множествами*.

Кумулятивная коллекция вполне упорядочена ординальными числами, поскольку соотношение $\alpha < \beta$ равносильно соотношению $V_\alpha \in V_\beta$ для любых ординальных чисел α и β .

Следующие три свойства этой коллекции понадобятся нам для дальнейших доказательств.

ЛЕММА 1.1. *Для любого ординального числа α , если $x \in V_\alpha$, то $x \subset V_\alpha$ (свойство транзитивности).*

ЛЕММА 1.2. *Для любого предельного ординального числа α , если $x \in V_\alpha$, то $\mathcal{P}(x) \in V_\alpha$ (свойство экспоненциальности).*

ЛЕММА 1.3. *Если $\alpha \geq \omega$, то $\omega \subset V_\alpha$. Если $\alpha > \omega$, то $\omega \in V_\alpha$.*

Множества V_κ для недостижимого кардинального числа κ будем называть *недостижимыми кумулятивными множествами*.

Множество U в теории ZF называется *универсальным* (см. [11, гл. I, § 6], [12], [13]), если оно обладает следующими свойствами:

- 1) $x \in U \implies x \subset U$ (свойство транзитивности);
- 2) $x \in U \implies \mathcal{P}(x), \bigcup x \in U$;
- 3) $x \in U \wedge y \in U \implies x \cup y, \{x, y\}, \langle x, y \rangle, x * y \in U$;
- 4) $x \in U \wedge (f \in U^x) \implies \text{rng } f \in U$ (сильное свойство замещения);
- 5) $\omega \in U$.

Ясно, что не все из этих свойств являются независимыми.

Из упомянутой во введении теоремы Цермело–Шепердсона следует

ТЕОРЕМА 1.1. *Для любого множества U следующие утверждения равносильны:*

- 1) U является универсальным множеством;
- 2) $U = V_\kappa$ для недостижимого кардинального числа $\kappa \equiv \sup(\mathbf{On} \cap U)$.

2. Множества Тарского и их свойства. Множество U в ZF назовем *множеством Тарского*, если оно обладает следующими свойствами (см. [6] и [7, гл. IX, § 5]):

- 1) $x \in U \implies x \subset U$ (свойство транзитивности);

- 2) $x \in U \implies \mathcal{P}(x) \in U$ (свойство экспоненциальности);
 3) $((x \subset U) \wedge \forall f(f \in U^x \implies \text{rng } f \neq U)) \implies x \in U$ (свойство Тарского).

ЛЕММА 2.1. Для любых множеств U и X следующие свойства равносильны:

- 3) $(x \subset U) \wedge \forall f(f \in U^x \implies \text{rng } f \neq U) \implies x \in U$;
 3') $(x \subset U) \wedge (|x| < |U|) \implies x \in U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $3') \vdash 3)$. Пусть $x \subset U$ и $\forall f(f \in U^x \implies \text{rng } f \neq U)$. Ясно, что $|x| \leq |U|$. Предположим, что $|x| = |U|$. Тогда существует биекция $f: x \leftrightarrow U$, что противоречит условию. Значит, $|x| < |U|$. По свойству 3') $x \in U$.

$3) \vdash 3')$. Пусть $f \in U^x$. Тогда $|\text{rng } f| \leq |x| < |U|$ влечет $\text{rng } f \neq U$. По свойству 3) $x \in U$.

Выведем из этих свойств другие свойства множеств Тарского.

ЛЕММА 2.2. Если U – множество Тарского и $x \in U$, то $|x| \in |U|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По свойствам 1) и 2) $x \in U$ влечет $\mathcal{P}(x) \in U$ и $\mathcal{P}(x) \subset U$. По теореме Кантора $|x| < |\mathcal{P}(x)| \leq |U|$.

ЛЕММА 2.3. Если U – множество Тарского, то $x \in U \wedge y \subset x \implies y \in U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x \in U$, то по свойству 2) $\mathcal{P}(x) \in U$, а по свойству 1) $\mathcal{P}(x) \subset U$. Так как $y \in \mathcal{P}(x)$, то $y \in U$, что и требовалось.

ЛЕММА 2.4. Если U – множество Тарского, то $x \in U \wedge (f \in U^x) \implies \text{rng } f \in U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x \in U$, то по лемме 2.2 $|x| < |U|$. Так как $f \in U^x$, то $\text{rng } f \subset U$ и $|\text{rng } f| \leq |x| < |U|$. Отсюда по свойству 3') из леммы 2.1 следует $\text{rng } f \in U$.

ЛЕММА 2.5. Если U – множество Тарского, то $|U| \in U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим класс $\mathbf{C} \equiv \{x \mid x \in \mathbf{On} \wedge x \notin U\}$. Этот класс непуст, так как иначе класс $\mathbf{On}$ был бы множеством. Поэтому он содержит наименьший элемент κ . Так как $\forall \alpha \in \kappa (\alpha \in U)$, то $\kappa \subset U$. Следовательно, $|\kappa| \leq |U|$. Предположим, что $|\kappa| < |U|$. Тогда по лемме 2.1 $\kappa \in U$, что не так. Значит, $|U| = |\kappa| \leq \kappa$, т.е. $|U| \in \kappa \subset U$.

