Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Леонов, Об H -свойстве функционалов в пространствах Соболева, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 3, 378–394

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2500>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 04:15:03

УДК 517.98

ОБ H -СВОЙСТВЕ ФУНКЦИОНАЛОВ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

А. С. Леонов

В статье рассматриваются специальные классы усиленно выпуклых функционалов в пространствах Соболева. Доказывается, что функционалы из таких классов обладают так называемым H -свойством: для них из слабой сходимости последовательностей аргументов и сходимости этих последовательностей по функционалу вытекает сильная сходимость.

Библиография: 8 названий.

1. Введение. Пусть Z – банахово пространство с элементами z , а D , $D \subset Z$, – некоторое непустое множество. Предположим, что на D определен функционал $\Omega(z)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Функционал $\Omega(z)$ имеет на множестве D H -свойство, если для любой последовательности $\{z_n\} \subset D$ из ее слабой сходимости при $n \rightarrow \infty$ к некоторому пределу $z_0 \in D$, $z_n \rightharpoonup z_0$, и ее сходимости по функционалу (т.е. сходимости $\Omega(z_n) \rightarrow \Omega(z_0)$) следует сильная сходимость ($z_n \rightarrow z_0$).

Типичным примером функционала с H -свойством служит норма в гильбертовом пространстве, а также нормы в “пространствах с H -свойством” (см., например, [1]), в которых сходимости $z_n \rightharpoonup z_0$, $\|z_n\| \rightarrow \|z_0\|$ по определению порождают сильную сходимость $z_n \rightarrow z_0$ для каждой $\{z_n\} \subset Z$. В частности, H -свойство имеют пространства Лебега L_p , $p > 1$, и Соболева W_p^l , $p > 1$, $l \geq 1$, [2] и их нормы. Примеры функционалов с H -свойством в пространстве L_1 представлены в [3]. Из результатов этой работы (теоремы 2.5 и 3.2) следует, что интегральные функционалы вида

$$\Omega(z) = \int_0^1 f[z(x)] dx \quad (1.1)$$

обладают H -свойством на множестве $D_+ = \{z(x) \geq 0, \Omega(z) < \infty\}$ пространства $L_1[0, 1]$, если $f(z) \in C[0, +\infty) \cap C^2(0, +\infty)$, производная $f''(z) > 0$ монотонна при $z > 0$ и найдется такое число ρ , $0 \leq \rho < 1$, что $f''(z)z^\rho \geq \sigma = \text{const} > 0$ при всех $z > 0$. Можно привести и примеры функционалов, которые не имеют H -свойства. Так, в пространстве $L_2[0, 1]$ интегральный функционал вида (1.1) с $f(z) = |z|^2/(1 + |z|)$ не имеет H -свойства на всем пространстве. В этом легко убедиться, рассмотрев последовательность

$$z_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} \sin(n), & 0 \leq x \leq 1/n, \\ 0, & 1/n < x \leq 1. \end{cases}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00044.

Эта последовательность слабо сходится в $L_2[0, 1]$ к нулю и, как можно вычислить, сходится по функционалу (1.1): $\Omega(z_n) \rightarrow \Omega(0)$. Тем не менее, сильно к нулю она не сходится, так как $\|z_n - 0\|_{L_2}^2 = \sin^2(n)$. Заметим, что в этом примере $\Omega(z) \leq \|z\|_{L_2}^2$. Можно также привести пример функционала (1.1), удовлетворяющего неравенствам $k\|z\|_{L_2}^2 \leq \Omega(z) \leq \|z\|_{L_2}^2$, $k = \text{const} > 0$, но не имеющего H -свойства в $L_2[0, 1]$.

В связи с этим возникает вопрос: какие еще функционалы, кроме перечисленных, обладают H -свойством и как описать классы этих функционалов в конкретных пространствах (например, в пространствах Соболева). Этому и посвящена данная работа.

2. Усиленно выпуклые функционалы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Функционал $\Omega(z)$ называется *усиленно выпуклым* на выпуклом множестве D , $D \subset Z$, если для него существует определенный на $D \times D$ функционал $\Delta(z_1, z_2) \geq 0$, тождественно не равный нулю, такой, что

$$\frac{\Omega(z_1) + \Omega(z_2)}{2} \geq \Omega\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) + \Delta(z_1, z_2) \quad \forall z_1, z_2 \in D. \quad (2.1)$$

Заметим, что, если условие (2.1) выполнено с $\Delta(z_1, z_2) = \xi(\|z_1 - z_2\|)$, где $\xi(t)$ – непрерывная и монотонно возрастающая при $t \geq 0$ функция, $\xi(0) = 0$, то такой функционал Ω называется (*строго*) *равномерно выпуклым* на D (см., например, [4]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Будем говорить, что функционал $\Delta(z_1, z_2)$ имеет на множестве D *S-свойство*, если для любой последовательности $\{z_n\} \subset D$ из сходимостей $z_n \rightarrow z_0 \in D$, $\Delta(z_n, z_0) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ следует сильная сходимость $z_n \rightarrow z_0$.

ЛЕММА 2.3. *Предположим, что усиленно выпуклый на выпуклом множестве D функционал $\Omega(z)$ слабо полунепрерывен снизу на этом множестве и соответствующий функционал $\Delta(z_1, z_2)$ из определения 2.1 имеет S-свойство. