Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. В. Костоусов, В. Т. Шевалдин, Аппроксимация локальными тригонометрическими сплайнами, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 3, 354–363

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2498>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 12:12:42

УДК 519.65

АППРОКСИМАЦИЯ ЛОКАЛЬНЫМИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ

К. В. Костоусов, В. Т. Шевалдин

Для класса $W_{\infty}^{\mathcal{L}_2} = \{f : f' \in AC, \|f'' + \alpha^2 f\|_{\infty} \leq 1\}$ 1-периодических функций построен неинтерполяционный линейный метод тригонометрической сплайн-аппроксимации, обладающий экстремальными и сглаживающими свойствами и наследующий локально свойство монотонности исходных данных (значений функции из $W_{\infty}^{\mathcal{L}_2}$ в точках равномерной сетки). Вычислена точно величина погрешности аппроксимации в равномерной метрике на этом классе. Она совпадает с величинами поперечников по Колмогорову и по Коновалову.

Библиография: 11 названий.

Введение. Численным аспектам аппроксимации действительных функций одного переменного, связанных с наследованием свойств монотонности и выпуклости исходных данных (чаще всего, это значения функции в точках равномерной сетки), посвящено значительное число работ (см., например, [1] и имеющиеся там ссылки). Однако, сохранение монотонности и выпуклости возможно, как правило, только при дополнительных довольно жестких ограничениях (см. ссылки в [1]); при этом, построенные процессы аппроксимации были, в основном, интерполяционного типа. На классе функций $W_{\infty}^2 = \{f : f' \in AC, \|f''\|_{\infty} \leq 1\}$ Ю. Н. Субботин [1] в 1993 году построил новый локальный неинтерполяционный метод аппроксимации, использующий параболические сплайны с дополнительными узлами [2], сохраняющий указанные геометрические свойства исходных данных, и экстремальный в смысле поперечников по Колмогорову и по Коновалову. В данной работе мы существенно используем идеи работы [1] и развиваем их для класса 1-периодических функций $W_{\infty}^{\mathcal{L}_2} = \{f : f' \in AC, \|\mathcal{L}_2(\mathcal{D})f\|_{\infty} \leq 1\}$. Здесь AC – класс локально абсолютно непрерывных функций, $\|\cdot\|_{\infty} = \|\cdot\|_{L_{\infty}[0;1]}$, $L_{\infty}[0;1]$ – класс функций, существенно ограниченных на $[0;1]$, с обычным определением нормы

$$\|f\|_{\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in [0;1]} |f(x)|$$

и $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2(\mathcal{D}) = \mathcal{D}^2 + \alpha^2 I$ ($\alpha > 0$, $\mathcal{D}$ – оператор дифференцирования, I – тождественный оператор) – линейный дифференциальный оператор 2-го порядка с постоянными коэффициентами. За счет отказа от условий интерполяции в точках сетки для

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00764, программы государственной поддержки “Ведущие научные школы”, проект № НШ-1347.2003.1, и гранта поддержки научных исследований, выполняемых учеными УрО РАН совместно с СО РАН.

1-периодических функций нами построен линейный локальный метод тригонометрической сплайн-аппроксимации функций $f \in W_{\infty}^{\mathcal{L}_2}$, сохраняющий локально свойство монотонности и свойство, близкое к выпуклости, исходных данных без каких-либо дополнительных ограничений на значения аппроксимируемой функции в узлах равномерной сетки. Метод использует тригонометрические сплайны (их еще называют L -сплайны; см., например, [3]) с дополнительными узлами, которые соответствуют дифференциальному оператору $\mathcal{L}_2 = \mathcal{D}^2 + \alpha^2 I$, и обладает значительными преимуществами по сравнению с другими известными. В частности, на классе $W_{\infty}^{\mathcal{L}_2}$ построенный метод является оптимальным среди всех подпространств заданной размерности, а именно, величина погрешности аппроксимации функций $f \in W_{\infty}^{\mathcal{L}_2}$ в равномерной метрике посредством построенных тригонометрических сплайнов S , т.е. $\sup_{f \in W_{\infty}^{\mathcal{L}_2}} \|f - S\|_{\infty}$, совпадает с величинами соответствующих поперечников по Колмогорову и по Коновалову. Для класса $W_{\infty}^{\mathcal{L}_2}$ были известны еще два таких экстремальных подпространства (см., например, [4] и имеющиеся там ссылки): тригонометрические полиномы заданного порядка и интерполяционные тригонометрические сплайны с равномерными узлами, однако эти линейные аппараты приближения не обладали формосохраняющими свойствами и свойством локальности в отличие от предлагаемого ниже метода.

