Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. М. Ахметьев, А. В. Хохлов, О классификации гармонических функций во внешности единичного шара с известным модулем градиента на границе области, различающая которых зависит от широты, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 2, 182–191

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm25>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 13:25:44

УДК 517.57

О КЛАССИФИКАЦИИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ВО ВНЕШНОСТИ ЕДИНИЧНОГО ШАРА

П. М. Ахметьев, А. В. Хохлов

Решается уравнение Лапласа во внешней бесконечной шаровой области с нелинейными (квадратичными) граничными условиями на сферической границе. Мы линеаризуем задачу и при дополнительных предположениях о наличии сферической симметрии у различающей выписываем решение методом формальных степенных рядов при помощи рекурсии коэффициентов ряда. Используя теорему Пуанкаре–Перрона мы описываем пространство сходящихся формальных степенных рядов и вычисляем его размерность. Вычисляется размерность пространства функций, градиент которых в каждой точке на сфере ортогонален линейной комбинации осесимметричного диполя и квадруполья, оценивая корни характеристического многочлена 4-ой степени, отвечающего данной задаче. В заключение формулируется ряд нерешенных проблем, мотивированных геофизическими приложениями.

Библиография: 6 названий.

Введение. Пусть $U \subset \mathbb{R}^3$ – бесконечная область в трехмерном евклидовом пространстве, ограниченная сферой S радиуса 1 с центром в точке O . Предположим, что в пространстве фиксирована сферическая система координат (r, θ, φ) , при этом сфера S задается уравнением $r = 1$. Рассмотрим краевую задачу для уравнения Лапласа в области U

$$\Delta f = 0 \tag{1}$$

с краевыми граничными условиями на поверхности S

$$\|\operatorname{grad} f\| = \psi, \quad f(r) = o(r^{-1}), \quad r \rightarrow \infty, \tag{2}$$

причем ψ – заданная неотрицательная аналитическая функция на S .

Известно, что решение неоднозначно. Бакус построил пример пары различных аналитических гармонических функций f_1, f_2 , удовлетворяющих условию (2) при некотором выборе функции ψ . В совместной работе [1] второго автора с французскими геофизиками сформулировано дополнительное условие, достаточное для того, чтобы задача (1), (2) имела однозначное решение. Это условие состоит в задании кривой $L \subset S$, образованной теми точками на граничной сфере, вектор $\operatorname{grad} f$ в которых касается сферы. Эти дополнительные условия фактически возникают и в ряде аналогичных задач для уравнения (1) с граничными условиями в форме косой производной.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 00-05-64015.

Цель работы – представить теорему классификации решений уравнения (1), (2) при помощи рекурсии, вычисляющей коэффициенты формального ряда. При описании пространства решений задачу можно линейаризовать при помощи следующего приема. Скажем, что пара аналитических функций f_1, f_2 в области U (пара формальных степенных рядов сферических функций по переменной r^{-k}) образует *дубль*, если каждая из них удовлетворяет уравнению (1) и граничным условиям (2) с некоторой функцией ψ . Для каждого дубля введем понятие *канонической различающей* $\zeta = f_1 - f_2$. Обозначим через Ω_ζ пространство дублей с заданной различающей ζ . Важно заметить, что информация о краевом условии (2) при этом не сохраняется, т.е. разные дубли с одинаковой различающей соответствуют разным ψ из уравнения (2), а пространство дублей с одинаковыми граничными условиями ψ описать не удастся, так как оно “рассыпано” по различным пространствам пар с разными различающими.

Сформулируем упрощающие предположения. Предположим, что различающая функция ζ является гармоническим многочленом (от переменной r^{-1}) и не зависит от переменной φ (для самих функций f_1, f_2 это не предполагается).

При таких предположениях мы классифицируем все дубли, т.е. описываем все функции пространства Ω_ζ . Удобно проводить описание этого пространства, начав с описания $\hat{\Omega}_\zeta$ – пространства формальных дублей. Это пространство определено как пространство формальных степенных рядов $(\hat{f}_1, \hat{f}_2)$, доставляющих решение задачи (1), (2), причем многочлен ζ также рассматривается как формальный конечный ряд. Описание $\hat{\Omega}_\zeta$ происходит при помощи рекурсии. Используя предположение о независимости ζ от переменной φ , удастся определить естественное разбиение бесконечномерного пространства $\hat{\Omega}_\zeta$ в прямую сумму (бесконечную) конечномерных подпространств. Для описания функции в каждом из них достаточно задать конечное число вещественных параметров – коэффициентов разложения функции $f_1 + f_2$ по сферическим гармоникам. Число этих параметров на 1 меньше степени сферического многочлена ζ . Далее удастся вычислить все оставшиеся коэффициенты формального ряда по индукции.

