Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. К. Свинин, Инвариантные совместные решения эволюционных уравнений интегрируемых иерархий, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 1, 99–107

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm250>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 05:56:47

УДК 517

ИНВАРИАНТНЫЕ СОВМЕСТНЫЕ РЕШЕНИЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ИЕРАРХИЙ

А. К. Свинин

Построены группы классических точечных симметрий для совместных пар эволюционных уравнений (систем уравнений) интегрируемых иерархий, связанных со вспомогательным уравнением метода обратной задачи второго порядка. Для двух случаев: иерархии уравнений Кортевега–де Фриза (КдФ) и систем уравнений Каупа, строятся совместные решения, инвариантные относительно групп симметрий. Задача построения этих решений сводится, соответственно, к первому и второму уравнению Пенлеве с зависимостью от некоторого параметра. При этом, уравнения Пенлеве дополняются линейными эволюционными уравнениями, определяющими деформацию решения соответствующего уравнения Пенлеве.

Библиография: 5 названий.

1. Введение. Групповой анализ дифференциальных уравнений математической физики, как известно, играет существенную роль при описании общего множества решений, при выделении частных инвариантных решений, при установлении взаимосвязи между симметриями и законами сохранения и т.д. [1], [2].

Интегрируемые эволюционные уравнения, такие как уравнение КдФ, с групповой точки зрения имеют отличительную особенность: они включаются в иерархию коммутирующих совместных уравнений (систем уравнений)

$$u_{t_m} = K_m[u], \quad [K_n, K_m] = 0$$

и поэтому имеет смысл рассматривать совместные решения $u(x, t_2, t_3, \dots)$.

В данной статье рассматриваются интегрируемые иерархии эволюционных уравнений, связанные со вспомогательным уравнением второго порядка (1). В п. 2 строятся однопараметрические группы линейных точечных преобразований симметрии для совместной пары эволюционных уравнений в каждой иерархии. Построение основано на трансформационных свойствах рекурсионного оператора, который для этих иерархий известен в явной форме. В п. 3 и 4 строятся совместные решения уравнений иерархии КдФ и Каупа, инвариантные относительно данных групп преобразований. Подстановки, полученные с помощью стандартных методов [1], [2], в результате сводят задачу построения этих решений к первому и второму уравнению Пенлеве с зависимостью от некоторого параметра и дополнительному линейному эволюционному уравнению.

2. Интегрируемые иерархии и однопараметрические группы точечных преобразований. Известно, что со вспомогательным линейным уравнением метода обратной задачи

$$\psi_{xx}(x, \lambda) + (u(x, \lambda) + (-\lambda)^n)\psi(x, \lambda) = 0, \quad (1)$$

где $u(x, \lambda) = \sum_{i=1}^n u_i(x)(-\lambda)^{i-1}$, ассоциируется интегрируемая иерархия совместных эволюционных уравнений (систем уравнений) [3]

$$\mathbf{u}_{t_m} = \mathbf{K}_m[\mathbf{u}] = \Lambda^{m-1}[\mathbf{u}]\mathbf{u}_x, \quad \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T \quad (2)$$

с рекурсионным оператором

$$\Lambda[\mathbf{u}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{4}\partial_x^2 + u_1 + \frac{1}{2}u_{1x}\partial_x^{-1} \\ -1 & 0 & \dots & 0 & u_2 + \frac{1}{2}u_{2x}\partial_x^{-1} \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & u_3 + \frac{1}{2}u_{3x}\partial_x^{-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & u_n + \frac{1}{2}u_{nx}\partial_x^{-1} \end{pmatrix}.$$

Действие оператора интегрирования ∂_x^{-1} определим следующим образом. Пусть $A_{\mathbf{u}}^0 \subset A_{\mathbf{u}}$ – кольцо дифференциальных многочленов от u_i с нулевыми свободными членами. Потребуем, чтобы $\partial_x^{-1}(f) \in A_{\mathbf{u}}^0$ для любого $f = f[\mathbf{u}] \in \text{Im } \partial_x \subset A_{\mathbf{u}}^0$. В частности, если функции $u_i = u_i(x)$ принадлежат пространству Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, то

$$\partial^{-1}(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^x \cdot dx'.$$

После определения оператора интегрирования ∂_x^{-1} рекурсионный оператор однозначно определяет бесконечный набор коммутирующих векторных полей $\mathbf{K}_m[\mathbf{u}] = \Lambda^{m-1}\mathbf{u}_x$, $m \in \mathbb{N}$.

