Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Колесников, Алгебраические сплайны в локально выпуклых пространствах, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 3, 339–353

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2497>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 18:19:32

УДК 519.6

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А. П. Колесников

В векторном пространстве непрерывных функций найдено вариационное решение конечной системы линейных функциональных уравнений. Выяснено, какой локально выпуклой топологией нужно наделить векторное пространство и какими должны быть свойства оценочного функционала, чтобы получить искомое решение в форме разложения по базису, двойственному для семейства функционалов системы. Его базисные элементы вычислены точно и названы базисными алгебраическими сплайнами, а построенная по ним линейная оболочка – пространством алгебраических сплайнов в соответствующем локально выпуклом пространстве.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. Значительное число задач численного анализа (интерполяции, нахождения слабых решений операторных уравнений в методе Галеркина и т.д.) приводится к конечной системе линейных функциональных уравнений вида $f_i(x) = r_i$, $r = \{r_i\}$, $i = 1, \dots, n$ (далее просто системе), где считаются заданными конечное семейство линейных линейно независимых функционалов $\{f_i\}$ на $\mathbf{E}$ и набор чисел $\{r_i\}$; $\mathbf{E}$ – векторное пространство, $x \in \mathbf{E}$ – искомый элемент. Требуется решить следующие вопросы:

- 1) определить условия (в частности, топологию в $\mathbf{E}$), при которых система разрешима;
- 2) установить подмножество в $\mathbf{E}$, на котором система имеет единственное решение;
- 3) построить метод ее решения.

Наибольшее распространение в численном анализе получил способ нахождения решений $x \in \mathbf{E}$ системы с помощью заданных конечномерных аппроксимирующих пространств $\mathbf{E}_n \subset \mathbf{E}$. Эта схема решения носит название проекционного метода. Мы рассматриваем способ, при котором базис аппроксимирующего пространства $\mathbf{E}_n \subset \mathbf{E}$ не выбирается, а вычисляется исходя из условий задачи и требований к дифференциально-аналитическим свойствам решения. Базис пространства $\mathbf{E}_n$ образует семейство функций, дуальное для заданного семейства функционалов $\{f_i\}$. Он определяется как точные вариационные решения системы, которые строятся путем минимизации некоторого оценочного функционала с ограничениями в виде равенств, задаваемых уравнениями системы. За решениями этой вариационной задачи сохраняется термин “алгебраический сплайн”, поскольку таково же вариационное определение классического сплайна в гильбертовых пространствах.

Работа выполнена при поддержке фонда по фундаментальным исследованиям в области авиационной и ракетно-космической техники, грант № 96-17-1.

2. Порождение векторных пространств. Изучим предварительно алгебраический аспект проблемы порождения локально выпуклых пространств как векторных [1], [2]. Пусть задан изоморфизм $A: \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ векторных пространств $\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}$, причем базис пространства $\mathbf{F}$ известен. Существует обратное отображение $A^{-1} = G: \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{E}$, и тогда $G(\sum \lambda_\alpha f_\alpha) = \sum \lambda_\alpha e_\alpha$, $\alpha \in \mathbf{A}$, где $\mathbf{A}$ – произвольное множество индексов и (f_α) – заданный базис в пространстве $\mathbf{F}$. Семейство (e_α) , $\alpha \in \mathbf{A}$, определенное равенствами $e_\alpha = G(f_\alpha)$, образует базис в пространстве $\mathbf{E}$. В такой постановке задача построения базисов сводится к нахождению изоморфизмов пространств $\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}$, при этом пространство $\mathbf{F}$ будем называть *калибровочным* для $\mathbf{E}$. Для ее решения используем теорию двойственности в векторных пространствах.

Сопряженное или двойственное по отношению к A линейное отображение A^* определяется равенством $(A^*f)(x) = f(Ax)$, $x \in \mathbf{E}$ и $f \in \mathbf{F}^*$, и характеризуется следующими свойствами эквивалентности [1]:

- 1) A^* есть изоморфизм из $\mathbf{F}^*$ в $\mathbf{E}^*$ $\iff A$ отображает $\mathbf{E}$ на $\mathbf{F}$;
- 2) A^* отображает $\mathbf{F}^*$ на $\mathbf{E}^*$ $\iff A$ есть изоморфизм из $\mathbf{E}$ в $\mathbf{F}$;
- 3) A^* есть изоморфизм $\iff A$ есть изоморфизм.

Пусть $\mathbf{E}$ – векторное пространство непрерывных числовых функций, определенных на произвольном множестве $\mathbf{T}$, $x(t) \in \mathbf{E}$, $t \in \mathbf{T}$ и на $\mathbf{E}$ задан функционал δ_t (точка t фиксирована), действие которого на элемент x определяется так: $\langle x, \delta_t \rangle = x(t)$. Очевидно, он линейный и тогда $\delta_t \in \mathbf{E}^*$.

А) Для заданного изоморфизма $A: \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ пространств $\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}$ построим обратное для него отображение, используя определение сопряженного оператора $A^*: \mathbf{F}^* \rightarrow \mathbf{E}^*$, осуществляющего изоморфизм пространств $\mathbf{F}^*$ и $\mathbf{E}^*$. В силу предположения $\delta_t \in \mathbf{E}^*$ оператор A^* характеризуется свойством: для всякого $t \in \mathbf{T}$ в $\mathbf{F}^*$ существует элемент G_t такой, что выполнено условие $A^*G_t = \delta_t$, $G_t \in \mathbf{F}^*$, т.е. это уравнение разрешимо. Числовая функция $G_t(s) \equiv G(t, s): \mathbf{T} \times \mathbf{T} \rightarrow \mathbb{R}$ – фундаментальное решение (функция Грина) оператора A^* .

Напишем цепочку очевидных равенств: $x(t) = \delta_t(x) = (A^*G_t)(x) = (G_t)(Ax) = G_t(f)$, $f \in \mathbf{F}$, $G_t \in \mathbf{F}^*$. Равенство $x(t) = G_t(f)$, $f \in \mathbf{F}$, $G_t \in \mathbf{F}^*$, устанавливает линейное отображение пространства $\mathbf{F}$ на $\mathbf{E}$ и, следовательно, реализует обратное для A отображение G . Множество $S = \{G_t(f)\}$, которое образуется, когда линейная форма f пробегает все пространство $\mathbf{F}$, совпадает с $\mathbf{E}$. Таким образом, пространство $\mathbf{F}$ порождает пространство $\mathbf{E}$ и если в нем известен базис (f_α) , $\alpha \in \mathbf{A}$, то соответствующий базис в пространстве $\mathbf{E}$ строится по формуле $e_\alpha(t) = G_t(f_\alpha)$, $\alpha \in \mathbf{A}$.