Далее мы описываем подпространство $\Omega_\zeta \subset \hat{\Omega}_\zeta$, образованное сходящимися формальными степенными рядами, т.е. рядами, имеющими радиус сходимости, меньший 1. Мы находимся в условиях теоремы Пуанкаре–Перрона (см. [2]). Эта теорема позволяет вычислить асимптотику последовательности коэффициентов рекурсивной неавтономной последовательности в предположении, что в пределе рекурсивное правило не зависит от номера шага индукции. Явного описания подпространства Ω_ζ при этом не получается, но удастся вычислить его размерность.

Кратко остановимся на структуре работы. Пространство дублей с канонической различающей $\zeta = P_1^0(\cos \theta r^{-2})$ является исходным пунктом в нашей конструкции. Этот случай разобран в основополагающей работе Бакуса [3], и мы его напомним в п. 2. Рекурсия здесь одночленная, а пространство формальных пар $\hat{\Omega}$ совпадает с пространством Ω . Основные построения происходят в п. 3, где проводится основная конструкция и формулируется основная теорема. Доказательство этой теоремы при помощи теоремы Пуанкаре–Перрона приведено в п. 4. В последнем п. 5 приведены вычисления, доставляющие семейство примеров рядов сходящихся решений из Ω_ζ , для которых каноническая различающая деформируется в однопараметрическом семействе от диполя до квадруполь. Обсуждается возможность опускания упрощающего предположения, а также обсуждается вид явных формул, доставляющих значения коэффициентов сходящихся рядов.

1. Пространство дублей с дипольной канонической различающей. В этом пункте мы описываем пространство Ω_ζ в предположении $\zeta = P_1^0(\cos \theta)r^{-2}$. Для данного дубля (f_1, f_2) с различающей ζ обозначим через $\mu = \mu(f_1, f_2)$ формальный ряд $f_1 + f_2$. Легко видеть, что условие (2) переформулируется в виде

$$(\text{grad } \mu) \text{ grad } \zeta = 0 \quad (3)$$

в каждой точке сферы S .

Сначала опишем пространство $\hat{\Omega}_\zeta$. Это пространство раскладывается в прямую сумму конечномерных подпространств:

$$\hat{\Omega}_\zeta = \bigoplus_{m=1}^{\infty} (\hat{\Omega}_m^{\text{even}} \oplus \hat{\Omega}_m^{\text{odd}}). \quad (4)$$

Индекс m указывает на номер моды сферической функции, т.е. предполагается, что $\mu(f_1, f_2)$ для данной пары Бакуса зависит от координаты φ пропорционально $\cos(m\varphi)$ или $\sin(m\varphi)$ соответственно. Будет показано, что каждое пространство в разложении (4) одномерно и представлено сходящимся рядом. Сформулируем точное утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть (f_1, f_2) – произвольный дубль с канонической различающей $\zeta = P_1^0(\cos \varphi)$. Тогда ряд однозначно определяется старшей гармоникой

$$P_m^m(\cos \theta) \sin(m\varphi) r^{-n-1} \quad \text{или} \quad P_m^m(\cos \theta) \cos(m\varphi) r^{-n-1}$$

в разложении функции $\mu(f_1, f_2)$ по сферическим функциям. При этом ряды f_1, f_2 являются сходящимися, и их радиус сходимости $r_0 = (\sqrt{3})^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Выпишем общий вид для ряда $\mu(f_1, f_2)$

$$\mu = \sum_{n,m} \frac{1}{r^{n+1}} P_n^m(\cos \theta) (a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi) = \sum_m \bar{\mu}_m^{\oplus} \cos m\varphi + \bar{\mu}_m^{\ominus} \sin m\varphi. \quad (5)$$

Условие (2) на сфере S переписывается в более простой форме

$$(\text{grad } \mu, \text{ grad } \zeta) = 0. \quad (6)$$

Теперь воспользуемся линейностью уравнения (6) по первому (неизвестному) аргументу. Это позволяет свести общий случай (5) к следующему частному случаю:

$$\bar{\mu}_m^{\oplus} = a_{mm} \frac{1}{r^{m+1}} P_m^m(\cos \theta) + a_{m+1\ m} \frac{1}{r^{m+2}} P_{m+1}^m(\cos \theta) + \dots \quad (7)$$