ЛЕММА 2.6. Если U – множество Тарского, то $|U| \notin U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\kappa \equiv |U| \in U$. Тогда по свойству 2) $\mathcal{P}(\kappa) \in U$. По лемме 2.2 $\alpha \equiv |\mathcal{P}(\kappa)| \in |U|$. Учитывая лемму 2.5, заключаем, что $\alpha \in U$, а по свойству 1) $\alpha \subset U$. По теореме Кантора $\alpha > |U|$. Но так как $\alpha \subset U$, то $\alpha \leq |U|$. Из полученного противоречия выводим, что $|U| \notin U$.

ЛЕММА 2.7. Если U – множество Тарского, то для любого ординального числа $\alpha \in |U|$ выполнено $|\mathcal{P}(\alpha)| \in |U|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\alpha \in |U|$, а по лемме 2.5 $|U| \in U$, то $\alpha \in U$. Тогда по свойству 2) множества Тарского $\mathcal{P}(\alpha) \in U$. По лемме 2.2 $|\mathcal{P}(\alpha)| \in |U|$.

ЛЕММА 2.8. Если U – непустое множество Тарского, то $\emptyset \in U$ и $|U| \geq 5$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\forall x (\emptyset \subset x)$, то $x_0 \equiv \emptyset \subset U$. Так как $|\emptyset| = 0 < |U|$, по лемме 2.1 $x_0 \in U$. По свойству 2) $x_1 \equiv \{x_0\} = \mathcal{P}(\emptyset) \in U$. Из $x_0 \neq x_1$ следует, что $|U| \geq 2$. Из доказанных свойств следует, что $x_2 \equiv \{x_1\} \subset U$ и $|x_2| = 1 < |U|$. Поэтому по свойству 3') из леммы 2.1 $x_2 \in U$. Следовательно, $x_3 \equiv \{x_2\} \subset U$ и $|x_3| = 1 < |U|$ снова влечет $x_3 \in U$. Аналогичным образом, $x_4 \equiv \{x_3\} \in U$. Так как для $i = 0, \dots, 4$ все x_i различны, то $|U| \geq 5$.

ЛЕММА 2.9. Если U – множество Тарского, то

$$x, y \in U \implies \{x\}, \{x, y\}, \langle x, y \rangle \in U.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.8 $|U| \geq 5$. Поэтому $\{x\}, \{x, y\} \subset U$ и $|\{x\}| = 1 \leq |\{x, y\}| \leq 2 < |U|$ по свойству 3') влечет $\{x\}, \{x, y\} \in U$. Отсюда

$$\langle x, y \rangle \equiv \{\{x\}, \{x, y\}\} \in U.$$

ЛЕММА 2.10. Если U – множество Тарского, то $|x| \geq |U| \implies x \notin U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что это не так, т.е. для некоторого x выполнено $|x| \geq |U| \wedge x \in U$. По свойству 2) $y \equiv \mathcal{P}(x) \in U$. Так как $|\mathcal{P}(x)| > |x|$, то $|y| > |U|$. По свойству 1) $y \subset U$. Но в этом случае $|y| \leq |U|$. Из полученного противоречия следует, что $x \notin U$.

ЛЕММА 2.11. Если U – множество Тарского, то $x, y \in U \implies x \cup y \in U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\forall z (z \in x \vee z \in y \implies z \in U)$, то $x \cup y \subset U$. Так как $x, y \in U$, по лемме 2.10 $\alpha \equiv |x| < |U| \equiv \kappa$ и $\beta \equiv |y| < \kappa$. Нам нужно показать, что $|x \cup y| < \kappa$. Сначала рассмотрим случай, когда $\alpha \leq 2$ и $\beta \leq 2$. Тогда очевидным образом $|x \cup y| \leq 4 < |U|$ в силу леммы 2.8. Поэтому по свойству 3') из леммы 2.1 $x \cup y \in U$.

Далее будем предполагать, что $\alpha \geq \beta > 2$. Рассмотрим множества $P \equiv \{0\} \times x$, $Q \equiv \{1\} \times y$, $S \equiv x \cup y$ и $T \equiv P \cup Q$. Определим отображение $u: T \rightarrow S$, положив $u(0, a) \equiv a$ для любого $(0, a) \in P$ и $u(1, b) \equiv b$ для любого $(1, b) \in Q$. Так как отображение u сюръективно, то $|S| \leq |T|$.