Очевидно, что сдвиг спектрального параметра в уравнении (1) $\bar{\lambda} = \lambda - \varepsilon$ оставляет инвариантным вид этого уравнения. Исходя из этого факта, определим однопараметрическое линейное преобразование зависимых переменных с помощью соотношения

$$\sum_{i=1}^n u_i(x)(-\lambda)^{i-1} + (-\lambda)^n = \sum_{i=1}^n \bar{u}_i(x)(-\lambda + \varepsilon)^{i-1} + (-\lambda + \varepsilon)^n.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях λ , получим

$$\begin{aligned} u_1 &= F_1(\bar{\mathbf{u}}, \varepsilon) = \sum_{i=1}^n \bar{u}_i \varepsilon^{i-1} + \varepsilon^n, \\ u_{i+1} &= F_{i+1}(\bar{\mathbf{u}}, \varepsilon) = \frac{1}{i!} \frac{\partial^i F_1(\bar{\mathbf{u}}, \varepsilon)}{\partial \varepsilon^i}, \quad i = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (3)$$

Из определения этого преобразования очевидно, что

$$\bar{u}_1 = F_1(\mathbf{u}, -\varepsilon), \quad \bar{u}_{i+1} = F_{i+1}(\mathbf{u}, -\varepsilon), \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (4)$$

Также очевидно, что преобразование (3) можно переписать в векторном виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{u}}, \varepsilon) = A(\varepsilon)\bar{\mathbf{u}} + d(\varepsilon),$$

где $A(\varepsilon)$ – верхнетреугольная матрица с единицами на диагонали и $d(\varepsilon)$ – вектор. Матричные элементы $A(\varepsilon)$ и компоненты вектора $d(\varepsilon)$, как нетрудно убедиться, определяются следующими формулами:

$$A_{ik}(\varepsilon) = \binom{i-1}{k-1} \varepsilon^{k-i}, \quad k > i, \quad d_i(\varepsilon) = \binom{i-1}{n} \varepsilon^{n-i+1}.$$

Тогда

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, -\varepsilon) = A(-\varepsilon)\mathbf{u} + d(-\varepsilon).$$

ЛЕММА. *Выполняется соотношение*

$$\Lambda[\mathbf{u}]|_{\mathbf{u}=F(\bar{\mathbf{u}},\varepsilon)} = A(\varepsilon)(\Lambda[\bar{\mathbf{u}}] + \varepsilon)A^{-1}(\varepsilon). \quad (5)$$

Доказательство этой леммы приведено в конце статьи.

Формула (5) определяет закон преобразования рекурсионного оператора. Однако следует заметить, что оператор интегрирования ∂_x^{-1} , фигурирующий в $\Lambda[\bar{\mathbf{u}}]$, действует в кольце дифференциальных многочленов от преобразованных переменных $\bar{u}_i$ и его действие (выбор постоянной интегрирования) должно быть согласовано с преобразованием (4). Пусть $\mathbf{F}_*: A_{\mathbf{u}} \rightarrow A_{\bar{\mathbf{u}}}$ и $\mathbf{F}_*^{-1}: A_{\bar{\mathbf{u}}} \rightarrow A_{\mathbf{u}}$ — отображения колец дифференциальных многочленов, порожденные преобразованием (4). Тогда постоянная интегрирования однозначно определяется условием

$$\mathbf{F}_*^{-1} \circ \partial_x^{-1}(f) \in A_{\mathbf{u}}^0, \quad (6)$$

для любого $f[\bar{\mathbf{u}}] \in \text{Im } \partial_x \subset A_{\bar{\mathbf{u}}}^0$.