1. Локальные тригонометрические сплайны. Пусть $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2(\mathcal{D}) = \mathcal{D}^2 + \alpha^2 I$ ($\alpha > 0$, $\mathcal{D}$ – оператор дифференцирования, I – тождественный оператор),

$$W_{\infty}^{\mathcal{L}_2} = \{f : f' \in AC, \|\mathcal{L}_2(\mathcal{D})f\|_{\infty} \leq 1\}$$

– класс 1-периодических функций, $h = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, и $y_j = f(jh)$, $j \in \mathbb{Z}$. Дифференциальному оператору $\mathcal{L}_2$ ставим в соответствие разностный оператор

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_j = \Delta_h^{\mathcal{L}_2} f(jh) = y_{j+2} - (2 \cos \alpha h) y_{j+1} + y_j, \quad (1)$$

определенный на пространстве последовательностей $\{y_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$. Ясно, что если $f(x) = \sin \alpha x$ или $f(x) = \cos \alpha x$ (функции из ядра оператора $\mathcal{L}_2$), то $\Delta_h^{\mathcal{L}_2} f(jh) = 0$ для любого $j \in \mathbb{Z}$. Пусть $\varphi(x) = (1 - \cos \alpha x)/\alpha^2$. Легко проверяется, что $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, $\varphi''(0) = 1$. Переходим к построению периодического локального тригонометрического сплайна S , соответствующего оператору $\mathcal{L}_2 = \mathcal{D}^2 + \alpha^2 I$.

Для $x \in [jh; (j+1)h]$, $j \in \mathbb{Z}$, полагаем

$$\begin{aligned} S(x) = S(f, x) = & C_0^{(j)} + C_1^{(j)} \cos \alpha(x - jh) \\ & + C_2^{(j)} \sin \alpha(x - jh) + M^{(j)} \varphi \left(\left(x - \left(j + \frac{1}{2} \right) h \right)_+ \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\varphi(x_+) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases}$$

и

$$C_0^{(j)} = \frac{\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{j-1}}{4 \sin^2 \frac{\alpha h}{2} \cos \frac{\alpha h}{2}}, \quad (3)$$

$$C_1^{(j)} = -\frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{4 \sin^2 \frac{\alpha h}{2}}, \quad (4)$$

$$C_2^{(j)} = \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{4 \sin \frac{\alpha h}{2} \cos \frac{\alpha h}{2}}, \quad (5)$$

$$M^{(j)} = \frac{\alpha^2 (\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_j - \Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{j-1})}{4 \sin^2 \frac{\alpha h}{2} \cos \frac{\alpha h}{2}}. \quad (6)$$

Из (2) следует, что на каждом из отрезков вида $[jh; (j+1/2)h]$ и $[(j+1/2)h; (j+1)h]$ тригонометрический сплайн $S(x)$ является линейной комбинацией трех функций: 1 , $\sin \alpha x$, $\cos \alpha x$. Функции $S(x)$ такого вида называют *L-сплайнами второго порядка*, соответствующими оператору $\mathcal{L}_2 = \mathcal{D}^2 + \alpha^2 I$, с узлами в точках $\{jh\}_{j \in \mathbb{Z}}$ (основные узлы) и в точках $\{(j+1/2)h\}_{j \in \mathbb{Z}}$ (дополнительные узлы). Основные свойства *L-сплайнов* изложены, например, в монографии Дж. Алберга, Э. Нильсона и Дж. Уолша [3].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $h < \pi/\alpha$. Локальный процесс аппроксимации (2)–(6) обладает следующими свойствами:

1) наследует локально свойство монотонности исходных данных $\{y_j\}$, $j \in \mathbb{Z}$, в том смысле, что

- а) если $y_{j+1} \geq y_j \geq y_{j-1}$ (или $y_{j+1} \leq y_j \leq y_{j-1}$), то функция $S(x)$ при $x \in (jh; (j+1/2)h)$ не убывает (не возрастает);
- б) если $y_{j+2} \geq y_{j+1} \geq y_j$ (или $y_{j+2} \leq y_{j+1} \leq y_j$), то функция $S(x)$ при $x \in ((j+1/2)h; (j+1)h)$ не убывает (не возрастает);

2) наследует локально свойство $\{y_j\}$, близкое к выпуклости, а именно:

- а) если $\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{j-1} \geq 0$ ($\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{j-1} \leq 0$), то $S''(x) + \alpha^2 S(x) \geq 0$ ($S''(x) + \alpha^2 S(x) \leq 0$) при $x \in (jh; (j+1/2)h)$;
- б) если $\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_j \geq 0$ ($\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_j \leq 0$), то $S''(x) + \alpha^2 S(x) \geq 0$ ($S''(x) + \alpha^2 S(x) \leq 0$) при $x \in ((j+1/2)h; (j+1)h)$;