В) Пусть $A: \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ действует из $\mathbf{E}$ в $\mathbf{F}$, а оператор $A^*: \mathbf{F}^* \rightarrow \mathbf{E}^*$ осуществляет изоморфизм пространства $\mathbf{F}^*$ в $\mathbf{E}^*$. Тогда A есть отображение на. Если $\delta_t \in A^*(\mathbf{F}^*)$, то для всякого $t \in \mathbf{T}$ в $\mathbf{F}^*$ существует решение уравнения $A^*G_t = \delta_t$ и оказываются справедливыми соотношения $x(t) = \delta_t(x) = (A^*G_t)(x) = (G_t)(Ax) = G_t(f)$, $f \in \mathbf{F}$, $G_t \in \mathbf{F}^*$. Равенство $x(t) = G_t(f)$, $f \in \mathbf{F}$, $G_t \in \mathbf{F}^*$, реализует обратное отображение G пространства $\mathbf{F}$ на $\mathbf{E}$, т.е. $A: \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ – изоморфизм пространств $\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}$. Таково же отображение $A^*: \mathbf{F}^* \rightarrow \mathbf{E}^*$, т.е. $A^*(\mathbf{F}^*) = \mathbf{E}^*$. В результате мы имеем рассмотренный случай А).

С) Пусть установлен изоморфизм A пространств $\mathbf{E}$ и $\mathbf{E}^*$. Тогда оператор $A^*: \mathbf{E}^{**} \rightarrow \mathbf{E}^*$ осуществляет изоморфизм пространств $\mathbf{E}^{**}$ и $\mathbf{E}^*$. В силу условия $\delta_t \in \mathbf{E}^*$ в $\mathbf{E}^{**}$ существует элемент G_t , являющийся решением уравнения $A^*G_t = \delta_t$, $G_t \in \mathbf{E}^{**}$, и тогда $x(t) = \delta_t(x) = (A^*G_t)(x) = (G_t)(Ax) = G_t(f)$, $f \in \mathbf{E}^*$, $G_t \in \mathbf{E}^{**}$. Равенство

$x(t) = G_t(f)$, $f \in \mathbf{E}^*$, $G_t \in \mathbf{E}^{**}$, определяет обратное отображение $G: \mathbf{E}^* \rightarrow \mathbf{E}$. Если при этом окажется, что $G_t \in \mathbf{E} \subset \mathbf{E}^{**}$, то рассматривая его на подпространстве $\mathbf{E}$ в $\mathbf{E}^{**}$, приходим к равенству

$$x(t) = f(G_t), \quad f \in \mathbf{E}^*, \quad G_t \in \mathbf{E}. \quad (1)$$

Очевидно, что операторы, действующие в векторных пространствах, требуется наделять свойством непрерывности, вводя топологии в $\mathbf{E}$ и $\mathbf{E}^*$.

Приведенная схема определения порождающих множеств позволяет по заданному линейно независимому семейству $(f_i) \subset \mathbf{E}^*$, $i = 1, \dots, n$, построить двойственный для него алгебраический базис в $\mathbf{E}$. Линейное отображение $G: \mathbf{E}^* \rightarrow \mathbf{E}$, определенное равенством (1), переводит семейство (f_i) функционалов, ограниченных на $\mathbf{E}$, в линейно независимое семейство (x_i) : $x_i = f_i(G_t)$, $f_i \in \mathbf{E}^*$, $G_t \in \mathbf{E}$, $x_i \in \mathbf{E}$, $i = 1, \dots, n$, образующее алгебраический базис в $\mathbf{E}$:

$$f = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \implies x(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i.$$

Легко убедиться, что существует невырожденное линейное преобразование $(x_i) \rightarrow (e_i)$ такое, что (e_i) – семейство в $\mathbf{E}$, дуальное для (f_i) .

3. Порождение локально выпуклых пространств. *Алгебраическими сплайнами* в векторном пространстве $\mathbf{E}$ назовем вариационные решения конечных систем линейных функциональных уравнений, определенных на $\mathbf{E}$. Такие решения будем получать как точные в пространствах с локально выпуклой топологией для некоторых вариационных задач. Выбор в векторных пространствах локально выпуклой топологии позволяет использовать теорию двойственности для построения в них базисов. В пространствах Соболева эта задача решена в [3].

Пусть $\mathbf{E}$ в общем случае неотделимое локально выпуклое пространство, $\mathbf{E}'$ – сопряженное ему пространство, сильная топология которого определена как отделимая. Элементами пространства $\mathbf{E}$ считаем числовые функции $x: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, где Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^m$, $\partial\Omega$ – граница области Ω . Через K обозначим компактное множество $\Omega + \partial\Omega$ в $\mathbb{R}^m$. Алгебраические базисы в $\mathbf{E}$ будем находить, строя вариационные решения систем линейных функциональных уравнений

$$f_i(x) = r_i, \quad x \in \mathbf{E}, \quad f_i \in \mathbf{E}', \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

где $(f_i) \subset \mathbf{E}'$ – семейство линейно независимых функционалов из топологически сопряженного пространства, $(r_i) \subset \mathbb{R}^n$ – заданный вектор. Векторы (f_i) , (r_i) , $i = 1, \dots, n$, условимся обозначать соответственно через $\mathbf{f}$ и $\mathbf{r}$. Систему (2) удобно записать в операторной форме:

$$\mathbf{f}(x) = \mathbf{r}, \quad \mathbf{f}: \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (3)$$

Множество решений системы (3) $D = D(\mathbf{f}, \mathbf{r}) = \{x \in \mathbf{E} : \mathbf{f}(x) = \mathbf{r}\}$ характеризуется как непустое замкнутое и выпуклое множество в $\mathbf{E}$. Ядро $\ker \mathbf{f} = D(\mathbf{f}, 0) = \mathbf{L}$ отображения $\mathbf{f}$ есть линейное подпространство, замкнутое в $\mathbf{E}$. Поскольку D – аффинное подпространство в $\mathbf{E}$, существует элемент $x_0 \in D \setminus \mathbf{L}$ такой, что произвольный элемент $x \in D$ имеет представление $x = x_0 + h$, где $h \in \mathbf{L}$, x_0 – частное решение системы (3).

Решение системы (3) естественно искать в классе непрерывных функций. Поскольку она единственным образом не разрешима, к искомому решению предъявим некоторые дополнительные требования, а именно, из множества ее решений выберем те, на которых некоторый оценочный функционал f принимает минимальное значение. Таким образом, вариационная постановка задачи о решении системы (3) включает минимизируемую функцию $f(x)$ и равенства (3) как линейные ограничения:

$$f(x) \rightarrow \inf, \quad x \in \mathbf{E}, \quad (4)$$

$$\mathbf{f}(x) = \mathbf{r}. \quad (5)$$

Ограничения (5) назовем уравнениями связей или интерполяционными условиями в задаче (4), (5). Ее удобно записать в следующей компактной форме:

$$f(x) \rightarrow \inf, \quad x \in D \subset \mathbf{E}, \quad (6)$$

где D – непустое множество допустимых элементов.

4. Задача условной минимизации. Покажем, что задачу условной минимизации (6) можно привести к эквивалентной задаче безусловной минимизации функции Лагранжа, в которой множители Лагранжа выбираются так, чтобы удовлетворялись условия (5). Соответствующее утверждение формулирует

ТЕОРЕМА 1 (Эйлера). Пусть элемент $a \in D$ решает задачу (6). Тогда найдутся такие не равные одновременно нулю множители Лагранжа (λ_j) , что точка a будет стационарной для функционала

$$F(x) = f(x) - \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j(x), \quad x \in \mathbf{E}, \quad f_j \in \mathbf{E}'. \quad (7)$$

При этом λ_j будут находиться из условий (5).