Ясно, что существуют биективные функции $g: P \leftrightarrow \alpha$ и $h: Q \leftrightarrow \beta \subset \alpha$. Определим функцию $f: T \rightarrow \mathcal{P}(\alpha)$, полагая $f(p) \equiv \{g(p)\}$ для любого $p \in P$ и $f(q) \equiv \alpha \setminus \{h(q)\}$ для любого $q \in Q$. Так как $P \cap Q = \emptyset$, это определение корректно. Функция f инъективна. Действительно, функция f инъективна на P и на Q . Пусть $p \in P$, $q \in Q$ и $f(p) = f(q)$. Тогда $\{g(p)\} = \alpha \setminus \{h(q)\}$ влечет $\alpha = \{g(p)\} \cup \{h(q)\} = \{g(p), h(q)\} \leq 2$, что противоречит нашему предположению. Следовательно, $f(p) \neq f(q)$.

Из инъективности функции f из леммы 2.7 следует, что $|S| \leq |T| \leq |\mathcal{P}(\alpha)| < \kappa$. Поэтому по свойству 3') из леммы 2.1 $S \in U$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если U – множество Тарского, то $\omega \subset U$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если U – множество Тарского, то $|U| \geq \omega$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если U – множество Тарского, то $x, y \in U \implies x * y \in U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.11 и свойству 2) $B \equiv \mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup y)) \in U$. Из $A \equiv x * y \subset B$ в силу леммы 2.3 следует $A \in U$.

ЛЕММА 2.12. Если U – множество Тарского, то для любого ординального числа α выполнено $\alpha < |U| \implies |\alpha * \alpha| < |U|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай $|\alpha| \leq 2$. Тогда по лемме 2.8

$$|\alpha * \alpha| \leq |2 * 2| = 4 < |U|.$$

Далее будем предполагать, что $|\alpha| > 2$.

Так как $\alpha < |U| \equiv \kappa$, по лемме 2.7 $|\mathcal{P}(\alpha)| < \kappa$. Множество $X \equiv \alpha * \alpha$ состоит из упорядоченных пар $\langle \beta, \gamma \rangle$ таких, что $\beta, \gamma \in \alpha$. Разобьем множество X на три непесекающихся подмножества $X_1 \equiv \{\langle \beta, \gamma \rangle \mid \beta < \gamma < \alpha\}$, $X_2 \equiv \{\langle \beta, \beta \rangle \mid \beta < \alpha\}$ и $X_3 \equiv \{\langle \beta, \gamma \rangle \mid \gamma < \beta < \alpha\}$. Очевидно, что $X_1 \cup X_2 \cup X_3 = X$. Построим функцию $f: X \rightarrow \mathcal{P}(\alpha)$ следующим образом: если $x_1 = \langle \beta, \gamma \rangle \in X_1$, то $f(x_1) \equiv \{\beta, \gamma\} \in \mathcal{P}(\alpha)$; если $x_2 = \langle \beta, \beta \rangle \in X_2$, то $f(x_2) \equiv \{\beta\} \in \mathcal{P}(\alpha)$; если $x_3 = \langle \beta, \gamma \rangle \in X_3$, то $f(x_3) \equiv \alpha \setminus \{\beta, \gamma\} \in \mathcal{P}(\alpha)$. Функция f инъективна на X_1, X_2 и X_3 . Если $f(x_1) = f(x_2)$, то $\{\beta, \gamma\} = \{\beta\}$ влечет $\gamma = \beta < \gamma$, что невозможно. Если $f(x_1) = f(x_3)$, то $\{\beta, \gamma\} = \alpha \setminus \{\beta, \gamma\}$, что невозможно, поскольку $\alpha \neq \emptyset$. Наконец, если $f(x_2) = f(x_3)$, то $\{\beta\} = \alpha \setminus \{\beta, \gamma\}$ влечет $\alpha = \{\beta\} \cup \{\beta, \gamma\} = \{\beta, \gamma\}$ и, значит, $|\alpha| \leq 2$, что противоречит нашему предположению. Из полученного противоречия следует, что функция f инъективна. Поэтому $|X| \leq |\mathcal{P}(\alpha)| < \kappa$.

Следующая теорема и следствие из нее были доказаны Тарским в [6] (см. также [7, гл. IX, § 5, теорема 1]). Мы здесь даем другое доказательство.