3) $S(jh) = y_j + k \Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{j-1}$ ($j \in \mathbb{Z}$), где $k = (8 \cos \frac{\alpha h}{2} \cos^2 \frac{\alpha h}{4})^{-1}$;

4) $S(x)$ имеет на всей оси $\mathbb{R}$ непрерывную первую производную (т.е. $S'(x) \in C(\mathbb{R})$), причем

$$S'(jh) = \frac{\alpha}{2 \sin \alpha h} (y_{j+1} - y_{j-1});$$

5) для любой функции $f \in W_{\infty}^{\mathcal{L}_2}$ имеет место точное неравенство

$$\|S'' + \alpha^2 S\|_{\infty} \leq \frac{1}{\cos \frac{\alpha h}{2}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1а) Пусть $x \in (jh; (j + 1/2)h)$, и пусть, например, $y_{j+1} \geq y_j \geq y_{j-1}$. Из (2)–(5) выводим, что

$$S'(x) = \frac{\alpha}{4 \sin^2 \frac{\alpha h}{2} \cos \frac{\alpha h}{2}} \left[(y_{j+1} - y_j) \sin \alpha \left(x - jh + \frac{h}{2} \right) + (y_j - y_{j-1}) \sin \alpha \left(\frac{h}{2} - x + jh \right) \right].$$

Из этого равенства с учетом того, что $\alpha > 0$ и $h < \pi/\alpha$, получаем, что $S'(x) \geq 0$ при $x \in (jh; (j + 1/2)h)$, и поэтому на указанном промежутке функция $S(x)$ не убывает.

1б) Пусть теперь $x \in ((j + 1/2)h; (j + 1)h)$, и пусть, например, $y_{j+2} \geq y_{j+1} \geq y_j$. Из (2)–(6) получаем, что

$$S'(x) = \frac{\alpha}{4 \sin^2 \frac{\alpha h}{2} \cos \frac{\alpha h}{2}} \left[(y_{j+2} - y_{j+1}) \sin \alpha \left(x - \left(j + \frac{1}{2} \right) h \right) + (y_{j+1} - y_j) \sin \alpha \left(h - x + \left(j + \frac{1}{2} \right) h \right) \right].$$

Отсюда при $\alpha > 0$ и $h < \pi/\alpha$ выводим, что $S'(x) \geq 0$ при $x \in ((j + 1/2)h; (j + 1)h)$ и, следовательно, на этом промежутке функция $S(x)$ не убывает.

2) Применяя дифференциальный оператор $\mathcal{D}^2 + \alpha^2 I$ к функции $S(x)$ на каждом из промежутков $(jh; (j + 1/2)h)$ и $((j + 1/2)h; (j + 1)h)$, получаем, что

$$S''(x) + \alpha^2 S(x) = \begin{cases} A \cdot \Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{j-1}, & jh < x < (j + 1/2)h, \\ A \cdot \Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_j, & (j + 1/2)h < x < (j + 1)h, \end{cases} \quad (7)$$

где $A = \alpha^2 (4 \sin^2(\alpha h/2) \cos(\alpha h/2))^{-1} > 0$. Отсюда следует утверждение пункта 2).

3) Пусть $x \in [jh; (j + 1)h]$. Из (2)–(4) получаем

$$S(jh) = C_0^{(j)} + C_1^{(j)} = \frac{y_{j+1} - (2 \cos \alpha h) y_j + y_{j-1}}{4 \sin^2 \frac{\alpha h}{2} \cos \frac{\alpha h}{2}} - \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{4 \sin^2 \frac{\alpha h}{2}}.$$

После несложных преобразований $S(jh)$ можно записать в виде

$$S(jh) = y_j + \frac{1}{8 \cos \frac{\alpha h}{2} \cos^2 \frac{\alpha h}{4}} \Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{j-1}.$$

Подставляя в (2) $x = (j + 1)h$, аналогичным образом получаем, что

$$S((j + 1)h) = y_{j+1} + \frac{1}{8 \cos \frac{\alpha h}{2} \cos^2 \frac{\alpha h}{4}} \Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_j,$$

и поэтому $S(x) \in C(\mathbb{R})$.