Случай $\bar{\mu}_m^{\ominus}$ совершенно аналогичен, и мы сократим обозначения, положив $\bar{\mu}_m^{\oplus} = \bar{\mu}_m$. Более того, как показано в [3], разложение в формуле (7) можно упростить и искать коэффициенты $a_{m+2j\ m}$ индукцией по j , $0 \leq j \leq \infty$:

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_m^{\oplus} &= \bar{\mu}_m = a_{mm} \frac{1}{r^{m+1}} P_m^m(\cos \theta) + a_{m+2\ m} \frac{1}{r^{m+3}} P_{m+2}^m(\cos \theta) + \dots \\ &= \sum_{n: n-m \text{ четное}} a_n \frac{1}{r^{n+1}} P_n^m(\cos \theta). \end{aligned} \quad (8)$$

Следующий очевидный трюк упрощает вычисления. Поскольку μ_1 и ζ гармонические, справедливо равенство

$$2\nabla\mu_1\nabla\zeta = \Delta(\mu_1\zeta). \quad (9)$$

Для вычисления a_n в (8) мы воспользуемся следующим стандартным соотношением (см., например, [4]):

$$(\cos\theta)P_n^m(\cos\theta) = \frac{n+m}{2n+1}P_{n-1}^m(\cos\theta) + \frac{n-m+1}{2n+1}P_{n+1}^m(\cos\theta). \quad (10)$$

При больших n предельное соотношение при $n \rightarrow \infty$ имеет вид

$$(\cos\theta)P_n^m(\cos\theta) = \frac{1}{2}(P_{n-1}^m(\cos\theta) + P_{n+1}^m(\cos\theta)) + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (11)$$

Теперь с учетом (8) прямые вычисления доставляют

$$\frac{\cos\theta}{r^2}\bar{\mu}_m = \sum_{n: n-m \text{ четное}} \frac{1}{r^{n+5}} \left(\frac{n-m+1}{2n+1}a_n r^2 + \frac{n+m}{2n+5}a_{n+2} \right) P_{n+1}^m(\cos\theta). \quad (12)$$

Предыдущее уравнение (12) можно переписать в более удобной форме:

$$\frac{\cos\theta}{r^2}\bar{\mu}_m = \sum_{n: n-m \geq 0, \text{ четное}} \frac{1}{2r^{n+5}} (a_n r^2 + a_{n+2}) P_{2n+m-1}^m(\cos\theta) + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (13)$$

Отсюда получаем при $n \rightarrow \infty$

$$\Delta\left(\frac{\cos\theta\bar{\mu}_m}{r^2}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2ja_{2j+m-2}r^2 + 6ja_{2j+m}P_{2j+m-1}^m(\cos\theta)}{r^{2j+m+5}} + O\left(\frac{1}{j}\right). \quad (14)$$

Условие (6), тождество (9) и формула (14) доставляют

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{a_{2j+m-1}}{a_{2j+m+1}} = -3, \quad (15)$$

причем точные значения коэффициентов вычисляются индукцией по j . Если $n \rightarrow \infty$, $m = \text{const}$, то L^2 -норма функции $P_n^m(\cos\theta)$ растёт полиномиально. С другой стороны, из (15) вытекает, что коэффициенты убывают экспоненциально. Легко видеть, что такая оценка влечёт сходимость и в норме C^1 . Это доказано в [5]. Теорема 1 доказана.

2. Формальные дубли с канонической различающей, не зависящей от сферической координаты φ . В этом пункте мы дадим описание пространства $\hat{\Omega}_\zeta$ в предположении, что

$$\zeta = \sum_{i=n_0}^{n_1} a_i \cdot \frac{1}{r^{i+1}} P_i^0(\cos\theta), \quad n_0 \leq n_1. \quad (16)$$

Напомним, что

$$P_j^0(\cos\theta) = \sum_{k=0}^j c_k \cos^k \theta. \quad (17)$$

Будем искать функцию μ в общем виде (5), предположив, не ограничивая общности, что выполнено (7). Перепишем (7) еще раз, введя удобные обозначения:

$$\bar{\mu} = \sum_{i=1}^{\infty} l_i \frac{1}{r^{m+i}} P_{m+i-1}^m(\cos \theta). \quad (18)$$