Данная теорема, содержание которой восходит к изопериметрической задаче Эйлера, формулирует правило множителей Лагранжа. Доказательство ее можно найти в стандартных курсах функционального анализа. Обычно оно дается для общего случая нелинейных функционалов (f_j) и в нашем случае мало полезно. Мы приведем простое доказательство этой теоремы, учитывающее, что функционалы f_j линейны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем линейно независимые элементы $h_0, \dots, h_n$, $h_k \in \mathbf{E}$, $k = 0, \dots, n$, и соответствующие вещественные переменные $\alpha_0, \dots, \alpha_n$. Вариацию $a + h$ точки a возьмем в виде $x = a + h = a + \sum_{k=0}^n \alpha_k h_k$, где a – точка из D , решающая задачу (6), и будем считать, что $h_1, \dots, h_n$ – элементы, дуальные для (f_i) , а коэффициенты (α_k) , $k = 1, \dots, n$, выберем так, чтобы вариация $a + h$ в точке $a \in D$ не выводила x за пределы множества D , т.е. $a + h \in D$. При этом α_0 и $h_0 \in \mathbf{E}$ остаются произвольными. Условие $a + h \in D$ означает, что

$$f_i \left(a + \sum_{j=0}^n \alpha_j h_j \right) = r_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (8)$$

Поскольку элемент $a \in D$ удовлетворяет условиям (5), имеем систему линейных функциональных уравнений $\sum_{j=1}^n f_i(h_j)\alpha_j = -\alpha_0 f_i(h_0)$, $i = 1, \dots, n$, относительно α_j . В силу ортогональности векторов $(f_i) \subset \mathbf{E}'$ и $(h_i) \in \mathbf{E}$, $i = 1, \dots, n$, решение системы (8) получим в виде $\alpha_j = -\alpha_0 f_j(h_0)$, $j = 1, \dots, n$. Подставляя вычисленные коэффициенты в уравнения (8), превратим их в тождества $f_i(a + \alpha_0 h_0 + \alpha_0 \sum_{j=1}^n \beta_j h_j) \equiv r_i$, $i = 1, \dots, n$, $\beta_j = -f_j(h_0)$, удовлетворяющиеся при любом значении α_0 . Заметим, что при $\alpha_0 = 0$ справедливо равенство $x(0) = a$, а поскольку $f(x)$ имеет минимум в точке a , утверждается, что

$$\left. \frac{d}{d\alpha_0} f(x(\alpha_0)) \right|_{\alpha_0=0} = \delta f(a, h_0) + \sum_{j=1}^n \delta f(a, h_j) \beta_j = \delta f(a, h_0) - \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j(h_0) = 0,$$

где положено $\lambda_j = \delta f(a, h_j)$. Если обозначить $F(x) = f(x) - \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j(x)$, то легко увидеть, что это утверждение есть условие стационарности функционала $F(x)$:

$$\delta F(x, h) = \delta f(x, h) - \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j(h) = 0, \quad x \in \mathbf{E}, \quad h \in \mathbf{E},$$

в точке a , что и доказывает теорему.

5. Решение задачи условной минимизации. Известно [4], что пространство $\mathbf{E}$ разлагается в прямую топологическую сумму $\mathbf{E} = \mathbf{E}_n \oplus \ker \mathbf{f}$, где $\mathbf{E}_n$ – векторное подпространство, порожденное элементами (e_i) , дуальными семейству (f_i) . Это утверждение по сути лишь отмечает факт существования в $\mathbf{E}$ базисных элементов (e_i) таких, что каждый вектор $x \in \mathbf{E}$ может быть представлен в виде разложения $x = \sum_{i=1}^n f_i(x)e_i + \varphi$, $\varphi \in \ker \mathbf{f}$, однако оно не содержит указаний на способ, с помощью которого этот базис мог бы быть найден.

Дуальный для (f_i) алгебраический базис в $\mathbf{E}$ вычислим, построив точное решение задачи (6). Ее постановка является слишком общей, чтобы можно было рассчитывать на получение решений в аналитической форме. Мы не будем предполагать, что пространство $\mathbf{E}$ отделимо, поэтому если существует решение задачи (6), то оно не единственно. В $\mathbf{E}$ образуем ассоциированное факторпространство $\mathcal{E} = \mathbf{E}/\{0\}$, фактортопология которого отделима. Выясним некоторые наиболее общие требования к топологии пространства $\mathbf{E}$ и функционалу f , чтобы получить разрешимую вариационную задачу.

(1) Предположим, что в $\mathcal{E}$ можно выделить всюду плотное подмножество элементов $\mathcal{X}$ такое, что функционал f дважды дифференцируем по Гато в каждой точке $x \in \mathcal{X}$, т.е. на множестве $\mathcal{X}$ определено слабо непрерывное симметрическое отображение $\mathbf{P}: \mathcal{X} \rightarrow \mathbf{P}(\mathcal{X}) = X'$ (оператор Эйлера для функционала f), являющееся второй производной функционала $f(x)$. Заметим, что в вариационном исчислении непрерывность оператора $\mathbf{P}$ всегда проявляется в слабой форме, поэтому говоря о непрерывности $\mathbf{P}$, мы будем иметь это ввиду, но специально не всегда оговаривать. Обычно $\mathcal{X}$ – это подмножество в $\mathcal{E}$, на элементы которого накладываются некоторые дополнительные ограничения, не содержащиеся в исходной постановке вариационной задачи, например, на их поведение в точках границы. Будем принимать во внимание лишь такие функционалы $f(x)$, для которых $\mathbf{P}$ не зависит от x . Пусть также в силу выбора $f(x)$ оператор $\mathbf{P}$ положительный. Это означает, что квадратичная форма $\langle \mathbf{x}, \mathbf{P}\mathbf{x} \rangle$, $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, положительно определена:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{P}\mathbf{x} \rangle \geq 0 \quad \text{и} \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{P}\mathbf{x} \rangle = 0 \implies \mathbf{x} = 0.$$

Поскольку $\ker \mathbf{P} = 0$, то $\mathbf{P}$ – алгебраический изоморфизм пространств $\mathcal{X}$ и X' . При некоторых ограничениях на топологии пространств $\mathbf{E}$ и X' , например, когда $\mathbf{E}$ – совершенно полное пространство, а X' – бочечно, что мы и будем считать в дальнейшем, это слабый изоморфизм пространств $\mathcal{X}$ и X' как топологических (теорема Банаха о гомоморфизме). Обратным для оператора $\mathbf{P}$ является слабо непрерывное отображение $\mathbf{G} = \mathbf{P}^{-1}: X' \rightarrow \mathcal{X}$ и решение уравнения $\mathbf{P}\mathbf{x} = f$, $f \in X'$, записывается в этом случае в слабой форме: $\langle \mathbf{G}f, g \rangle = \langle \mathbf{x}, g \rangle$, $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, $f \in X'$, $g \in X'$ – произвольный элемент. В силу симметричности $\mathbf{P}$: $\langle \mathbf{y}, \mathbf{P}\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{P}\mathbf{y} \rangle$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}$ оператор $\mathbf{G}$ симметрический: $\langle \mathbf{G}g, f \rangle = \langle \mathbf{G}f, g \rangle$, $f, g \in X'$, а положительность $\mathbf{P}$ влечет аналогичное свойство оператора $\mathbf{G}$.