4) Непрерывность $S'(x)$ во всех точках оси за исключением узлов сплайна $\{jh\}$ и $\{(j + 1/2)h\}$ очевидна. Непрерывность $S'(x)$ в точках $\{(j + 1/2)h\}$ следует из того, что

для функции $\varphi(x) = (1 - \cos \alpha x)/\alpha^2$ справедливо равенство $\varphi'(0) = 0$. Воспользовавшись представлением для $S'(x)$ из пункта 1) теоремы 1, получаем, что

$$S'(jh - 0) = S'(jh + 0) = \frac{\alpha}{2 \sin \alpha h} (y_{j+1} - y_{j-1}),$$

и, таким образом, $S'(x) \in C(\mathbb{R})$.

5) Для доказательства последнего пункта теоремы 1 нужно, используя представление (7), оценить выражение $|\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_j| = |\Delta_h^{\mathcal{L}_2} f(jh)|$ для функций $f \in W_\infty^{\mathcal{L}_2}$. Вначале получим интегральное представление для разности $\Delta_h^{\mathcal{L}_2} f(jh)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $j = 0$. Любое решение линейного дифференциального уравнения $\mathcal{L}_2(\mathcal{D})f = (\mathcal{D}^2 + \alpha^2 I)f = u$, $u \in L_\infty$, может быть записано в виде

$$f(x) = C_1 \cos \alpha(x - h) + C_2 \sin \alpha(x - h) + \frac{1}{\alpha} \int_h^x u(t) \sin \alpha(x - t) dt, \quad (8)$$

где C_1 и C_2 – произвольные константы. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} f(2h) &= C_1 \cos \alpha h + C_2 \sin \alpha h + \frac{1}{\alpha} \int_h^{2h} u(t) \sin \alpha(2h - t) dt, \\ f(h) &= C_1, \quad f(0) = C_1 \cos \alpha h + C_2 \sin \alpha h + \frac{1}{\alpha} \int_0^h u(t) \sin \alpha t dt, \end{aligned} \quad (9)$$

где $u(t) = \mathcal{L}_2(\mathcal{D})f(t)$. Поэтому из (1) имеем

$$\begin{aligned} \Delta_h^{\mathcal{L}_2} f(0) &= f(2h) - (2 \cos \alpha h) f(h) + f(0) \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_h^{2h} u(t) \sin \alpha(2h - t) dt + \frac{1}{\alpha} \int_0^h u(t) \sin \alpha t dt. \end{aligned} \quad (10)$$

Поскольку для почти всех t имеет место неравенство $|\mathcal{L}_2(\mathcal{D})f(x)| \leq 1$, то из (10) выводим оценку

$$|\Delta_h^{\mathcal{L}_2} f(0)| \leq \frac{2}{\alpha} \int_0^h \sin \alpha t dt = \frac{4 \sin^2 \frac{\alpha h}{2}}{\alpha^2},$$

которая является точной, причем знак равенства достигается для функций f таких, что $\mathcal{L}_2(\mathcal{D})f(x) = 1$ для почти всех t из отрезка $[0, 2h]$. Аналогично выводится оценка и при других $j \in \mathbb{Z}$:

$$\sup_j |\Delta_h^{\mathcal{L}_2} f(jh)| \leq \frac{4 \sin^2 \frac{\alpha h}{2}}{\alpha^2}. \quad (11)$$

Из (7) и (11) получаем точную оценку, сформулированную в пункте 5) теоремы 1:

$$\|S'' + \alpha^2 S\|_\infty \leq A \cdot \frac{4 \sin^2 \frac{\alpha h}{2}}{\alpha^2} = \frac{1}{\cos \frac{\alpha h}{2}}.$$

Теорема 1 полностью доказана.

2. Аппроксимация тригонометрическими сплайнами.

ТЕОРЕМА 2. При $h < \pi/\alpha$ справедливо равенство

$$\sup_{f \in W_{\infty}^{\mathcal{L}_2}} \|f - S\|_{\infty} = \frac{1 - \cos \frac{\alpha h}{2}}{\alpha^2 \cos \frac{\alpha h}{2}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Получим интегральное представление для уклонения $f(x) - S(x)$. Не нарушая общности, можно считать, что $x \in [h; 2h]$. Более того, можно также принять, что $x \in [h; 3h/2]$, так как иначе можно сделать замену $x = 1 - v$. Для функции $f \in W_{\infty}^{\mathcal{L}_2}$ будем использовать представление (8). Сплайн $S(x)$ при $x \in [h; 3h/2]$ имеет вид

$$\begin{aligned} S(x) = & \frac{\Delta_h^{\mathcal{L}_2} f(0)}{4 \sin^2 \frac{\alpha h}{2} \cos \frac{\alpha h}{2}} - \frac{\cos \alpha(x - h)}{4 \sin^2 \frac{\alpha h}{2}} [f(2h) - 2f(h) + f(0)] \\ & + \frac{\sin \alpha(x - h)}{4 \sin \frac{\alpha h}{2} \cos \frac{\alpha h}{2}} [f(2h) - f(0)]. \end{aligned} \quad (12)$$