Таким образом, вычисляя векторные поля $\Lambda^r[\bar{\mathbf{u}}]\bar{\mathbf{u}}_x$, необходимо учитывать условие (6). Например,

$$\Lambda[\bar{\mathbf{u}}]\bar{\mathbf{u}}_x = K_2[\bar{\mathbf{u}}] + \frac{n}{2}\varepsilon\bar{\mathbf{u}}_x, \quad (7)$$

так как учитывается, что $\partial_x^{-1}(\bar{u}_{nx}) = \bar{u}_n + n\varepsilon$, потому что $\mathbf{F}_*^{-1}(\bar{u}_n + n\varepsilon) = u_n \in A_{\mathbf{u}}^0$. Для вычисления $\Lambda^2[\bar{\mathbf{u}}]\bar{\mathbf{u}}_x$ требуются две вспомогательные формулы:

$$\partial_x^{-1}\left(\frac{1}{4}\bar{u}_{xxx} + \frac{3}{2}\bar{u}\bar{u}_x\right) = \frac{1}{4}\bar{u}_{xx} + \frac{3}{4}\bar{u}^2 - \frac{3}{4}\varepsilon^2 \quad (8)$$

для $n = 1$ и

$$\partial_x^{-1}\left(-\bar{u}_{n-1,x} + \frac{3}{2}\bar{u}_n\bar{u}_{nx}\right) = -\bar{u}_{n-1} + \frac{3}{4}\bar{u}_n^2 + \left(\frac{1}{2}n(n-1) - \frac{3}{4}n^2\right)\varepsilon^2 \quad (9)$$

для $n \geq 2$, которые следуют из условия (6). Используя формулы (7), (8) и (9), получаем

$$\begin{aligned} \Lambda^2[\bar{\mathbf{u}}]\bar{\mathbf{u}}_x &= \Lambda[\bar{\mathbf{u}}]K_2[\bar{\mathbf{u}}] + \frac{n}{2}\varepsilon\Lambda[\bar{\mathbf{u}}]\bar{\mathbf{u}}_x \\ &= \mathbf{K}_3[\bar{\mathbf{u}}] + \left(\frac{1}{2}n(n-1) - \frac{3}{4}n^2\right)\varepsilon^2\bar{\mathbf{u}}_x + \frac{n}{2}\varepsilon\left(\mathbf{K}_2[\bar{\mathbf{u}}] + \frac{n}{2}\varepsilon\bar{\mathbf{u}}_x\right) \\ &= \mathbf{K}_3[\bar{\mathbf{u}}] + \frac{n}{2}\varepsilon\mathbf{K}_2[\bar{\mathbf{u}}] + \left(\frac{1}{2}n(n-1) - \frac{1}{8}n^2\right)\varepsilon^2\bar{\mathbf{u}}_x. \end{aligned} \quad (10)$$