(2) Предметом нашего рассмотрения будут только векторные пространства непрерывных функций. Это означает, что мера Дирака δ_t с носителем в точке $t \in K$ определена на элементах $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$: $\delta_t \in X'$. Тогда существует слабое решение $\mathbf{G}_t \in \mathcal{X}$ уравнения $\mathbf{P}\mathbf{G}_t = \delta_t$ относительно точки $t \in K$ и можно положить $\langle \mathbf{G}\delta_t, f \rangle = \langle \mathbf{G}_t, f \rangle$, $f \in X'$. Функцию $\mathbf{G}_t$ называют *фундаментальным решением* оператора $\mathbf{P}$. Вследствие симметричности отображения $\mathbf{G}$ функция $\mathbf{G}_t$, зависящая от двух аргументов, симметрична относительно их перестановки: $\mathbf{G}_t(s) \equiv \mathbf{G}(t, s) = \mathbf{G}(s, t)$, $t, s \in K$, и ее называют ядром отображения $\mathbf{G}$. В силу перечисленных выше свойств оператора $\mathbf{G}$ справедливы равенства

$$\langle \mathbf{G}\delta_t, f \rangle = \langle \mathbf{G}f, \delta_t \rangle = \langle \mathbf{x}, \delta_t \rangle = \mathbf{x}(t) = \langle \mathbf{G}_t, f \rangle,$$

которые определяют отображение $\mathbf{G}: X' \rightarrow \mathcal{X}$:

$$\mathbf{x}(t) = f(\mathbf{G}_t), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \quad f \in X', \quad \mathbf{G}_t \in \mathcal{X} \quad \text{для всякого } t \in K. \quad (9)$$

(3) Пусть $(f_i) \subset X'$. Обозначим через $\mathcal{A}$ класс матричных операторов с элементами $A_{ij} = f_i(\varphi_j)$, $\varphi_j = f_j(\mathbf{G}_t)$. Следствием симметричности и положительности оператора $\mathbf{G}$ является симметричность и положительность матриц класса $\mathcal{A}$:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j A_{ij} > 0,$$

где λ_i, λ_j – произвольные вещественные числа, не все равные нулю, т.е. матрицы класса $\mathcal{A}$ неособенные. Положим $\mathcal{W} = (\mathcal{A})^{-1}$, $\mathcal{W}$ – класс матричных операторов с матричными элементами W_{ij} .

Задачу (6) удобно рассмотреть в форме

$$f(x) \rightarrow \inf, \quad x \in \mathbf{D}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{f}, \mathbf{r}), \quad (10)$$

где $\mathbf{D}(\mathbf{f}, \mathbf{r}) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : \mathbf{f}(x) = \mathbf{r}\}$ – аффинное подпространство в $\mathcal{X}$. Взяв в формуле (9) элемент $f \in X'$ в виде линейной комбинации функций $(f_j) \subset X'$: $f = \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j$, получим частное решение $\mathbf{x}_0(t) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j(\mathbf{G}_t)$ задачи $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}$, если коэффициенты (λ_j) выбрать так, чтобы эти равенства удовлетворялись. Покажем, что построенное решение совпадает с решением вариационной задачи (10).

Следующая теорема содержит утверждение о существовании решений вариационной задачи (10) и приводит их в точной аналитической форме.

ТЕОРЕМА 2. В силу условий (1)–(3)

а) частное решение задачи (10) существует и определяется равенством

$$\mathbf{x}_0 = \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j, \quad \mathbf{x}_0 \in \mathbf{D},$$

в котором коэффициенты (λ_j) находятся из уравнений связи $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}$, приводящих к системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^n A_{ij} \lambda_j = r_i;$$

б) все множество решений задачи (10) определяется равенством

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j + \varphi, \quad \varphi \in \ker \mathbf{f}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{D};$$

в) для подпространства $X'_n \subset X'$, порожденного линейно независимыми элементами (f_i) , существует дуальное ему подпространство $\mathcal{X}_n \subset \mathcal{X}$, базисные элементы (e_i) , $i = 1, \dots, n$, которого удовлетворяют условию $f_j(e_i) = \delta_{ij}$ и строятся по правилу $e_i = \sum_{j=1}^n W_{ij} \varphi_j$. Пространство $\mathcal{X}$ разлагается в прямую топологическую сумму $\mathcal{X} = \mathcal{X}_n \oplus \ker \mathbf{f}$. Данное разложение означает, что произвольный элемент $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ может быть единственным образом представлен суммой $\mathbf{x} = \mathbf{P}_n \mathbf{x} + \varphi$, где $\mathbf{P}_n$ – непрерывный проектор $\mathbf{P}_n: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_n$, определенный формулой $\mathbf{P}_n \mathbf{x} = \sum_{j=1}^n f_j(\mathbf{x}) e_j$, а $\varphi \in \ker \mathbf{f}$. Частное решение системы (10) при этом непосредственно выражается через вектор правых частей: $\mathbf{x}_0 = \sum_{j=1}^n r_j e_j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия (1) существует вторая вариационная производная функционала $f(\mathbf{x})$ и его вариация определена так:

$$\delta f(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = \langle \mathbf{h}, \mathbf{P}\mathbf{x} \rangle \equiv (\mathbf{P}\mathbf{x})(\mathbf{h}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \quad \mathbf{h} \in \mathcal{E}.$$

Решая задачу условной минимизации (10) методом неопределенных множителей Лагранжа, необходимое условие минимума для функционала (7), определенного на $\mathcal{E}$, согласно теореме 1 получаем в виде

$$\delta F(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = (\mathbf{P}\mathbf{x})(\mathbf{h}) - \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j(\mathbf{h}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \quad \mathbf{h} \in \mathcal{E}. \quad (11)$$

В силу произвола в выборе $\mathbf{h}$ справедливо равенство

$$\mathbf{P}\mathbf{x} - \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}. \quad (12)$$

Уравнение (12) называют *уравнением Эйлера–Лагранжа* задачи (10). Оно означает, что класс $\mathcal{X}$ образуют точки, стационарные для функции Лагранжа $F(\mathbf{x})$. Необходимое условие минимума в задаче (10) на условный экстремум при некотором выборе множителей Лагранжа совпадает с необходимым условием безусловного минимума по $\mathbf{x}$ функции Лагранжа $F(\mathbf{x})$, которое в силу положительности оператора $\mathbf{P}$ оказывается и достаточным.

Преобразуем равенство (11), используя формулу $\mathbf{h}(t) = \delta_t(\mathbf{h})$, $t \in K$, $\mathbf{h} \in \mathcal{E}$, справедливую по условию (2). Пусть фундаментальное решение $\mathbf{G}_t \in \mathcal{X}$ оператора $\mathbf{P}$ существует и обращает уравнение $\mathbf{P}\mathbf{G}_t = \delta_t$ в тождество. Это позволяет в последнем слагаемом формулы (11) заменить $\mathbf{h}$ на $\mathbf{P}\mathbf{G}_t(\mathbf{h})$:

$$f_j(\mathbf{h}) = f_j^t(\delta_t(\mathbf{h})) = f_j^t(\mathbf{P}\mathbf{G}_t)(\mathbf{h}) = \mathbf{P}(f_j^t\mathbf{G}_t)(\mathbf{h}). \quad (13)$$

В последнем равенстве мы переставили местами отображения $\mathbf{P}$ и f_j , действующие на разные переменные (верхний индекс t у функционала f_j означает, что он действует на переменную t). Это допустимо, поскольку функционалы (f_j) и оператор $\mathbf{P}$ непрерывны на $\mathbf{G}_t$. Так как $\mathbf{h}$ – произвольный элемент из $\mathcal{E}$, а оператор $\mathbf{P}$ линейный, равенство (11) в силу (13) преобразуется к виду $\mathbf{P}(\mathbf{x} - \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j^t(\mathbf{G}_t)) = 0$. Поскольку $\ker \mathbf{P} = 0$, в качестве частного решения задачи (10) получаем класс элементов

$$\mathbf{x}_0 = \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j^t(\mathbf{G}_t) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j, \quad \mathbf{x}_0 \in \mathbf{D}. \quad (14)$$

Произвольное решение из множества $\mathbf{D}$ получим добавлением в правую часть равенства (14) слагаемого из $\ker \mathbf{f}$:

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j + \varphi, \quad \varphi \in \ker \mathbf{f}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{D}. \quad (15)$$

Коэффициенты (λ_j) в решениях (14), (15) находятся из условий связи $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}$.