Используя равенства (9) и (10), из формул (8) и (12) выводим, что у разности $f(x) - S(x)$ все неинтегральные слагаемые взаимно уничтожаются и при этом модуль уклонения $|f(x) - S(x)|$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} |f(x) - S(x)| = & \left| \frac{1}{\alpha} \int_h^x u(t) \sin \alpha(x - t) dt \right. \\ & - \left\{ \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\alpha h}{2} \cos \frac{\alpha h}{2}} \left[\frac{1}{\alpha} \int_h^{2h} u(t) \sin \alpha(2h - t) dt + \frac{1}{\alpha} \int_0^h u(t) \sin \alpha t dt \right] \right. \\ & - \frac{\cos \alpha(x - h)}{4 \sin^2 \frac{\alpha h}{2}} \left[\frac{1}{\alpha} \int_h^{2h} u(t) \sin \alpha(2h - t) dt + \frac{1}{\alpha} \int_0^h u(t) \sin \alpha t dt \right] \\ & \left. \left. + \frac{\sin \alpha(x - h)}{4 \sin \frac{\alpha h}{2} \cos \frac{\alpha h}{2}} \left[\frac{1}{\alpha} \int_h^{2h} u(t) \sin \alpha(2h - t) dt - \frac{1}{\alpha} \int_0^h u(t) \sin \alpha t dt \right] \right\} \right|, \end{aligned} \quad (13)$$

где $u(t) = \mathcal{L}_2(\mathcal{D})f(t)$. В формуле (13) выражение под знаком модуля представим как сумму трех интегралов $J_1 + J_2 + J_3$, где

$$J_1 = \int_0^h L_1(x, t) u(t) dt, \quad (14)$$

$$J_2 = \int_x^{2h} L_2(x, t) u(t) dt, \quad (15)$$

$$J_3 = \int_h^x L_3(x, t) u(t) dt, \quad (16)$$

и

$$\begin{aligned}
 L_1(x, t) &= -\frac{\sin \alpha t}{4\alpha \sin \frac{\alpha h}{2}} \left[\frac{1}{\cos \frac{\alpha h}{2} \sin \frac{\alpha h}{2}} - \frac{\cos \alpha(x-h)}{\sin \frac{\alpha h}{2}} - \frac{\sin \alpha(x-h)}{\cos \frac{\alpha h}{2}} \right] \\
 &= -\frac{\sin \alpha t (1 - \cos \alpha(x - \frac{3h}{2}))}{4\alpha \sin^2 \frac{\alpha h}{2} \cos \frac{\alpha h}{2}}, \tag{17}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_2(x, t) &= -\frac{\sin \alpha(2h-t)}{4\alpha \sin \frac{\alpha h}{2}} \left[\frac{1}{\cos \frac{\alpha h}{2} \sin \frac{\alpha h}{2}} - \frac{\cos \alpha(x-h)}{\sin \frac{\alpha h}{2}} + \frac{\sin \alpha(x-h)}{\cos \frac{\alpha h}{2}} \right] \\
 &= -\frac{\sin \alpha(2h-t)}{4\alpha \sin^2 \frac{\alpha h}{2} \cos \frac{\alpha h}{2}} \left(1 - \cos \alpha \left(x - \frac{h}{2} \right) \right), \tag{18}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_3(x, t) &= \frac{1}{\alpha} \left\{ \sin \alpha(x-t) - \left[\frac{1}{4 \cos \frac{\alpha h}{2} \sin^2 \frac{\alpha h}{2}} - \frac{\cos \alpha(x-h)}{4 \sin^2 \frac{\alpha h}{2}} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\sin \alpha(x-h)}{4 \sin \frac{\alpha h}{2} \cos \frac{\alpha h}{2}} \right] \sin \alpha(2h-t) \right\} \\
 &= \frac{1}{\alpha} \left[\sin \alpha(x-t) - \frac{\sin \alpha(2h-t)}{4 \sin^2 \frac{\alpha h}{2} \cos \frac{\alpha h}{2}} \left(1 - \cos \alpha \left(x - \frac{h}{2} \right) \right) \right]. \tag{19}
 \end{aligned}$$

Из (17) и (18) легко следует, что при $\alpha > 0$, $h < \pi/\alpha$ $L_1(x, t) \leq 0$ при $0 \leq t \leq h$ и $L_2(x, t) \leq 0$ при $h \leq x \leq t \leq 2h$.