ТЕОРЕМА 2.1. Если U – множество Тарского, то $\kappa \equiv |U|$ является регулярным кардинальным числом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что кардинальное число κ не регулярно. Тогда $\alpha' \equiv cf(\kappa) < \kappa$ и по лемме 2.5 $\alpha' \in U$. По определению существует функция $\varphi: \alpha' \rightarrow \kappa$ такая, что $\bigcup \text{rng } f = \kappa$. Обозначим $\text{rng } \varphi$ через A и рассмотрим кардинальное число $\alpha \equiv |A| \leq \alpha' < \kappa$. По лемме 2.5 $A \subset U$ и $\alpha \in U$. Построим функцию $g: A \rightarrow \mathcal{P}(\kappa)$ следующим образом. Рассмотрим произвольное ординальное число $\beta \in A$ и множество $A_\beta \equiv \{\gamma \in A \mid \gamma < \beta\}$. Определим $\beta' \equiv \sup A_\beta = \bigcup A_\beta$ при $A_\beta \neq \emptyset$ и $\beta' \equiv 0$ при $A_\beta = \emptyset$. Рассмотрим множество $C_\beta \equiv \{\gamma \in \kappa \mid \beta' \leq \gamma < \beta\}$ и положим $g(\beta) \equiv C_\beta$. Покажем, что при $\beta_1 \neq \beta_2$ выполнено $g(\beta_1) \cap g(\beta_2) = \emptyset$. Действительно, пусть $\beta_1 < \beta_2$. Тогда $\beta_1 \in A_{\beta_2}$ и, следовательно, $\beta_1 \leq \beta'_2$. Если $x \in g(\beta_1) \cap g(\beta_2)$, то $x \in C_{\beta_1} \cap C_{\beta_2}$, откуда $x \in \kappa \wedge x < \beta_1 \wedge \beta'_2 \leq x$, что невозможно. Из полученного противоречия заключаем, что $g(\beta_1) \cap g(\beta_2) = \emptyset$. Теперь покажем, что $B \equiv \bigcup \{g(\beta) \mid \beta \in A\} = \kappa$. Из определения множеств $g(\beta)$ очевидно, что $B \subset \kappa$. Предположим теперь, что $x \in \kappa$. Так как $\bigcup A = \kappa$, то найдется $\beta \in A$ такое, что $x \in \beta$. Поэтому множество $D \equiv \{\gamma \in A \mid x \in \gamma\}$ непусто, а следовательно, имеет наименьший элемент λ . По определению множества D справедливо $\forall \gamma \in A (\gamma < \lambda \implies \gamma \leq x)$, откуда следует, что $x \geq \lambda'$. Значит, $\lambda' \leq x < \lambda$, т.е. $x \in g(\lambda)$. Следовательно, $B = \kappa$.

Так как U – множество Тарского, а κ – его мощность, существует взаимно-однозначная функция $f: \kappa \leftrightarrow U$. Так как $\kappa = \bigcup \{g(\beta) \mid \beta \in A\}$ и множества $g(\beta)$ попарно не пересекаются, то $U = \bigcup \{f[g(\beta)] \mid \beta \in A\}$. Обозначим множества $f[g(\beta)]$ через U_β . Зафиксируем $\beta \in A$. Из $C_\beta \subset \beta$ следует $|U_\beta| = |C_\beta| \leq |\beta|$.

Рассмотрим (возможно, пустое) множество $F_\beta \equiv \{q \in U_\beta \mid |q| = \alpha\}$. По доказанному выше $|F_\beta| \leq |U_\beta| \leq |\beta| \leq \beta$. Поэтому

$$\begin{aligned} |\cup F_\beta| &= |\cup \{q \mid q \in F_\beta\}| \leq |\cup \{q * \{q\} \mid q \in F_\beta\}| \equiv \sum (|q * \{q\}| \mid q \in F_\beta) \\ &= \sum (|q| \mid q \in F_\beta) = \alpha |F_\beta| \leq \alpha |\beta| = \sum (\alpha_q \mid q \in \beta) \equiv |\cup [\alpha * \{q\} \mid q \in \beta]|, \end{aligned}$$

где $\alpha_q \equiv \alpha$ для любого $q \in \beta$. Так как $\cup [\alpha * \{q\} \mid q \in \beta] \subset \alpha * \beta \subset \max(\alpha, \beta) * \max(\alpha, \beta)$ и $\max(\alpha, \beta) < \kappa$, то по лемме 2.12 $|\cup F_\beta| < \kappa$.

Из $F_\beta \subset U_\beta \subset U$ и транзитивности U следует $\cup F_\beta \subset U$. Поэтому в силу доказанного выше неравенства мы заключаем, что $V_\beta \equiv U \setminus \cup F_\beta \neq \emptyset$ для любого $\beta \in A$. По аксиоме выбора существует функция выбора $c: \mathcal{P}(U) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow U$ такая, что $c(X) \in X$ для любого $X \in \mathcal{P}(U) \setminus \{\emptyset\}$. Определим функцию $h: A \rightarrow U$, полагая $h(\beta) \equiv c(V_\beta) \in V_\beta$. Возьмем любую биекцию $u: \alpha \leftrightarrow A$ и рассмотрим функцию $h' = h \circ u: \alpha \leftrightarrow U$. По лемме 2.5 $\alpha \in \kappa \subset U$. Поэтому по лемме 2.4 $M \equiv \text{rng } h = \text{rng } h' \in U$.