Базисные функции $\varphi_j(t)$ линейно независимы, поскольку получены в результате невырожденного преобразования $\mathbf{G}: X' \rightarrow \mathcal{X}$ линейно независимого семейства $(f_j) \subset X'$, и образуют алгебраический базис в $\mathcal{X}$. Используя уравнения связи $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}$, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов (λ_j) : $\mathcal{A}\lambda = \mathbf{r}$ с определенными выше невырожденными в силу условия (3) матрицами (A_{ij}) , которая однозначно разрешима. Легко видеть, что базис (e_i) , дуальный для линейно независимого семейства (f_j) , получается из системы (φ_j) преобразованием $e_i = \sum_{j=1}^n W_{ij} \varphi_j$ с матрицей (W_{ij}) класса $\mathcal{W}$. Тогда для любого элемента $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ справедливо разложение

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n f_j(\mathbf{x}) e_j + \varphi, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \quad \varphi \in \ker \mathbf{f}. \quad (16)$$

Линейную оболочку, порожденную элементами (e_j) , обозначим через $\mathcal{X}_n$. Формулой $\mathbf{x}_n = \sum_{j=1}^n f_j(\mathbf{x}) e_j$, $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, $\mathbf{x}_n \in \mathcal{X}_n$, определен оператор проектирования $\mathbf{P}_n: \mathcal{X} \rightarrow$

$\mathcal{X}_n$. Алгебраическим дополнением к $\mathcal{X}_n$ в $\mathcal{X}$ является подпространство $\ker \mathbf{P}_n$. Функционалы семейства (f_j) непрерывны на $\mathcal{X}$, поэтому проектор $\mathbf{P}_n$ непрерывен и алгебраическая прямая сумма $\mathcal{X} = \mathcal{X}_n \oplus \ker \mathbf{P}_n$ будет топологической прямой суммой. Легко видеть, что $\ker \mathbf{P}_n = \ker \mathbf{f}$. Для частного решения $\mathbf{x}_0$ задачи (10) из (16) имеем $\mathbf{x}_0 = \sum_{j=1}^n r_j e_j$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{D}$.

Пространство $\mathcal{X}_n$ назовем *пространством алгебраических сплайнов в $\mathbf{E}$, порожденных семейством (f_i)* .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Используя уравнение Эйлера–Лагранжа (12) и свойство симметричности оператора $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{x}(t) = \langle \mathbf{x}, \delta_t \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{P}\mathbf{G}_t \rangle = \langle \mathbf{G}_t, \mathbf{P}\mathbf{x} \rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j(\mathbf{G}_t), \quad \mathbf{G}_t \in \mathcal{X}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{D},$$

приходим к решению $\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j(\mathbf{G}_t)$ задачи (10), совпадающему с решением (14) в силу симметричности функции $\mathbf{G}(t, s)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Решая вариационную задачу (6) на $\mathbf{E}$, уравнение Эйлера–Лагранжа получаем в форме $P(x - \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j^t(\mathbf{G}_t)) = 0$, где P – заданный на всюду плотном подпространстве X в $\mathbf{E}$ непрерывный оператор Эйлера, $x \in X$, $\mathbf{G}_t \in X$. Поскольку $\mathbf{E}$ локально выпукло, он может быть непрерывным образом продолжен на все пространство $\mathbf{E}$. Тем самым будет определен непрерывный оператор Q (расширение оператора P), действующий из $\mathbf{E}$ в сопряженное пространство $\mathbf{E}'$. Может оказаться, что $\ker Q \neq \{0\}$. В пространстве $\mathbf{E}$ образуем факторпространство $\mathcal{Y} = \mathbf{E} / \ker Q$ и определим непрерывное фактор-отображение $\mathbf{P}: \mathcal{Y} \rightarrow \mathbf{E}'$ по правилу $\langle h, \mathbf{P}\mathbf{x} \rangle = \langle h, Qx \rangle$, $\mathbf{x} \in \mathcal{Y}$, $x \in \mathbf{x}$, $h \in \mathbf{E}$. Если $\delta_t \in \mathbf{E}'$, то существует фундаментальное решение $\mathbf{G}_t$ оператора $\mathbf{P}$ и с помощью равенства

$$\mathbf{x}_0 = \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j^t(\mathbf{G}_t) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j, \quad \mathbf{x}_0, \mathbf{G}_t \in \mathcal{Y}, \quad (17)$$

строится класс частных решений задачи (6), причем коэффициенты находятся из уравнений связи $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}$. Произвольное решение задачи (6) получаем добавлением в правую часть равенства (17) слагаемого из $\ker \mathbf{f}$:

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j + \varphi, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{Y}, \quad \varphi \in \ker \mathbf{f}. \quad (18)$$

Рассмотрим ситуацию, когда условие (2) не выполнено, т.е. $\delta_t \notin X'$, но фундаментальное решение оператора P существует и принадлежит более широкому пространству, чем $\mathbf{E}$. К этому случаю проведенное рассмотрение не применимо. Опишем некоторый общий подход к решению таких задач, опирающийся на теорию двойственности в локально выпуклых пространствах. Пусть $\mathbf{E}$ – пространство Фреше и заданный оператор A переводит элементы из $\mathbf{E}$ в гильбертово пространство $\mathbf{H}$, $A: \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$, $\delta_t \notin \mathbf{H}$. Тогда соответствующий сопряженный ему оператор $A': \mathbf{H}' \rightarrow \mathbf{E}'$ определяется равенством $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A'y \rangle$, $x \in \mathbf{E}$, $y \in \mathbf{H}'$. Из предположений

- 1) $\delta_t \in A'(\mathbf{H}') \subset \mathbf{E}'$,
- 2) A' – слабый изоморфизм пространства $\mathbf{H}'$ в $\mathbf{E}'$

вытекает, что уравнение $A'G_t = \delta_t$ слабо разрешимо (существует единственный элемент $G_t \in \mathbf{H}'$ для всякого $t \in \Omega$), а A есть топологический изоморфизм пространств $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ [4]. В результате получаем реализацию непрерывного отображения $G: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{E}$, $G' = A^{-1}$ в виде $x = \langle h, G_t \rangle$, $h \in \mathbf{H}$. Пусть, например, $\mathbf{H} = \mathbf{H}' = L^2(\Omega)$. Двойственность в $L^2(\Omega)$ определяется с помощью интеграла Лебега: $x = (G_t, h) = \int_{\Omega} h G_t d\mu$, $h \in \mathbf{H}$, $G_t \in \mathbf{H}$, $x \in \mathbf{E}$, устанавливающего непрерывное отображение $G: L^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{E}$. Если некоторый элемент $h \in \mathbf{H}$ представлен разложением по линейно независимой системе функций $(h_j) \subset \mathbf{H}$: $h = \sum_{j=1}^n \lambda_j h_j$, то равенством

$$x(t) = \sum_{j=1}^n \lambda_j (h_j, G_t), \quad x \in D, \quad G_t \in L^2(\Omega), \quad (19)$$

определяется частное решение системы уравнений $(h_i, x) = r_i$, $i = 1, \dots, n$, в $\mathbf{E}$, которая в свою очередь используется для нахождения коэффициентов (λ_j) в решении (19).