Следовательно, учитывая (17) и пользуясь несколько раз соотношением (10), получаем

$$\bar{\mu}_m \zeta = \sum_{i=1}^{\infty} l'_i \frac{1}{r^{m+i}} P_{m+i-1}^m(\cos \theta). \quad (19)$$

Для случая элементарной гармоник можно записать при $n, m, n \geq m$ на поверхности S следующее выражение:

$$\left(\frac{\zeta P_n^m(\cos \theta)}{r^{n+1}} \right) = \sum_{i=-n_1}^{n_1} a_i P_{n+i}^m(\cos \theta). \quad (20)$$

Теперь применим оператор Лапласа

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{\zeta P_n^m(\cos \theta)}{r^{n+1}} \right) &= \sum_{i=-n_1}^{n_1} (n-m+i+1) a_i P_{n+i}^m(\cos \theta) \\ &+ \sum_{i=-n_1}^{n_1} (n-m+i+1) \bar{b}_i(n) P_{n+i}^m(\cos \theta), \\ \bar{b}_i(n) &= O(n^{-1}). \end{aligned} \quad (21)$$

Конечно, в формулах (20), (21) предполагается, что $P_j^m = 0$, если $j < m$.

По аналогии со случаем дипольной гармоник ζ (см. уравнение (14)) из уравнения (21) имеем на поверхности сферы S

$$\Delta(\bar{\mu}_m \zeta) = \sum_{i=m}^{m+2n_1} (i-n+1) x_{i-m+1} P_i^m(\cos \theta) + \sum_{i=m}^{m+2n_1} (i-m+1) c_{i-m+1} P_i^m(\cos \theta). \quad (22)$$

Коэффициенты x_j, c_j в этом выражении вычисляются по коэффициентам l_i из (19) с учетом равенства (21), выполненного для каждой элементарной гармоник, причем коэффициенты l_i нам предстоит найти по индукции с учетом того, что коэффициенты x_j и c_j в разложении (22) тождественно обращаются в нуль.

Приступим к описанию пространства $\hat{\Omega}_\zeta$ формальных дублей. Рассмотрим вещественное линейное пространство $L_0^{n_1}$ размерности n_1 и пространство L^{2n_1} размерности $2n_1$. Обозначим координаты в L_0 через $l_1, \dots, l_{n_1}$. Будем интерпретировать координаты в пространстве L_0 как первые n_1 коэффициентов разложения искомой функции μ , заданной формулой (18).

Теперь рассмотрим числа $y_1, \dots, y_{2n_1}$, зависящие от коэффициентов $l_1, \dots, l_{n_1}$, которые суть коэффициенты разложения функции $\Delta(\bar{\mu}_m \zeta)$ по сферическим гармоникам.

Введем новые коэффициенты x_i , $1 \geq i \geq 2n_1$, по формуле $y_i = ix_i$. Теперь определим вложение $I(m): L_0 \subset L$ по формуле $I(m)(l_1, \dots, l_{n_1}) = (x_1, \dots, x_{2n_1})$.

Рассмотрим линейный оператор $A: L \rightarrow L$, заданный матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{a-n_1+1}{a-n_1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{a-n_1+2}{a-n_1} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_{n_1-1}}{a-n_1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{a_{n_1}}{a-n_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (23)$$

и последовательность линейных операторов $B(k): L \rightarrow L$, $k \in \mathbb{N}$, зависящих от натурального параметра k и заданных посредством матриц

$$\mathbf{B}(k) = \begin{pmatrix} b_{-n_1+1}(k) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{-n_1+2}(k) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n_1-1}(k) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{n_1}(k) & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

$$b_j(k) = \frac{\bar{b}_{-n_1}(a_j + \bar{b}_j)}{(a_{-n_1} + \bar{b}_{-n_1})a_{-n_1}} - \frac{\bar{b}_j}{a_{-n_1}}, \quad -n_1 + 1 \leq j \leq n_1. \quad (25)$$

Явный вид коэффициентов матриц $\mathbf{B}(k)$ нам в дальнейшем не потребуется; потребуется лишь, что $\mathbf{B}(k) = O(k^{-1})$, это сразу вытекает из формулы (25).

Для произвольного вектора $X(1) = (x_1, \dots, x_{2n_1})$ определим по индукции

$$X(k) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}(k)) \circ X(k-1), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (26)$$

Далее определим $X_\infty = (x_1, \dots, x_j, \dots)$.