Докажем теперь, что $L_3(x, t) \leq 0$ при $h \leq t \leq x \leq 3h/2$. Функция $L_3(x, t)$, как функция от t , может быть записана в виде

$$L_3(x, t) = A_1(x) \sin \alpha t + A_2(x) \cos \alpha t,$$

поэтому она сохраняет знак на интервалах длины π/α . Следовательно, для доказательства неравенства $L_3(x, t) \leq 0$ при $h \leq t \leq x$ в силу того, что $x-h \leq h/2 < \pi/(2\alpha)$, достаточно показать, что $L_3(x, h) \leq 0$ и $L_3(x, x) \leq 0$ при $h \leq x \leq 3h/2$. В самом деле,

$$L_3(x, h) = \frac{\cos \alpha(x - \frac{3h}{2}) - 1}{2\alpha \sin \frac{\alpha h}{2}} \leq 0,$$

так как $\alpha > 0$ и $0 < h < \pi/\alpha$, и

$$L_3(x, x) = \frac{\cos \alpha(x - \frac{3h}{2}) - 1}{4\alpha \sin^2 \frac{\alpha h}{2} \cos \frac{\alpha h}{2}} \sin \alpha(2h-x) \leq 0$$

при $0 < h < \pi/\alpha$ и $h \leq x \leq 3h/2$.

Из доказанных неравенств $L_j(x, t) \leq 0$, $j = 1, 2, 3$ (для соответствующих значений аргументов), и формул (13)–(16) следует, что для получения оценки сверху для величины погрешности $|f(x) - S(x)|$ на классе $W_\infty^{\mathcal{L}_2}$ в формуле (13) функцию $u(t) = \mathcal{L}_2(\mathcal{D})f(t)$ можно заменить на 1. Вычисляя при этом интегралы J_1 , J_2 и J_3 , получаем

$$|f(x) - S(x)| \leq |J_1 + J_2 + J_3| = \frac{1 - \cos \frac{\alpha h}{2}}{\alpha^2 \cos \frac{\alpha h}{2}}. \tag{20}$$

Неравенство (20) является точным, причем знак равенства достигается, например, для функций f таких, что $\mathcal{L}_2(\mathcal{D})f(t) = 1$ при почти всех $t \in [0, 2h]$. Тем самым, доказано равенство

$$\sup_{f \in W_\infty^{\mathcal{L}_2}} \|f - S\|_\infty = \frac{1 - \cos \frac{\alpha h}{2}}{\alpha^2 \cos \frac{\alpha h}{2}}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Из пункта 3) теоремы 1 и неравенства (11) для любой функции $f \in W_\infty^{\mathcal{L}_2}$ получаем оценку

$$\begin{aligned} |f(jh) - S(jh)| &\leq \frac{1}{8 \cos \frac{\alpha h}{2} \cos^2 \frac{\alpha h}{4}} \cdot \sup_j |\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_j| \\ &\leq \frac{1}{8 \cos \frac{\alpha h}{2} \cos^2 \frac{\alpha h}{4}} \cdot \frac{4 \sin^2 \frac{\alpha h}{2}}{\alpha^2} = \frac{1 - \cos \frac{\alpha h}{2}}{\alpha^2 \cos \frac{\alpha h}{2}}. \end{aligned}$$

Полученное неравенство является точным. Сопоставляя его с утверждением теоремы 2, заключаем, что точки $\{jh\}$ (основные узлы сплайна) для некоторых функций $f \in W_\infty^{\mathcal{L}_2}$ могут являться точками максимального уклонения в метрике пространства C тригонометрического сплайна S от функции f . Это свойство было для нас ключевым при построении формул (2)–(6).

3. Связь с поперечниками. Пусть, как обычно,

$$d_n(W_\infty^{\mathcal{L}_2})_\infty = \inf_{L_n: \dim L_n \leq n} \sup_{f \in W_\infty^{\mathcal{L}_2}} \inf_{\varphi \in L_n} \|f - \varphi\|_\infty$$

и

$$K_n(W_\infty^{\mathcal{L}_2}, BW_\infty^{\mathcal{L}_2})_\infty = \inf_{L_n: \dim L_n \leq n} \sup_{f \in W_\infty^{\mathcal{L}_2}} \inf_{\varphi \in L_n \cap BW_\infty^{\mathcal{L}_2}} \|f - \varphi\|_\infty$$