Для функции $G_t \in L^2(\Omega)$, сингулярной в точке $s = t$, соответствующее ядро $G(t, s)$, $t, s \in \Omega$, будем называть *сингулярным*. Тем самым, накладываются определенные ограничения на вид функционалов (f_j) в задаче (1): они должны быть элементами пространства $L^2(\Omega)$. Тогда система уравнений (1) может быть разрешена в $\mathbf{E}$, функции $\varphi_j(t) = (f_j, G_t)$ непрерывны и для решения системы (1) возможно представление

$$x(t) = \sum_{j=1}^n \lambda_j (f_j, G_t), \quad x \in D, \quad G_t \in L^2(\Omega).$$

Пусть интерполяционные условия заданы равенствами (5), а функционал $f(x)$ определяет функциональный класс, которому должно принадлежать приближение $x_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i$, $i = 1, \dots, n$. Если $\mathbf{E}$ неотделимо, то решение $x_n \in \mathbf{E}$ зависит от выбора элемента $G_t \in \mathbf{G}_t$. Мы получаем, таким образом, возможность в одном и том же пространстве $\mathbf{E}$ базисные сплайны (e_i) выбирать различными способами.

6. Примеры. Следующие ниже примеры показывают применение теоремы 2 к теории приближений. Пусть $\mathbf{E}$ – вещественное векторное пространство функций, определенных на $[a, b]$, с полускалярным произведением $(x | y) = \int_a^b (Tx)(Ty) dt$ (T – линейный дифференциальный оператор, действующий в $\mathbf{E}$) и соответствующей полунормой $p(x) = (x | y)^{1/2}$. Множество функций $\{x \in \mathbf{E} : p(x) = 0\}$ образует ядро отображения $p(x)$. Для $T = d^m/dt^m$ ядром отображения $p(x)$ будут многочлены степени $(m-1)$. Пространство $\mathbf{E}$ как топологическое локально выпукло. Обозначим $D = d/dt$ и пусть оператор T задан в форме многочлена $T = D^m + a_1 D^{m-1} + \dots + a_{m-1} D^1 + a_m$ с постоянными коэффициентами. Тогда $P = T^* T$, где $T^* = (-1)^m D^m + (-1)^{m-1} a_1 D^{m-1} + \dots - a_{m-1} D^1 + a_m$ – оператор, формально сопряженный с T . Вычисляя фундаментальные решения уравнения $PG(t) = \delta(t)$, построим некоторые регулярные типы сплайнов. Считаем, что $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_i(t - t_i)$, $t_i \in [a, b]$, $t_1 = a$, $t_n = b$. Функцию $\varphi(t) = G(t)$ будем называть *производящей* для сплайна $\sum_{i=1}^n \lambda_i G_i(t - t_i)$, а точки (t_i) – опорными для соответствующих базисных сплайнов $\varphi_i(t) = G(t - t_i)$. Если они расположены на $[a, b]$ равномерно с шагом h и в построении решения $G(t)$ участвуют финитные функции, то базисная функция $\varphi_i(t)$ получается из $G(t)$ преобразованиями сдвига и изменения масштаба: $\varphi_i(t) = G((t - t_i)/h)$. Базисы $(\varphi_i(t))$, $i = 1, \dots, n$, называют *сеточными*.

А) Многочленные сплайны ($a_j = 0, j = 1, \dots, m, P = (-1)^m D^{2m}$).

1) Глобально определенные сплайны (**Г**-сплайны). Частное решение уравнения $PG(t) = \delta(t)$ возьмем в виде

$$\varphi(t) = g_{2m-1}(t) = \frac{(-1)^m |t|^{2m-1}}{2(2m-1)!}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

и формулой $\varphi_i(t) = g_{2m-1}(t - t_i)$ определим базисные сплайны. Очевидно, что линейная комбинация $\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i(t - t_i)$ является эквивалентной формой представления кусочно-многочленного сплайна степени $(2m - 1)$, поскольку она:

- а) на каждом интервале $(t_{i-1}, t_i), i = 2, \dots, n$, суть многочлен степени $(2m - 1)$,
- б) принадлежит классу функций $C^{2m-2}[a, b]$.

2) Финитные сплайны (**В**-сплайны). Оператор P удобно записать в форме $P = A^m, A = -d^2/dt^2$. Воспользовавшись решением краевой задачи

$$AG_1(t) = \delta(t), \quad G_1(-1) = G_1(1) = 0, \quad G_1(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1, \end{cases}$$

построим решение уравнения

$$A^m G_m(t) = A(A^{m-1} G_m(t)) = \delta(t).$$

Положим $A^{m-1} G_m(t) = G_1(t)$ и через $G_{m-1}(t)$ обозначим решение уравнения $A^{m-1} G_{m-1}(t) = \delta(t)$. Тогда функцию $G_m(t)$ можно взять в виде свертки: $G_m(t) = G_{m-1}(t) * G_1(t)$. Последовательность **В**-сплайнов нечетных степеней получаем с помощью рекуррентного соотношения $B_{2m-1}(t) = G_m(t), G_m(t) = G_{m-1}(t) * G_1(t), m = 2, 3, \dots$. Непосредственным вычислением убеждаемся, что $G_1(t) = B_0(t) * B_0(t)$, где

$$B_0(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

– **В**-сплайн нулевой степени. Рекуррентная формула $B_m(t) = B_{m-1}(t) * B_0(t), m = 1, 2, \dots$, дает всю последовательность **В**-сплайнов как нечетных, так и четных степеней. Конкретных выражений для производящих функций $\varphi(t) = B_m(t), m > 1$, мы не выписываем, так как они хорошо известны [5].