Используя лемму и формулы (7), (10), получаем эволюционные уравнения на преобразованные функции $\bar{u}_i(x, t_2, t_3)$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_{t_2} &= (\Lambda[\bar{\mathbf{u}}] + \varepsilon)\bar{\mathbf{u}}_x = \mathbf{K}_2[\bar{\mathbf{u}}] + \left(\frac{n}{2} + 1\right)\varepsilon\bar{\mathbf{u}}_x, \\ \bar{\mathbf{u}}_{t_3} &= (\Lambda[\bar{\mathbf{u}}] + \varepsilon)^2\bar{\mathbf{u}}_x = \Lambda^2[\bar{\mathbf{u}}]\bar{\mathbf{u}}_x + 2\varepsilon\Lambda[\bar{\mathbf{u}}]\bar{\mathbf{u}}_x + \varepsilon^2\bar{\mathbf{u}}_x \\ &= \mathbf{K}_3[\bar{\mathbf{u}}] + \frac{n}{2}\varepsilon\mathbf{K}_2[\bar{\mathbf{u}}] + \left(\frac{1}{2}n(n-1) - \frac{1}{8}n^2\right)\varepsilon^2\bar{\mathbf{u}}_x \\ &\quad + 2\varepsilon\left(\mathbf{K}_2[\bar{\mathbf{u}}] + \frac{n}{2}\varepsilon\bar{\mathbf{u}}_x\right) + \varepsilon^2\bar{\mathbf{u}}_x \\ &= \mathbf{K}_3[\bar{\mathbf{u}}] + \left(\frac{n}{2} + 2\right)\mathbf{K}_2[\bar{\mathbf{u}}] + \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2} + 1\right)\left(\frac{n}{2} + 2\right)\varepsilon^2\bar{\mathbf{u}}_x. \end{aligned}$$

Преобразование зависимых переменных (4) возможно дополнить преобразованием независимых переменных (x, t_2, t_3) так, чтобы в результате получить преобразование симметрии для пары совместных уравнений (систем уравнений) в иерархии. А именно, пусть

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{t}_2 \\ \bar{t}_3 \end{pmatrix} = B(\varepsilon) \begin{pmatrix} x \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (\frac{n}{2} + 1)\varepsilon & \frac{1}{2}(\frac{n}{2} + 1)(\frac{n}{2} + 1)\varepsilon^2 \\ 0 & 1 & (\frac{n}{2} + 1)\varepsilon \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Матрица $B(\varepsilon)$, как нетрудно убедиться, удовлетворяет групповому соотношению

$$B(\varepsilon)B(\varepsilon_1) = B(\varepsilon + \varepsilon_1).$$

Прямыми вычислениями можно убедиться в том, что

$$\bar{u}_{\bar{t}_2} = K_2[\bar{u}], \quad \bar{u}_{\bar{t}_3} = K_3[\bar{u}].$$

Таким образом, можно сформулировать

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Линейные точечные преобразования переменных по формулам (4), (11) образуют однопараметрическую группу симметрий для совместной пары уравнений – первых двух нетривиальных членов в иерархии уравнений (2).*

3. Инвариантные решения уравнений иерархии КдФ. Рассмотрим пару уравнений в интегрируемой иерархии КдФ

$$u_{t_2} = K_2[u] = \frac{1}{4}u_{xxx} + \frac{3}{2}uu_x, \quad (12)$$

$$u_{t_3} = K_3[u] = \frac{1}{16}u_x^{(V)} + \frac{5}{8}uu_{xx} + \frac{5}{4}u_xu_{xx} + \frac{15}{8}u^2u_x. \quad (13)$$

В этом случае формулы преобразования (4), (11) имеют следующий вид:

$$\bar{u} = u - \varepsilon, \quad \bar{x} = x + \frac{3}{2}\varepsilon t_2 + \frac{15}{8}\varepsilon^2 t_3, \quad \bar{t}_2 = t_2 + \frac{5}{2}\varepsilon t_3, \quad \bar{t}_3 = t_3. \quad (14)$$

Дифференциальными инвариантами относительно образующей этой группы

$$\mathbf{v} = -\frac{\partial}{\partial u} + \frac{5}{2}t_3\frac{\partial}{\partial t_2} + \frac{3}{2}t_2\frac{\partial}{\partial x},$$

как нетрудно проверить, являются

$$\xi = t_3, \quad z = xt_3 - \frac{3}{10}t_2^2, \quad w = t_3u^2 + \frac{4}{5}t_2u + \frac{8}{15}x.$$