Теперь в качестве начального вектора возьмем $X_1 = I(m)(l_1, \dots, l_{n_1})$ и определим

$$\bar{\mu} = \sum_{i=1}^{\infty} ix_i P_{m-1+i}^m r^{-(m+i)}. \quad (27)$$

Проделав аналогичные построения для каждой сферической моды, заметим, что уравнение (6) формально удовлетворяется для $\mu = \sum_m \mu_m^\oplus \cos(m\phi) + \mu_m^\ominus \sin(m\phi)$, где $\mu_m^\oplus$ и $\mu_m^\ominus$ вычисляются как правые части формулы (27). Это определяет разложение бесконечномерного пространства формальных дублей в прямую сумму n_1 -мерных пространств $\hat{\Omega}_\zeta^{\text{even}}(m)$, $\hat{\Omega}_\zeta^{\text{odd}}(m)$.

3. Описание подпространства сходящихся дублей, теорема устойчивости. Пусть $\widehat{\Omega}_\zeta$ – пространство формальных дублей с канонической различающей ζ . Мы опишем подпространство $\Omega_\zeta \subset \Omega$ устойчивых дублей и вычислим его размерность для почти всех ζ за исключением множества нулевой меры. Впрочем, доказательства пункта В из теоремы 2 опираются на гипотезу, которую мы планируем доказать в последующей публикации.

Обозначим через

$$\Lambda(t) = \lambda_{-n_1} t^{2n_1} + \lambda_{-n_1+1} t^{2n_1-1} + \dots + \lambda_{n_1}$$

характеристический многочлен матрицы $\mathbf{A}$, построенной в предыдущем пункте. Предположим, что коэффициенты многочлена находятся в общем положении и все корни многочлена Λ попарно различны за исключением пар комплексно-сопряженных корней. В частности, если все корни вещественны, то они попарно различны.

ТЕОРЕМА 2. А. *Предположим, что все корни λ_i , $i = 1, \dots, \deg(\zeta)$, уравнения $\Lambda(t) = 0$ удовлетворяют условию $|\lambda_i| < 1$. Тогда $\widehat{\Omega}_\zeta = \Omega_\zeta$, т.е. для любого t выполнено равенство $\dim(\Omega_\zeta(t)) = 2 \deg(\zeta)$.*

В. *Почти для любой различающей ζ за исключением множества меры нуль справедливо равенство $\dim \Omega_\zeta(t) = 2(n_1 - w)$, где $n_1 = \deg(\zeta)$, w – число корней многочлена Λ , по модулю больших 1. В частности, $\dim(\Omega_\zeta(t))$ не зависит от t .*

С. *Почти для любой различающей ζ и произвольного n' найдется положительное вещественное число $\varepsilon = \varepsilon(\zeta, n')$ такое, что для произвольного многочлена ζ' при условии $\deg(\zeta') \leq n'$, $|\zeta'| \leq \varepsilon$ (норма многочлена определяется суммой квадратов его коэффициентов), определена естественная проекция пространства $\Omega_{\zeta+\zeta'}(t)$ на подпространство $\Omega_\zeta(t)$. В частности, размерность $\dim(\Omega_\zeta(t))$ не меняется при малых деформациях ζ .*

Нам потребуется для доказательства следующая теорема.

ТЕОРЕМА ПУАНКАРЕ–ПЕРРОНА (см. [2] с последующими ссылками). *Рассмотрим рекуррентное соотношение с переменными коэффициентами*

$$w_n = \alpha_n^1 w_{n-1} + \dots + \alpha_n^k w_{n-k}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (28)$$

Предположим, что существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^i = \alpha^i, \quad i = 1, \dots, k.$$

Предположим, кроме того, что характеристический многочлен $\Lambda(t)$ предельного рекуррентного соотношения имеет корни, модули которых попарно различны. Тогда общее решение w_n имеет вид

$$\{w_n\}_{n=1, \dots, k}^\infty = C_1 \{w_n^1\}_{n=1, \dots, k}^\infty + \dots + C_k \{w_n^k\}_{n=1, \dots, k}^\infty,$$

где $\{w_n^i\}_{n=1, \dots, k}^\infty$ – базисные решения уравнения (4) такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w_{n+1}^i}{w_n^i} = \lambda_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

В нашем случае предположение о попарно различных модулях корней характеристического многочлена накладывает существенные ограничения, поскольку коэффициенты многочлена вещественны и корни могут быть, вообще говоря, комплексно-сопряженными. Мы будем использовать теорему Пуанкаре–Перрона в следующей форме.