3) Глобально определенные составные сплайны (**Н**-сплайны). В качестве решения уравнения $A^{m-1} G_{m-1}(t) = \delta(t)$ возьмем $g_{2m-3}(t)$ и тогда функцию $G_m(t)$ получаем в виде свертки: $G_m(t) \equiv H_{2m-1}(t) = g_{2m-3}(t) * B_1(t), m \geq 2$. Не приводя общих формул [6], ограничимся случаем $m = 2$:

$$\varphi(t) = H_3(t) = \begin{cases} -\frac{|t|^3}{3} + t^2 + \frac{1}{3}, & |t| \leq 1, \\ |t|, & |t| > 1. \end{cases}$$

Сверткой $H_{2m}(t) = g_{2m-1}(t) * B_0(t)$ определим аналогичный тип сплайнов четных степеней. При $m = 1$ получаем (с точностью до коэффициента)

$$\varphi(t) = H_2(t) = \begin{cases} t^2 + \frac{1}{4}, & |t| \leq \frac{1}{2}, \\ |t|, & |t| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

4) Односторонние сплайны. В качестве частного решения уравнения $DG = \delta(t)$ возьмем функцию Хевисайда

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

Сплайны, построенные с помощью рекуррентных соотношений $O_{2m}(t) = B_{2m-1}(t) * h(t)$ или $O_{2m+1}(t) = B_{2m-1}(t) * h(t) * h(t)$ будем называть *односторонними*. Для $m = 1$

$$\varphi(t) = O_2(t) = \begin{cases} 0, & t \leq -1, \\ \frac{(1+t)^2}{2}, & -1 < t \leq 0, \\ 1 - \frac{(1-t)^2}{2}, & 0 < t \leq 1, \\ 1, & t > 1, \end{cases}$$

$$\varphi(t) = O_3(t) = \begin{cases} 0, & t \leq -1, \\ \frac{(1+t)^3}{6}, & -1 < t \leq 0, \\ t + \frac{(1-t)^3}{6}, & 0 < t \leq 1, \\ t, & t > 1. \end{cases}$$

Односторонние сплайны удобно применять к решению задач с начальными условиями для дифференциальных уравнений (обыкновенных и с частными производными).

Б) Гиперболические сплайны (корреляционного типа).

5) Убывающие на бесконечности сплайны (**К**-сплайны). Определяются как решения уравнения $A^m G_m(t) = \delta(t)$, $A = -\alpha^2 D^2 + 1$. Пусть $K_1(t)$ – частное решение уравнения $AK_1(t) = \delta(t)$: $K_1(t) = 1/(2\alpha) \cdot e^{-|t/\alpha|}$. Убывающие на бесконечности решения уравнения $A^m K_m(t) = \delta(t)$ будем строить в виде рекуррентной последовательности $K_{m+1}(t) = K_m(t) * K_1(t)$, $m = 1, 2, \dots$. В частности,

$$\varphi(t) = K_2(t) = \frac{1}{4\alpha} \cdot \left(1 + \left|\frac{t}{\alpha}\right|\right) e^{-|t/\alpha|},$$

$$\varphi(t) = K_3(t) = \frac{3}{16\alpha} \cdot \left(1 + \left|\frac{t}{\alpha}\right| + \frac{1}{3} \left|\frac{t}{\alpha}\right|^2\right) e^{-|t/\alpha|}.$$

6) Финитные сплайны (**Ф**-сплайны). Воспользовавшись решением краевой задачи $A\Phi_1(t) = \delta(t)$, $\Phi_1(-1) = \Phi_1(1) = 0$:

$$\Phi_1(t) = \frac{a}{\alpha} \begin{cases} \text{sh}(1 - |t/\alpha|), & |t/\alpha| \leq 1, \\ 0, & |t/\alpha| > 1, \end{cases} \quad a = \frac{1}{2(\text{ch}(1) - 1)},$$

финитные решения уравнения $A^m \Phi_m(t) = \delta(t)$ строим с помощью рекуррентной формулы $\Phi_{m+1}(t) = \Phi_m(t) * \Phi_1(t)$, $m = 1, 2, \dots$. В частности,

$$\varphi(t) = \Phi_2(t) = \frac{a^2}{\alpha} \cdot \begin{cases} 0, & |t/\alpha| \geq 2, \\ [(2 - |t/\alpha|) \text{ch}(2 - |t/\alpha|) - \text{sh}(2 - |t/\alpha|)]/2, & 1 < |t/\alpha| < 2, \\ -\text{ch}(t/\alpha) + \text{ch}(1)[\text{sh}(1 - |t/\alpha|) + |t/\alpha| \text{ch}(1 - |t/\alpha|)] \\ - [\text{sh}(|t/\alpha|) - |t/\alpha| \text{ch}(t/\alpha)]/2, & 0 \leq |t/\alpha| \leq 1. \end{cases}$$

7) Сплайны с натяжением [7]. Получаются как финитные решения уравнения $AG(t) = \delta(t)$, $A = (-D^2)^{m-1}(-\alpha^2 D^2 + 1)$, сверткой $N_{2m-1}(t) = B_{2m-3}(t) * \Phi_1(t)$, $m = 2, 3, \dots$. Для $m = 2$ имеем

$$\varphi(t) = N_3(t) = \frac{a}{\alpha} \begin{cases} 0, & |t/\alpha| \geq 2, \\ \operatorname{sh}(2 - |t/\alpha|) - (2 - |t/\alpha|), & 1 \leq |t/\alpha| < 2, \\ -|t/\alpha| + 2 \operatorname{ch}(1)(1 - |t/\alpha|) \\ - [2 \operatorname{sh}(1 - |t/\alpha|) - \operatorname{sh}(|t/\alpha|)], & 0 \leq |t/\alpha| < 1. \end{cases}$$

8) Глобально определенные растущие на бесконечности сплайны. Получаем в виде решений уравнения $AG(t) = \delta(t)$, $A = (-\alpha D^2 + 1)^{m-1}(-\alpha^2 D^2 + 1)$, $m = 2, 3, \dots$, сверткой $S_m(t) = \Phi_{m-1}(t) * S_1(t)$ частного решения уравнения $(-\alpha^2 D^2 + 1)S_1(t) = \delta(t)$, $S_1(t) = \operatorname{sh}(|t/\alpha|)/2$, с Φ -сплайнами. В частности, для $m = 2$ получаем

$$S_2(t) = \frac{a}{2\alpha} \begin{cases} \operatorname{sh}(|t/\alpha|) \operatorname{sh}(1), & |t/\alpha| \geq 1, \\ [\operatorname{ch}(1) \operatorname{ch}(t/\alpha) - |t/\alpha| \operatorname{ch}(1 - |t/\alpha|) - \operatorname{sh}(|t/\alpha|)], & |t/\alpha| < 1. \end{cases}$$

9) Сплайны переменной жесткости. Пусть $T = f(t)D^2$, $f(t) \neq 0$, $P = T * T = D^2[f^2(t)]D^2$. Решением уравнения $P = G(t, s) = \delta(t, s)$ является функция

$$G(t, s) = \operatorname{sgn}(t - s) \int_s^t \frac{(t - \xi)(\xi - s)}{2f^2(\xi)} d\xi.$$

В частности, положим $f(t) = 1 + (t/\alpha)^2$, $P = T * T = D^2(1 + (t/\alpha)^2)^2 D^2$. Поскольку коэффиценты оператора T константами не являются, функция Грина $G(t, s)$ оператора P не инвариантна к сдвигу относительно точки t :

$$G(t, s) = \frac{\alpha^4}{4} \left[\left| \frac{t}{\alpha} - \frac{s}{\alpha} \right| - \left(1 + \left(\frac{t}{\alpha} \right) \left(\frac{s}{\alpha} \right) \right) \operatorname{sgn}(t - s) \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{t}{\alpha} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{s}{\alpha} \right) \right) \right].$$

Базисные сплайны $\varphi_i(t)$ образуются по правилу $\varphi_i(t) = G(t, t_i)$.

В) Многомерные сплайны.