Очевидно, что $|M| \leq \alpha$. Из транзитивности U следует $\alpha \subset U$. Если α – бесконечное число, то для множества $M' \equiv M \cup \alpha \subset U$ справедливы неравенства

$$\alpha \leq |M'| \leq |(M * \{0\}) \cup (\alpha * \{1\})| \equiv |M| + \alpha = \alpha,$$

откуда следует равенство $|M'| = \alpha$. Из $\alpha \in U$ и $M \in U$ по лемме 2.11 следует $M' \in U$. Если α – конечное (т.е. натуральное) число, то в силу следствия 2 к лемме 2.11 множество $U \setminus M$ является бесконечным. Поэтому существует инъективное отображение $u: \omega \rightarrow U \setminus M$. Рассмотрим натуральное число $n \equiv \alpha - |M|$ и конечное множество $N \equiv u[n] \subset U \setminus M$. В этом случае для множества $M' \equiv M \cup N$ справедливо равенство $|M'| = \alpha$. По следствию 1 к лемме 2.11 $n \in \omega \subset U$. Поэтому по лемме 2.4 $N = \text{rng}(u[n]) \in U$. Из $M \in U$ и $N \in U$ по лемме 2.11 следует $M' \in U$.

Так как выше было доказано, что $U = \cup \{U_\beta \mid \beta \in A\}$, то $M' \in U_\beta$ для некоторого $\beta \in A$. Кроме того, $|M'| = \alpha$. Значит, $M' \in F_\beta$. Если $x \in M' \in F_\beta$, то $x \in \cup F_\beta$, т.е. $M' \subset \cup F_\beta$. Из $h(\beta) \in V_\beta = U \setminus \cup F_\beta$ следует, что $h(\beta) \notin M'$. Однако по определению $h(\beta) \in M \subset M'$. Из полученного противоречия следует, что кардинал κ регулярен.

СЛЕДСТВИЕ. Если U – множество Тарского и $\kappa \equiv |U| > \omega$, то κ является недостижимым кардинальным числом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2.1 κ – регулярное кардинальное число. По лемме 2.7 для любого $\alpha < \kappa$ выполнено $|\mathcal{P}(\alpha)| \in \kappa$. По условию $\kappa > \omega$. Следовательно, κ – недостижимое кардинальное число.

ТЕОРЕМА 2.2. Если U – множество Тарского, то $x \in U \implies \cup x \in U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим числа $\alpha \equiv |x|$ и $\kappa \equiv |U|$ и некоторую биекцию $u: \alpha \leftrightarrow x$. По лемме 2.2 $\alpha \in \kappa$. Из транзитивности U следует $\cup x \subset U$. Значит, $|\cup x| \leq \kappa$.

Предположим, что $|\cup x| = \kappa$. Тогда существует биекция $f: \cup x \leftrightarrow \kappa$. Зафиксируем элемент $a \in \alpha$. Тогда $u(a) \in x$ влечет $u(a) \subset \cup x$. Поэтому мы можем рассмотреть инъективное отображение $g_a \equiv f|u(a): u(a) \hookrightarrow \kappa$. Рассмотрим число $\beta_a \equiv |u(a)|$, некоторую биекцию $v_a: \beta_a \leftrightarrow u(a)$ и инъективное отображение $h_a \equiv g_a \circ v_a: \beta_a \hookrightarrow \kappa$. Предположим, что $\cup \text{rng } h_a = \kappa$. Тогда в силу теоремы 2.1 $\beta_a \geq \kappa$. Однако $u(a) \in x \subset U$ в силу леммы 2.2 влечет $\beta_a \equiv |u(a)| < \kappa$. Из этого противоречия следует, что $\sup \text{rng } h_a = \cup \text{rng } h_a < \kappa$.

Поэтому мы можем определить функцию $\eta: \alpha \rightarrow \kappa$, полагая $\eta(a) \equiv \sup \text{rng } h_a$. Рассмотрим множество $Z \equiv \text{rng } \eta \subset \kappa$. По доказанному $z \leq \kappa$ для любого $z \in Z$. Пусть π – порядковое число такое, что $z \leq \pi$ для любого $z \in Z$. Возьмем любой элемент $q \in \kappa$ и рассмотрим элемент $p \equiv f^{-1}(q) \in \cup x$. Тогда $p \in y \in x$ для некоторого $y \in x$. Рассмотрим элемент $a \equiv u^{-1}(y) \in \alpha$. Так как $p \in y = u(a)$, то $q = f(p) \in f[u(a)] = \text{rng } q_a = \text{rng } h_a$. Следовательно, $q \leq \sup \text{rng } h_a \equiv \eta(a) \leq \pi$. Это означает, что $\sup \kappa \leq \pi$. Так как κ – предельное число, то $\kappa = \sup \kappa \leq \pi$. Отсюда следует, что $\kappa = \sup Z = \cup Z = \cup \text{rng } \eta$. Из теоремы 2.1 теперь следует, что $\alpha \geq \kappa$, а это противоречит неравенству $\alpha < \kappa$.