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что мы находимся в условиях теоремы Пуанкаре–Перрона без условия о том, что все корни попарно различны. Предположим, кроме того, что ровно k из этих n корней по модулю меньше 1, а остальные по модулю больше 1. Тогда существует k -мерное подпространство в n -мерном пространстве формальных решений, образованное решениями, сходящимися к 0 с экспоненциальной скоростью.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Утверждение А очевидно. Для доказательства утверждения В нам потребуется следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть A – линейный оператор общего положения, $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, диагонализуемый над $\mathbb{C}$. Пусть $A(j)$ – последовательность линейных операторов такая, что $\lim_{j \rightarrow \infty} A(j) = A$. Назовем вектор $\vec{X} \in \mathbb{R}^n$ *притягивающимся*, если последовательность векторов

$$\vec{X}_1 = \vec{X}, \quad \vec{X}_2 = A(1)(\vec{X}), \quad \vec{X}_3 = A(2) \circ A(1)(\vec{X}), \quad \dots, \quad \vec{X}_j = A(j) \circ \dots \circ A(1)(\vec{X}), \quad \dots$$

сходится (экспоненциально быстро) к вектору $0 \in \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим вначале случай, когда матрица M , $M: L \rightarrow L$, не зависит от k . Обозначим через $W \subset L$ подпространство притягивающихся векторов, порожденное собственными векторами со значениями на интервале $] -1; +1[$. Обозначим коразмерность этого пространства в L через w . Пусть $L_0 \subset L$ – подпространство начальных значений, имеющее половинную размерность. Будем предполагать, что пространства L_0 , $W \subset L$ находятся в общем положении. Тогда подпространство $L_0 \cap W \subset L_0$ определяет подпространство притягивающихся векторов среди векторов с допустимыми начальными условиями. Это подпространство имеет коразмерность w .

Рассмотрим теперь общий случай последовательности $A + B(k)$, задающей рекурсию, $\lim_{k \rightarrow \infty} B(k) = 0$. Скажем, что последовательность *регулярная*, если все ее матрицы обратимы и ее предельная матрица A диагонализуема и имеет подпространство притягивающихся векторов коразмерности w с собственными значениями по модулю отделенными от 1. По теореме Пуанкаре–Перрона определено подпространство $V \subset L$ притягивающихся векторов той же коразмерности w . Сформулируем без доказательства следующую гипотезу.

ГИПОТЕЗА. *Почти для любой канонической различающей ζ (с точностью до множества меры нуль) последовательность матриц $A + B(k)$, построенная по ζ по формулам (23), (24) регулярна и подпространства L_0 , $V \subset L$ начальных значений и притягивающих векторов находятся в общем положении.*

В предположении гипотезы заключаем, что коразмерность притягивающих векторов с допустимыми начальными условиями равна $n_1 - w$, что доказывает В.

Докажем С. Предположим, что $\deg(\zeta') = \deg(\zeta) + 1$, общий случай доказывается по индукции. Определим $\zeta_a = a\zeta' + \zeta$. Обозначим через $(A_a + B_a(k)): L_a \rightarrow L_a$ – последовательность операторов, определяющих пространство пар Бакуса с канонической различающей ζ_a , согласно формулам (23), (24). Определено каноническое включение $J_a: L_a \subset L$. Пусть $W_a \subset L_a$ – подпространство притягивающихся векторов. Если последовательность $A + B(k)$ удовлетворяла условиям регулярности, то при малых значениях a последовательность $A_a + B_a(k)$ также удовлетворяет условиям регулярности.

Причем коразмерность подпространства притягивающихся векторов в подпространстве допустимых векторов становится на 1 больше, и само пространство допустимых векторов увеличивает размерность на 1. Объемлющее пространство L_a получается из предельного пространства L добавлением двух собственных подпространств с собственными значениями $\approx a$, $\approx a^{-1}$. Подпространство притягивающихся векторов с допустимыми начальными значениями вычисляется по формуле $W_a(m) \cap L_{0,a}$ и при малых значениях параметра, а все эти подпространства канонически изоморфны между собой посредством ортогональной проекции на предельное пространство при $a = 0$. Теорема 2 доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧЕ С РАЗЛИЧАЮЩЕЙ “ДИПОЛЬ-КВАДРУПОЛЬ”. Рассмотрим случай $\zeta = P_1^0(\cos \theta)r^{-2} + aP_2^0(\cos \theta)r^{-3}$, где a – вещественный параметр, $0 < a < +\infty$, и изучим пространство дублей с данным каноническим инвариантом. При малых значениях a задача была рассмотрена в п. 2. При $a \rightarrow +\infty$ задача переходит к случаю $\zeta = P_2^0(\cos \theta)$.