Построим совместное решение уравнений (12), (13), инвариантное относительно группы преобразований (14). Подстановка для u определяется из квадратного уравнения

$$t_3u^2 + \frac{4}{5}t_2u + \left(\frac{8}{15}x - w\right) = 0. \quad (15)$$

Решение (15) имеет вид

$$u = -\frac{2t_2}{5t_3} \pm \frac{(t_3w - \frac{8}{15}z)^{1/2}}{t_3}, \quad w = w(z, \xi). \quad (16)$$

Сделаем подстановку $v = v(z, \xi) = \left(\xi w - \frac{8}{15}z\right)^{1/2}$. Очевидно, что выбор знака в (16) не играет роли. Поэтому, без ограничения общности, выберем знак "+". Подставляя (16) в (12), получаем

$$v_{zz} = -\frac{1}{\xi^3} \left(3v^2 + \frac{8}{5}z + c(\xi) \right), \quad (17)$$

где $c(\xi)$ – произвольная функция, получающаяся в результате однократного интегрирования по z . Подстановка (16) в уравнение КдФ пятого порядка (13), как нетрудно проверить, с учетом (17) дает уравнение эволюционного типа

$$v_\xi = -\left(\frac{6z}{5\xi} + \frac{c(\xi)}{8\xi}\right)v_z + \frac{3}{5\xi}v.$$

Прямыми вычислениями нетрудно убедиться, что условие совместности $v_{zz\xi} = v_{\xi zz}$ выполняется при условии, что выполняется уравнение $\xi c'(\xi) = c(\xi)$. Решение этого уравнения – линейная однородная функция по ξ . Пусть $c = 8\mu\xi$ с произвольной постоянной μ . Таким образом, доказано

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Подстановка*

$$u(x, t_2, t_3) = \frac{-2t_2 + 5v(z, \xi)}{5\xi}, \quad \xi = t_3, \quad z = xt_3 - \frac{3}{10}t_2^2$$

дает совместное решение (12), (13), инвариантное относительно группы преобразований (14) при условии, что $v = v(z, \xi)$ удовлетворяет совместной системе уравнений

$$v_{zz} = -\frac{1}{\xi^3} \left(3v^2 + \frac{8}{5}z + 8\mu\xi \right), \quad (18)$$

$$v_\xi = -\left(\frac{6z}{5\xi} + \mu\right)v_z + \frac{3}{5\xi}v, \quad (19)$$

где μ – постоянная.

При каждом значении $\xi_0 \neq 0$ уравнение (18) является первым уравнением Пенлеве на функцию $v(z) = v(z, \xi_0)$. Коэффициенты a_k “общего” решения (18) с полюсной особенностью в точке z_0

$$v(z) = \frac{1}{(z - z_0)^2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

определяются, как известно, из рекурсионного соотношения вида

$$(k+1)(k-6)a_k = f_k(a_0, \dots, a_{k-1}), \quad k \geq 1,$$

с резонансами при $k = -1$ и $k = 6$. При этом $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. В случае системы уравнений (18), (19) очевидно, что z_0 и коэффициенты a_k зависят от эволюционного параметра ξ . Несложные вычисления дают

$$a_0 = -2\xi^3, \quad a_4 = \frac{4}{5\xi^3} \left(\frac{z_0(\xi)}{5} + \mu\xi \right), \quad a_5 = \frac{4}{15\xi^3}.$$

При этом

$$z_0 = -5\mu\xi + q\xi^{6/5}, \quad a_6 = b_6\xi^{-18/5},$$

где q, b_6 – произвольные постоянные.

Из уравнений (18) и (19) следует, что $a_k(\xi) \sim \xi^{3-(6k/5)}$. Тогда “общее” решение совместной системы (18), (19) будет записываться в виде ряда

$$v(z, \xi) = \frac{\xi^3}{(z - z_0)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k(z - z_0)^k}{\xi^{6k/5}},$$

где b_k – постоянные и $z_0 = -5\mu\xi + q\xi^{6/5}$, причем постоянные q и b_6 являются произвольными.