– соответственно n -й поперечник по Колмогорову и n -й поперечник по Коновалову (его еще называют относительным поперечником) класса $W_\infty^{\mathcal{L}_2}$ в равномерной метрике. Здесь $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2(\mathcal{D}) = \mathcal{D}^2 + \alpha^2 I$, $\alpha > 0$, $B > 0$ и внешний $\inf$ берется по всем подпространствам L_n размерности не выше n . Из определений следует, что если $B_1 \geq B_2$, то

$$d_n(W_\infty^{\mathcal{L}_2})_\infty \leq K_n(W_\infty^{\mathcal{L}_2}, B_1 W_\infty^{\mathcal{L}_2})_\infty \leq K_n(W_\infty^{\mathcal{L}_2}, B_2 W_\infty^{\mathcal{L}_2})_\infty.$$

Подпространства функций, реализующие внешний $\inf$ в этих определениях, называются *экстремальными*. Не вдаваясь в обширную библиографию по поперечникам функциональных классов в различных пространствах, отметим только точные результаты в периодическом случае (период функций равен 2π), связанные с оператором $\mathcal{L}_2 = \mathcal{D}^2 + \alpha^2 I$.

В 1938 году М. Г. Крейн [5] при $m > \alpha$ вычислил $E_{m-1}(W_\infty^{\mathcal{L}_2})_\infty$ – величину наилучшего приближения класса $W_\infty^{\mathcal{L}_2}$ в равномерной метрике пространством тригонометрических многочленов порядка $m-1$. Величина $E_{m-1}(W_\infty^{\mathcal{L}_2})_\infty$ дает точную оценку сверху для нечетного поперечника $d_{2m-1}(W_\infty^{\mathcal{L}_2})_\infty$. Такая же оценка снизу для указанного поперечника при $m \geq 2\alpha$ получена В. Т. Шевалдиным [6]. Точная оценка сверху для четного поперечника $d_{2m}(W_\infty^{\mathcal{L}_2})_\infty$ может быть также выведена из работы С. И. Новикова [7], который при $m \geq 2\alpha$ оценил в каждой точке уклонение функций $f \in W_\infty^{\mathcal{L}_2}$ от интерполяционных тригонометрических сплайнов с $2m$ равномерными узлами на периоде и вычислил величину этого уклонения на классе $W_\infty^{\mathcal{L}_2}$. Точную оценку снизу для четного поперечника $d_{2m}(W_\infty^{\mathcal{L}_2})_\infty$ при $m > \alpha$ получила И. Н. Володина [8], используя один общий прием В. М. Тихомирова. Подчеркиваем, что во всех перечисленных работах рассматривались функции периода 2π , и главный результат, вытекающий из этих работ, состоял в следующем равенстве, справедливом при $m > \alpha$:

$$d_{2m-1}(W_\infty^{\mathcal{L}_2})_\infty = d_{2m}(W_\infty^{\mathcal{L}_2})_\infty = \frac{2}{\pi} \max_t \left| \sum_{s \in \mathbb{Z}} \frac{e^{i(2s+1)\pi t}}{(2s+1)(\alpha^2 - (2s+1)^2 m^2)} \right|.$$

В нашей работе мы имеем дело с функциями периода 1. Пересчитывая в этом случае величины поперечников (например, с помощью формул из § 2 и § 5 работы [9]), выводим, что для 1-периодических функций при $m > \alpha/(2\pi)$ справедливо следующее равенство:

$$d_{2m-1}(W_{\infty}^{\mathcal{L}_2})_{\infty} = d_{2m}(W_{\infty}^{\mathcal{L}_2})_{\infty} = \frac{1 - \cos \frac{\alpha}{4m}}{\alpha^2 \cos \frac{\alpha}{4m}}, \quad (21)$$

причем экстремальными подпространствами для четного поперечника $d_{2m}(W_{\infty}^{\mathcal{L}_2})_{\infty}$ являются пространство тригонометрических полиномов степени $m-1$ и пространство интерполяционных тригонометрических сплайнов с $2m$ равномерными узлами на периоде длины 1 (при $m \geq \alpha/\pi$).

Отметим, что для класса 1-периодических функций

$$W_{\infty}^r = \{f : f^{(r-1)} \in AC, \|f^{(r)}\|_{\infty} \leq 1\}, \quad r \in \mathbb{N}, \quad r \geq 3,$$