Значит, $|\cup x| < \kappa$. По свойству $3')$ из леммы 2.1 теперь заключаем, что $\cup x \in U$.

3. Галактические множества и их связь с множествами Тарского. Рассмотрим некоторое множество x . Любую конечную последовательность $(x_i \mid i \in n+1)$ такую, что $x_0 = x$ и $x_{i+1} \in x_i$ для любого $i \in n$, будем называть *цепочкой подэлементов множества x (длины n)*.

Назовем множество U *доминантным*, если для него равносильны следующие условия:

- 1) $x \in U$;
- 2) все элементы всех цепочек подэлементов множества x имеют мощность меньшую $|U|$.

ЛЕММА 3.1. *Любое доминантное множество транзитивно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть множество U доминантное, $x \in U$ и $y \in x$. Любая цепочка подэлементов множества y является подцепочкой некоторой цепочки подэлементов множества x и, значит, все ее члены имеют мощность меньшую $|U|$. Следовательно, $y \in U$.

ЛЕММА 3.2. *Любое доминантное множество U обладает свойством $3'$) множества Тарского, т.е. $x \subset U \wedge |x| < |U| \implies x \in U$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \subset U$ и $|x| < |U|$. Рассмотрим произвольную цепочку подэлементов $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ множества x . Так как $x_1 \in x_0 = x \subset U$, то из $x_1 \in U$ и свойства транзитивности множества U , установленного в лемме 3.1, по индукции выводится, что $x_i \in U$ для любого $i = 1, \dots, n$. Поэтому $|x_i| < |U|$ для любого $i = 1, \dots, n$. Кроме того, по условию $|x_0| = |x| < |U|$. Следовательно, $x \in U$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Любое множество Тарского является доминантным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(x_i \mid i \in n+1)$ – цепочка подэлементов множества x и $x \in U$. Из свойства транзитивности по индукции выводится, что $x_i \in U$ для любого $i \in n+1$. По лемме 3.2 $|x_i| < |U|$.

Обозначим класс, состоящий из множеств, удовлетворяющих условию 2) из определения доминантности, через $\mathbf{C}$. Покажем, что $\mathbf{C} \subset U$. Рассмотрим класс $\mathbf{D} \equiv \{x \mid (x \in U \wedge x \in \mathbf{C}) \vee x \notin \mathbf{C}\}$ и покажем, что он удовлетворяет принципу ϵ -индукции. Рассмотрим некоторое $y \subset \mathbf{D}$. Тогда для всех $z \in y$ выполнено $(z \in U \wedge z \in \mathbf{C}) \vee z \notin \mathbf{C}$. Если $z \notin \mathbf{C}$ для некоторого $z \in y$, то $y \notin \mathbf{C}$, и поэтому $y \in \mathbf{D}$. Пусть теперь $\forall z \in y (z \in U \wedge z \in \mathbf{C})$. Рассмотрим $\alpha \equiv |y|$ и $\kappa \equiv |U|$. Если $\alpha \geq \kappa$, то $y \notin \mathbf{C}$, откуда следует, что $y \in \mathbf{D}$. Пусть $\alpha < \kappa$. В этом случае $y \in U$ по лемме 2.1. Покажем, что $y \in \mathbf{C}$. Действительно, рассмотрим любую цепочку подэлементов $(y_i \mid i \in n+1)$ множества y . Тогда последовательность $(y_i \mid i \in (n+1) \setminus 1)$ является цепочкой подэлементов множества

$y_1 \in y = y_0$. Так как по предположению $y_1 \in \mathbf{C}$, все элементы последовательности $(y_i \mid i \in (n+1) \setminus 1)$ имеют мощность меньшую κ . Таким образом, $y \in \mathbf{C}$. Следовательно, $y \in U \wedge y \in \mathbf{C}$, и поэтому $y \in \mathbf{D}$. Отсюда мы заключаем, что класс $\mathbf{D}$ удовлетворяет принципу $\in$ -индукции. Поэтому $\mathbf{D} = \mathbf{V}$. Значит, $\forall x((x \in U \wedge x \in \mathbf{C}) \vee x \notin \mathbf{C})$, т.е. $\mathbf{C} \subset U$.

ЛЕММА 3.3. *Для каждого кардинального числа α может существовать не более одного множества Тарского мощности α .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существуют два множества Тарского U_1 и U_2 одинаковой мощности α . Пусть $x \in U_1$. Тогда по предложению 3.1 $|x| < \alpha = |U_1|$ и любая цепочка подэлементов множества x состоит из множеств мощности меньшей $\alpha = |U_1|$, откуда следует, что $|x| < |U_2|$ и любая цепочка подэлементов множества x состоит из множеств мощности меньшей $|U_2|$. Следовательно, по тому же предложению $x \in U_2$. Значит, $U_1 \subset U_2$. Аналогично $U_2 \subset U_1$, откуда следует, что $U_1 = U_2$.