4. Инвариантные решения уравнений иерархии Каупа. Рассмотрим иерархию систем уравнений (2) при $n = 2$. Первый нетривиальный член этой иерархии – система Каупа [4], [5]:

$$\begin{aligned} u_{1t_2} &= \frac{1}{4}u_{2xxx} + u_1u_{2x} + \frac{1}{2}u_2u_{1x}, \\ u_{2t_2} &= -u_{1x} + \frac{3}{2}u_2u_{2x}. \end{aligned} \quad (20)$$

Следующая система в этой иерархии определяется таким образом:

$$\begin{aligned} u_{1t_3} &= -\frac{1}{4}u_{1xxx} - \frac{3}{2}u_1u_{1x} + \frac{3}{8}u_2u_{2xxx} + \frac{9}{8}u_{2x}u_{2xx} + \frac{3}{2}u_1u_2u_{2x} + \frac{3}{8}u_2^2u_{1x}, \\ u_{2t_3} &= -\frac{1}{4}u_{2xxx} + \frac{15}{8}u_2^2u_{2x} - \frac{3}{2}u_1u_{2x} - \frac{3}{2}u_2u_{1x}. \end{aligned} \quad (21)$$

Построим совместное решение систем (20), (21), инвариантное относительно преобразований (4), (11). В этом случае формулы преобразований (4), (11) выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= u_1 - u_2\varepsilon + \varepsilon^2, & \bar{u}_2 &= u_2 - 2\varepsilon, & \bar{x} &= x + 2\varepsilon t_2 + 3\varepsilon^2 t_3, \\ \bar{t}_2 &= t_2 + 3\varepsilon t_3, & \bar{t}_3 &= t_3. \end{aligned} \quad (22)$$

Дифференциальными инвариантами относительно образующей группы

$$\mathbf{v} = -u_2 \frac{\partial}{\partial u_1} - 2 \frac{\partial}{\partial u_2} + 3t_3 \frac{\partial}{\partial t_2} + 2t_2 \frac{\partial}{\partial x}$$

являются

$$\xi = t_3, \quad z = xt_3 - \frac{1}{3}t_2^2, \quad w_1 = t_3u_2^2 + \frac{4}{3}t_2u_2 + \frac{4}{3}x, \quad w_2 = u_1 - \frac{1}{4}u_2^2.$$

Стандартными методами по аналогии с тем, как это делалось в предыдущем разделе, получаем подстановку

$$u_1(x, t_2, t_3) = w_2(z, \xi) + \frac{1}{4t_3^2} \left(v(z, \xi) - \frac{2t_2}{3t_3} \right)^2, \quad u_2(x, t_2, t_3) = \frac{-2t_2 + 3v(z, \xi)}{3t_3}, \quad (23)$$

где $v = (\xi w_1 - \frac{4}{3}z)^{1/2}$. Подстановка (23) во второе уравнение системы Каупа дает соотношение

$$w_{2z} = \frac{vv_z}{\xi^2} + \frac{2}{3\xi^2}. \quad (24)$$

Соотношение (24) можно проинтегрировать по переменной z . Выберем для удобства “постоянную интегрирования” $c_1(\xi)$ так, чтобы

$$w_2 = \frac{1}{\xi^2} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{2z}{3} + \frac{c_1(\xi)}{4} \right). \quad (25)$$

В свою очередь, подстановка (23) во второе уравнение системы (20) с учетом (25) дает уравнение с производной третьего порядка по z на функцию $v = v(z, \xi)$. Интегрируя один раз по этой переменной, в результате получим

$$v_{zz} = -\frac{1}{\xi^4} \left(2v^3 + \frac{8z}{3}v + c_1(\xi)v \right) + c_2(\xi), \quad (26)$$

где $c_2(\xi)$ – “постоянная интегрирования”. Подстановка (23) во второе уравнение системы (21) с учетом (26) дает линейное эволюционное уравнение

$$v_\xi = -\left(\frac{4z}{3\xi} + \frac{c_1(\xi)}{8\xi} \right) v_z + \frac{2}{3\xi} v. \quad (27)$$