Ю. Н. Субботин и С. А. Теляковский [10], [11] доказали, что неравенство

$$B \geq \frac{4}{\pi^2} \log(\min(n, r)) + A,$$

где A – некоторая константа, гарантирует равенство величин поперечников по Коновалову $K_n(W_{\infty}^r, BW_{\infty}^r)_{\infty}$ и по Колмогорову $d_n(W_{\infty}^r)_{\infty}$. Еще ранее Субботин [1] показал, что при $B \geq 1$ справедливо равенство

$$K_{2n}(W_{\infty}^2, BW_{\infty}^2)_{\infty} = d_{2n}(W_{\infty}^2)_{\infty} = (32n^2)^{-1}.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $h = 1/(2m)$, $m > \alpha/(2\pi)$ и $B \geq 1/\cos(\alpha h/2)$. Тогда

$$K_{2m}(W_{\infty}^{\mathcal{L}_2}, BW_{\infty}^{\mathcal{L}_2})_{\infty} = \frac{1 - \cos \frac{\alpha}{4m}}{\alpha^2 \cos \frac{\alpha}{4m}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка снизу для поперечника по Коновалову следует из неравенства

$$d_{2m}(W_{\infty}^{\mathcal{L}_2})_{\infty} \leq K_{2m}(W_{\infty}^{\mathcal{L}_2}, BW_{\infty}^{\mathcal{L}_2}), \quad B > 0,$$

и равенства (21). Для оценки сверху воспользуемся результатами теорем 1 и 2. Из равенств (2)–(6) получаем, что если считать $\{y_j\}$ произвольной последовательностью действительных чисел, удовлетворяющей условию $y_{j+n} = y_j$, $j \in \mathbb{Z}$, то при четном $n = 2m$ сплайн $S(x)$ является линейной комбинацией вида

$$S(x) = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \theta_j(x),$$

где $\theta_j(x)$ – некоторые гладкие 1-периодические функции. Очевидно, что размерность подпространства указанных сплайнов не выше $2m$. Поэтому из пункта 5) теоремы 1 и теоремы 2 при $h = 1/(2m)$, $m > \alpha/(2\pi)$ и $B \geq B_1 = 1/\cos(\alpha h/2)$ в силу определения относительного поперечника получаем

$$K_{2m}(W_{\infty}^{\mathcal{L}_2}, BW_{\infty}^{\mathcal{L}_2})_{\infty} \leq K_{2m}(W_{\infty}^{\mathcal{L}_2}, B_1 W_{\infty}^{\mathcal{L}_2})_{\infty} \leq \sup_{f \in W_{\infty}^{\mathcal{L}_2}} \|f - S\|_{\infty} = \frac{1 - \cos \frac{\alpha}{4m}}{\alpha^2 \cos \frac{\alpha}{4m}}.$$

Теорема 3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Линейный локальный процесс аппроксимации (2)–(6) порождает еще одно экстремальное (в смысле поперечника по Колмогорову) подпространство тригонометрических сплайнов с равномерными узлами, причем эти сплайны не являются интерполяционными.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Субботин Ю. Н. Наследование свойств монотонности и выпуклости при локальной аппроксимации // ЖВМиМФ. 1993. Т. 33. № 7. С. 996–1003.
- [2] Субботин Ю. Н., Черных Н. И. Порядок наилучшей сплайн-аппроксимации некоторых классов функций // Матем. заметки. 1970. Т. 7. № 1. С. 31–42.
- [3] Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972.
- [4] Шевалдин В. Т. Истокообразные сплайны и поперечники классов периодических функций. Дисс. ... д.ф.-м.н. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1996.
- [5] Крейн М. Г. К теории наилучшего приближения периодических функций // Докл. АН СССР. 1938. Т. 18. № 4, 5. С. 603–607.
- [6] Шевалдин В. Т. L -сплайны и поперечники // Матем. заметки. 1983. Т. 33. № 5. С. 735–744.
- [7] Новиков С. И. Приближение класса $W_{\infty}^{\mathcal{L}^n}$ интерполяционными периодическими сплайнами // Приближение функций полиномами и сплайнами. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. С. 118–126.
- [8] Volodina I. N. Exact value of widths of certain class of solutions of linear differential equations // Analysis Math. 1985. V. 11. № 1. P. 85–92.
- [9] Шевалдин В. Т. Некоторые задачи экстремальной интерполяции в среднем для линейных дифференциальных операторов // Тр. МИАН. 1983. Т. 164. С. 203–240.
- [10] Субботин Ю. Н., Теляковский С. А. Асимптотика констант Лебега для периодических интерполяционных сплайнов с равномерными узлами // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 8. С. 131–140.
- [11] Subbotin Yu. N., Telyakovskii S. A. Splines and relative widths of classes of differentiable functions // Proc. of the Steklov Institute of Math., Suppl. 1. 2001. P. 225–234.

(К. В. Костоусов) Уральский государственный университет

им. А. М. Горького, г. Екатеринбург

(В. Т. Шевалдин) Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург

E-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru

Поступило

01.07.2003