10) Топологию пространства $\mathbf{E}$ числовых функций определим с помощью полускалярного произведения $(x | g) = \int_{\Omega} (\partial x, \partial g) dt$, где Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$. Соответствующий квадрат полунормы в $\mathbf{E}$ дается равенством

$$N^2(x) = (x | x) = \int_{\Omega} (\partial x)^2 dt.$$

Тождество Грина определяет вид оператора $A = -\Delta$:

$$(x | g) = \int_{\Omega} (\partial x, \partial g) dt = - \int_{\Omega} \Delta x g dt + \int_{\partial \Omega} \frac{\partial x}{\partial \nu} g ds,$$

где ν – нормаль к границе $\partial \Omega$. Пусть $g = 0$ на $\partial \Omega$; тогда

$$(x | g) = - \int_{\Omega} \Delta x g dt = (-\Delta x, g).$$

В рассмотренной постановке задачи X – это плотное в $\mathbf{E}$ (отделимое) подпространство функций, принимающих нулевые значения на границе области Ω , оператор $A: X \rightarrow L^2(\Omega)$ – непрерывный оператор $-\Delta$, действующий из X в $L^2(\Omega)$ и симметрический на элементах X : $(-\Delta x, g) = (x, -\Delta g)$, $x, g \in X$, $\|x\| = N(x)$, $x \in X$ – норма на X . Пусть $\mathbf{M}$ – подпространство функций из $L^2(\Omega)$, принимающих нулевые значения на границе $\partial\Omega$. Поскольку справедливы вложения $\mathbf{D}(\Omega) \subset X \subset \mathbf{M} \subset L^2(\Omega)$ и $\mathbf{D}(\Omega)$ (пространство основных функций) всюду плотно в $L^2(\Omega)$, то X всюду плотно в $\mathbf{M}$ и $L^2(\Omega)$. Рассмотрим непрерывное расширение линейной формы $g \rightarrow (x, -\Delta g)$ с X на $\mathbf{M}$ с сохранением равенства $(-\Delta x, g) = \langle x, -\Delta g \rangle$, $x \in X$, $g \in \mathbf{M}$. Тем самым определен сопряженный оператор A' , имеющий ту же самую дифференциальную форму, что и A и действующий из $\mathbf{M}$ в $\mathbf{E}'$. Если $\delta_t \in A'(\mathbf{M}) \subset \mathbf{E}'$, то уравнение $A'G_t = \delta_t$, $G_t \in \mathbf{M}$, разрешимо и равенство $x = (-\Delta x, G_t) = (h, G_t)$ определяет оператор G , действующий из $A(X) \subset L^2(\Omega)$ на X .

В силу плотного вложения X в $\mathbf{E}$ и $\mathbf{M}$ в $L^2(\Omega)$ равенство $(\Delta x, g) = \langle x, -\Delta g \rangle$, $x \in X$, $g \in \mathbf{M}$, сохраняется, если в нем граничные условия исключаются из рассмотрения, и тогда $x = (h, G_t)$, $x \in \mathbf{E}$, $G_t \in L^2(\Omega)$, где $h \in A(\mathbf{E}) \subset L^2(\Omega)$ и G_t – некоторое частное решение уравнения $A'G_t = \delta_t$. При $\delta_t \in A'(L^2(\Omega)) \subset \mathbf{E}'$ его решения существуют. Возьмем частное решение g_t этого уравнения, когда ядро оператора A' полагается равным нулю. Оно имеет вид $g(t, s) = \ln(t - s)/(2\pi)$ при $m = 2$ и $g(t, s) = -1/(|t - s|^{m-2}(m-2)\sigma_m)$, $m > 2$, где σ_m – площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^m$. Функция g_t сингулярна в точке $s = t$ и поэтому пространству $\mathbf{E}$ не принадлежит. Очевидно, что она является элементом пространства $L^2(\Omega)$.

Пусть информация о искомой функции $x(t)$ нам известна в виде значений интегралов

$$f_i(x) = (h_i, x) = \int_{\Omega} h_i(t)x(t) dt = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^m. \quad (20)$$

Решение $x(t)$ этой задачи строим в виде разложения $x(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i(t)$, $\varphi_t(t) = f_i(g_t)$, $i = 1, \dots, n$, $t \in \Omega$. Коэффициенты $\lambda = (\lambda_i)$ находим из условий (20).

Приведем численную реализацию описанного алгоритма. Будем считать для простоты, что Ω – m -мерный куб. Рассмотрим разбиение области Ω сеткой с равномерным и одинаковым по всем координатам шагом τ . Каждую построенную таким образом подобласть будем нумеровать индексом i , а через t_i будем обозначать точку центра i -й подобласти. Обозначим через $r_i = |t - t_i|$ расстояние между точками t и t_i в евклидовой метрике и возьмем линейно независимую систему функций

$$h_i(t) = \begin{cases} 1, & r_i \leq \frac{\tau}{2}, \\ 0, & r_i > \frac{\tau}{2}, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n, \quad t \in \mathbb{R}^m,$$

где n – число подобластей разбиения области Ω .

Базисные функции $\varphi_i(t)$ для двух случаев $m = 2$, $m > 2$ вычислим непосредственно из уравнения $-\Delta \varphi(t) = h(t)$, где $h(t) = h_0(t)$ и τ взято равным единице. В силу симметрии задачи оно приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно функции $\varphi(r)$, частное решение которого (производящую функцию) выберем из

условий $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$. Преобразования сдвига и масштабирования производящей функции $\varphi(r)$ приводят к следующим выражениям для базисных функций:

$$\varphi_i(t) = \frac{1}{2} \begin{cases} (|t - t_i|/\varepsilon)^2, & |t - t_i| \leq \varepsilon, \\ \ln(|t - t_i|/\varepsilon)^2 + 1, & |t - t_i| > \varepsilon, \end{cases} \quad \varepsilon = \frac{\tau}{2}, \quad t \in \mathbb{R}^2,$$

$$\varphi_i(t) = \frac{1}{2} \begin{cases} (|t - t_i|/\varepsilon)^2, & |t - t_i| \leq \varepsilon, \\ \frac{1}{m-2} [m - 2(\varepsilon/|t - t_i|)^{m-2}], & |t - t_i| > \varepsilon, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}^m, \quad m > 2.$$

Они линейно независимы, непрерывно дифференцируемы и построенная по ним линейная оболочка порождает в $\mathbf{E}$ алгебраические сплайны класса $C^1(\Omega)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дэй М. М. Нормированные линейные пространства. М.: ИЛ, 1961.
- [2] Колесников А. П. Алгебраические базисы в векторных пространствах // Вестн. РУДН. 1997. Т. 97. № 1. С. 78–86.
- [3] Колесников А. П. Функциональные сплайны. М.: Изд. РУДН, 1993.
- [4] Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. М.: Мир, 1969.
- [5] Марчук Г. И., Агошков В. А. Введение в проекционно сеточные методы. М.: Наука, 1981.
- [6] Колесников А. П. Топологические методы в теории приближений и численном анализе. М.: Изд. УРСС, 2001.
- [7] Schweikert D. J. An interpolation curve using a spline in tension // J. Math. Phys. 1966. V. 45. P. 312–317.

Российский университет дружбы народов
E-mail: akolesnikov@sci.pfu.edu.ru

Поступило
28.01.1999
Исправленный вариант
21.03.2002