Наконец, подстановка (23) в первое уравнение системы (21) обращает это уравнение в тождество при условии, что $\xi c'_1(\xi) = c_1(\xi)$. Нетрудно проверить, что условие совместности $v_{zz\xi} = v_{\xi zz}$ уравнений (26) и (27) выполняется, если $\xi c'_1(\xi) = c_1(\xi)$ и $\xi c'_2(\xi) = -2c_2(\xi)$. Решения этих уравнений запишем в виде

$$c_1 = 8\mu\xi, \quad c_2 = \frac{\nu}{\xi^2},$$

где μ, ν – произвольные постоянные. Таким образом, доказано

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Подстановка*

$$\begin{aligned} u_1(x, t_2, t_3) &= \frac{(9v(z, \xi) - 4t_2)v(z, \xi)}{12\xi^2} + \frac{6z + 18\mu\xi + t_2^2}{9\xi^2}, \\ u_2(x, t_2, t_3) &= \frac{-2t_2 + 3v(z, \xi)}{3\xi}, \quad \xi = t_3, \quad z = xt_3 - \frac{1}{3}t_2^2 \end{aligned} \quad (28)$$

дает совместное решение систем (20), (21), инвариантное относительно группы преобразований (22) при условии, что $v = v(z, \xi)$ удовлетворяет совместной системе уравнений

$$v_{zz} = -\frac{1}{\xi^4} \left(2v^3 + \frac{8}{3}zv + 8\mu\xi v \right) + \frac{\nu}{\xi^2}, \quad (29)$$

$$v_\xi = -\left(\frac{4z}{3\xi} + \mu \right) v_z + \frac{2}{3\xi} v, \quad (30)$$

где μ, ν – произвольные постоянные.

Заметим, что при каждом фиксированном значении $\xi_0 \neq 0$ уравнение (29) является вторым уравнением Пенлеве на функцию $v(z) = v(z, \xi_0)$. Коэффициенты “общего” решения этого уравнения с простым полюсом

$$v(z) = \frac{1}{(z - z_0)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad (31)$$

определяются из рекурсионного соотношения вида

$$(k+1)(k-4)a_k = f_k(a_0, \dots, a_{k-1}), \quad k \geq 1,$$

с резонансами при $k = -1$ и $k = 4$, причем $a_1 = 0$. Подстановка (31) в уравнение (29) дает

$$a_0^2 = -\xi^4, \quad a_2 = \frac{4a_0}{3\xi^4} \left(\frac{z_0}{3} + \mu\xi \right), \quad a_3 = \frac{2a_0}{3\xi^4} - \frac{\nu}{4\xi^2}.$$

При этом

$$z_0 = -3\mu\xi + q\xi^{4/3}, \quad a_4 = b_4\xi^{-10/3},$$

где q, b_6 – произвольные постоянные.

Из (29) и (30) следует, что $a_k(\xi) \sim \xi^{2-(4k/3)}$. “Общее” решение совместной системы (29), (30) тогда будет записываться в виде ряда

$$v(z, \xi) = \frac{\xi^2}{z - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k(z - z_0)^k}{\xi^{4k/3}},$$

где b_k – постоянные и $z_0 = -3\mu\xi + q\xi^{4/3}$, причем постоянные q и b_4 являются произвольными.

Отметим, что оба линейных уравнения (19) и (30), описывающих деформацию решения соответствующего уравнения Пенлеве можно записать в единой форме, а именно

$$v_\xi = A(z, \xi)v_z - \frac{1}{2}A_z(z, \xi)v,$$

где $A(z, \xi) = -(6z/(5\xi) + \mu)$ для первого уравнения Пенлеве и $A(z, \xi) = -(4z/(3\xi) + \mu)$ для второго уравнения Пенлеве.