Множество U называется *экспоненциальным*, если $\forall x \in U (\mathcal{P}(x) \in U)$. Доминантное и экспоненциальное множество будем называть *галактическим*.

ТЕОРЕМА 3.1. *Для множества U следующие утверждения равносильны:*

- 1) U является множеством Тарского;
- 2) U является галактическим множеством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\rightarrow$ 2). Эта выводимость следует из свойства экспоненциальности множества Тарского и предложения 3.1.

2) $\rightarrow$ 1). Эта выводимость следует из лемм 3.1 и 3.2 и леммы 2.1.

Покажем, что в предположении континуум-гипотезы существует доминантное множество, не являющееся экспоненциальным.

ЛЕММА 3.4. *Если $|2^\omega| = \omega_1$, то существует доминантное множество мощности ω_1 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $|2^\omega| = \omega_1$, то для доказательства существования доминантного множества мощности ω_1 достаточно показать, что множество, состоящее из всех множеств, все цепочки подэлементов которых состоят лишь из счетных множеств, имеет мощность ω_1 . Обозначим это множество через X . Так как $\omega_1 \subset X$, то $|X| \geq \omega_1$.

Теперь покажем, что $|X| \leq \omega_1$, т.е. существует инъективная функция из множества X во множество бесконечных последовательностей нулей и единиц.

Любое множество $x \in X$ можно представить в виде дерева, корнем которого является само множество x , ветвями – все его цепочки подэлементов, а листьями – последние элементы этих цепочек, т.е. множества, не содержащие никаких множеств (пустые множества). Все ветви такого дерева имеют конечную длину, при этом число этих ветвей счетно. Число этажей дерева также счетно, на каждом этаже находится счетное число множеств (узлов или листьев дерева). Понятно, что некоторые деревья соответствуют одному и тому же множеству из X (это деревья, получающиеся друг из друга перенумеровыванием вершин), но каждому дереву соответствует только одно множество из X . Будем рассматривать не сами деревья, а их “классы изоморфности”.

Пронумеруем некоторым образом листья дерева (это можно сделать, так как их число счетно). Сопоставим такому “пронумерованному” дереву функцию $f \in {}^\omega \times {}^\omega$ следующим образом: $f(n, m)$ – это наибольшее натуральное k такое, что n -й и m -й лис-

тля оба заканчивают ветви некоторого множества с k -го этажа (в случае $n = m$ положим $f(n, m) \equiv n$). Такое число k всегда можно определить, так как, во-первых, любые два листа заканчивают ветви начального множества x , т.е. $k \geq 1$, а, во-вторых, $k \leq \min(m, n)$. По такой функции $f \in \omega^{\omega \times \omega}$ класс изоморфности дерева восстанавливается однозначно, поэтому $|X| \leq |\omega^{\omega \times \omega}|$.

Покажем, что $|\omega^{\omega \times \omega}| = |2^\omega| = \omega_1$. Так как $|\omega \times \omega| = \omega$, то $|\omega^{\omega \times \omega}| = |\omega^\omega|$. Множество ω^ω – это множество бесконечных последовательностей натуральных чисел. Так как $|\omega^\omega| \geq |2^\omega|$, нам достаточно показать, что $|\omega^\omega| \leq |2^\omega|$, т.е. построить инъективное отображение из множества бесконечных последовательностей натуральных чисел во множество бесконечных последовательностей нулей и единиц. Сделаем это следующим образом. Пусть $N \equiv \{n_i \in \omega \mid i \in \omega\}$ – бесконечная последовательность натуральных чисел. Поставим ей в соответствие следующую последовательность $M \equiv (m_j \in 2 \mid j \in \omega)$ нулей и единиц: для каждого $i \in \omega$ при $j = \sum(n_k \mid k \in i) + i$ положим $m_j \equiv 0$; для всех остальных j положим $m_j \equiv 1$. Например, если имели последовательность $1, 2, 3, 4, 5, \dots$, то она отобразится в последовательность

$$1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, \dots$$

Такое отображение инъективно, поэтому $|\omega^\omega| = |2^\omega|$, а значит, $|X| \leq |2^\omega|$. Так как $|X| \geq |2^\omega|$, по теореме Кантора $|X| = |2^\omega|$. Так как по предположению $|2^\omega| = \omega_1$, то $|X| = \omega_1$ и, значит, X является доминантным.

То, что такое множество X не является экспоненциальным, очевидно, так как кардинальное число ω_1 не удовлетворяет условию $\forall \alpha (\alpha \in \omega_1 \implies 2^\alpha \in \omega_1)$.