Характеристический многочлен задается формулой $\Lambda(t) = 15t^4 + 12at^3 + 6t^2 + 4at + 3$. Для $a = 3/2$ существует корень $t = -1$ и (основываясь на гипотезе) заключаем, что размерность пространства дублей претерпевает скачок.

Для $a = 0$ корни t_i определяются как $t^2 = (-2 \pm 4i)/10$. Следовательно, $\|t_i\| = 5^{-1/4}$. Для $a = \infty$ получается $t = \pm 1/\sqrt{3}$, $0, \infty$. Пространство формальных дублей при больших a двумерно, в то время как подпространство сходящихся дублей одномерно.

4. Проблемы и обсуждения. Результаты работы планируется использовать, прежде всего, при решении следующей проблемы, имеющей важное прикладное значение в теории магнетизма.

ПРОБЛЕМА ДВУХ СФЕР. Существует ли устойчивый дубль (ξ_1, ξ_2) , отвечающий некоторому каноническому инварианту ζ , такой, что условие (2) выполняется одновременно для двух различных сфер S_1, S_2 ? Под *устойчивым дублем* понимается такая пара, которая не разрушается при малом возмущении канонического инварианта и расстояния между сферами. Аналогичную проблему можно рассмотреть для формального дубля и без предположения об устойчивости. Интересно рассмотреть случай двух бесконечно близких и двух бесконечно далеких сфер при помощи метода разложения по малому параметру.

ГИПОТЕЗА. *Пространство устойчивых дублей, отвечающих условию (2) на двух сферах, пусто.*

ПРОБЛЕМА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА СХОДЯЩИХСЯ ДУБЛЕЙ. В теореме 2 вычисляется размерность пространства сходящихся дублей в задаче “диполь-квадруполь” с однопараметрическим семейством канонических инвариантов. Явное вычисление пространства сходящихся дублей не проведено. Решение проблемы можно пытаться получить исходя из анализа системы линейных дифференциальных уравнений в дискретной модели с переменными коэффициентами, (см., например, [6]).

ПРОБЛЕМА ОПИСАНИЯ СХОДЯЩИХСЯ ДУБЛЕЙ. В пп. 3 и 4 было предложено описание формальных и сходящихся дублей в предположении, что канонический инвариант ζ пары не зависит от угловой координаты φ . Построения без этого предположения не проведены. Решение проблемы можно пытаться получить, переходя к рекуррентным

соотношениям с переменными коэффициентами в бесконечномерном пространстве. Такая теория изложена, например, в [2].

Авторы благодарят В.И. Буслаева за обсуждения, в особенности за указание возможного подхода к решению проблемы описания сходящихся дублей, и С.Ю. Доброхотова за ценные замечания, способствующие улучшению рукописи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Khokhlov A., Hulot G., Le Mouel J. L. On the Backus effect – I // *Geophys. J. Int.* 1997. V. 130. P. 701–703.
- [2] Буслаев В.И. Соотношения для коэффициентов и особые точки функций // *Матем. сб.* 1986. Т. 131. №3. С. 357–384.
- [3] Backus G. E. Non-uniqueness of the external geomagnetic field determined by surface intensity measurements // *J. Geophys. Res.* 1970. V. 75. P. 6339–6341.
- [4] Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.
- [5] del Carmen Jorge M., Magnanini R. Explicit calculation of the solution to backus problem with condition for uniqueness // *J. Math. Anal. Appl.* 1993. V. 173. №2. P. 515–522.
- [6] Magnus W. On the exponential solution of differential equations for a linear operator // *Comm. Pure Appl. Math.* 1954. V. 7. P. 649–673.

(Ахметьев П. М.) Институт земного магнетизма ионосферы
и распространения радиоволн РАН;
(Хохлов А. В.) Международный институт теории прогноза
землетрясений и математической геофизики РАН

Поступило
15.08.2002