5. Доказательство леммы. Обозначим

$$p(\varepsilon) = p_0 + \dots + p_{n-1}\varepsilon^{n-1} + \varepsilon^n = \left(\frac{1}{4}\partial + u_1 + \frac{1}{2}u_{1x}\partial_x^{-1} \right) \Big|_{u_1=F_1(\bar{u}, \varepsilon)}.$$

В силу соотношений (3) можно записать

$$\Lambda(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda[\mathbf{u}]|_{\mathbf{u}=\mathbf{F}(\bar{\mathbf{u}}, \varepsilon)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & p(\varepsilon) \\ -1 & 0 & \dots & 0 & p'(\varepsilon) \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & \frac{1}{2!}p''(\varepsilon) \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & \frac{1}{(n-1)!}p^{(n-1)}(\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Так как матрица $A(\varepsilon)$ невырождена, соотношение (5) можно переписать в виде

$$A(\varepsilon)(\Lambda(0) + \varepsilon) = \Lambda(\varepsilon)A(\varepsilon). \quad (32)$$

Коэффициенты p_i являются операторами, однако очевидно, что при доказательстве выполнения соотношения (32) с этими коэффициентами можно оперировать как с числами. Для краткости биномиальные коэффициенты обозначаем далее символом C_p^q .

Имеем

$$A(\varepsilon)\Lambda(0) = \begin{pmatrix} -\varepsilon & -\varepsilon^2 & \dots & -\varepsilon^{n-1} & p(\varepsilon) - \varepsilon^n \\ -1 & -C_2^1\varepsilon & \dots & -C_{n-1}^1\varepsilon^{n-2} & p'(\varepsilon) - C_n^1\varepsilon^{n-1} \\ 0 & -1 & \ddots & -C_{n-1}^2\varepsilon^{n-3} & \frac{1}{2!}p''(\varepsilon) - C_n^2\varepsilon^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \frac{1}{(n-1)!}p^{(n-1)}(\varepsilon) - C_n^{n-1}\varepsilon \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & \dots & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^n \\ 0 & \varepsilon & C_2^1\varepsilon^2 & \dots & C_{n-2}^1\varepsilon^{n-2} & C_{n-1}^1\varepsilon^{n-1} \\ 0 & 0 & \varepsilon & \dots & C_{n-2}^2\varepsilon^{n-3} & C_{n-1}^2\varepsilon^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

$$\Lambda(\varepsilon)A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p(\varepsilon) \\ -1 & -\varepsilon & -\varepsilon^2 & \dots & -\varepsilon^{n-2} & p'(\varepsilon) - \varepsilon^{n-1} \\ 0 & -1 & -C_2^1\varepsilon & \dots & -C_{n-2}^1\varepsilon^{n-3} & \frac{1}{2!}p''(\varepsilon) - C_1^{n-1}\varepsilon^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & \frac{1}{(n-1)!}p^{(n-1)}(\varepsilon) - C_{n-1}^{n-2}\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Сравнивая поддиагонально элементы, нетрудно убедиться в выполнении соотношения (32). При этом нужно использовать соотношение

$$C_k^{k-r} - C_{k-1}^{k-r-1} = C_{k-1}^{k-r},$$

которое нетрудно проверить.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
- [2] Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
- [3] Alonso L. M. Schrödinger spectral problems with energy dependent potentials as sources of nonlinear Hamiltonian evolution equations // J. Math. Phys. 1980. V. 21. P. 2342–2349.
- [4] Kaup D. J. Finding eigenvalue problems for solving nonlinear evolution equations // Progr. Theor. Phys. 1975. V. 54. P. 72–78.
- [5] Matveev V. B., Yavor M. I. Solutions presque périodiques et à N -solutions de l'équation hydrodynamique nonlinéaire de Kaup // Ann. Inst. H. Poincaré. 1979. V. 31. P. 25–41.

Институт динамики систем и теории управления, г. Иркутск
E-mail: svinin@icc.ru

Поступило
28.01.1999
Исправленный вариант
08.08.2002