4. Характеризация множеств Тарского. Основная теорема о совпадении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть U – множество Тарского и $|U| = \omega$. Тогда $U = V_\omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1.2 $\omega \subset V_\omega$ влечет $\omega \leq |V_\omega|$. Так как $V_\omega = \cup[V_n \mid n \in \omega]$ и $|V_n| < \omega$, то $|V_\omega| \leq \omega$. Следовательно, $|V_\omega| = \omega$. Покажем, что V_ω является множеством Тарского. По лемме 1.1 множество V_ω транзитивно, по лемме 1.2 оно экспоненциально. Покажем, что V_ω удовлетворяет свойству 3'). Рассмотрим некоторое множество $x \subset V_\omega$ такое, что $|x| < |V_\omega| = \omega$. Если $y \in x \subset V_\omega = \cup[V_n \mid n \in \omega]$, то $N(y) \equiv \{n \in \omega \mid y \in V_n\} \neq \emptyset$. Поэтому множество $N(y)$ имеет наименьший элемент $n(y) \in \omega$. Так как множество x конечно, то множество $M \equiv \{m \in \omega \mid \exists y \in x (m = n(y))\}$ имеет наибольший элемент n . Следовательно, $x \subset V_n$ влечет $x \in V_{n+1} \subset V_\omega$. Таким образом, V_ω является множеством Тарского. Так как по лемме 3.3 множество Тарского мощности ω единственно, то $U = V_\omega$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть U – множество Тарского и $\aleph \equiv |U| > \omega$. Тогда

- 1) U является универсальным множеством;
- 2) $U = V_\aleph$ для недостижимого кардинального числа $\aleph = \sup(\text{On} \cap U)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Покажем, что множество U обладает всеми свойствами универсального множества.

Свойство 1) следует из свойства 1) множества Тарского.

Свойство $x \in U \implies \mathcal{P}(x) \in U$ следует из свойства 2) множества Тарского. Свойство $x \in U \implies \cup x \in U$ следует из теоремы 2.2.

Свойство $x, y \in U \implies x \cup y \in U$ следует из леммы 2.11. Свойства $x, y \in U \implies \{x, y\}, \langle x, y \rangle \in U$ следуют из леммы 2.9. Свойство $x, y \in U \implies x * y \in U$ следует из следствия 3 к лемме 2.11.

Свойство 4) следует из леммы 2.4.

Так как по условию $|U| > \omega$, по лемме 2.5 $\omega \in U$.

Таким образом, множество U является универсальным.

2) По теореме 1.1 $U = V_\kappa$ для недостижимого кардинального числа $\kappa = \sup(\mathbf{On} \cap U)$.

Следующее утверждение принадлежит Тарскому [6] (см. также [7, гл. IX, § 1, теорема 6]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть κ – недостижимое кардинальное число. Тогда множество V_κ является множеством Тарского.

Теперь мы можем доказать основную теорему о совпадении.

ТЕОРЕМА 4.2. Для множества U в теории ZF следующие утверждения равносильны:

- 1) U является несчетным множеством Тарского;
- 2) U является универсальным множеством;
- 3) U является недостижимым кумулятивным множеством, т.е. $U = V_\kappa$ для некоторого недостижимого кардинального числа κ ;
- 4) U является несчетным галактическим множеством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выводимость 1) $\vdash$ 3) следует из теоремы 4.1.

Выводимость 3) $\vdash$ 1) следует из предложения 4.2.

Равносильность 2) и 3) следует из теоремы 1.1.

Равносильность 1) и 4) следует из теоремы 3.1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Mirimanov D. Les antinomies de Russell et de Burali-Forti et le problème fondamental de la théorie des ensembles // L'Enseignement Math. 1917. V. 19. P. 37–52.
- [2] von Neumann J. Über eine Widerspruchsfreiheitsfrage in der axiomatischen Mengenlehre // J. Reine Angew. Math. 1929. V. 160. P. 227–241.
- [3] Zermelo E. Über Grenzzahlen und Mengenbereiche // Fund. Math. 1930. V. 16. P. 29–47.
- [4] Sierpiński W., Tarski A. Sur une propriété caractéristique des nombres inaccessibles // Fund. Math. 1930. V. 15. P. 292–300.
- [5] Shepherdson J. Inner models for set theory. I // J. Symbolic Logic. 1951. V. 16. P. 161–190; II // J. Symbolic Logic. 1952. V. 17. P. 225–237; III // J. Symbolic Logic. 1953. V. 18. P. 145–167.
- [6] Tarski A. Über unerreichbare Kardinalzahlen // Fund. Math. 1938. V. 30. P. 68–89.
- [7] Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970.
- [8] Йех Т. Теория множеств и метод форсинга. М.: Мир, 1973.
- [9] Jech T. Set Theory. Berlin: Springer, 2003.
- [10] Голдблатт Р. Топосы. Категорный анализ логики. М.: Мир, 1983.
- [11] MacLane S. Categories for the Working Mathematician. Berlin: Springer-Verlag, 1971.
- [12] Forster T. Set Theory with a Universal Set. New York: Oxford Univ. Press, 1995.
- [13] Holmes M. R. Elementary Set Theory with a Universal Set. Louvain-la-Neuve: Academia Btuylant, 1998.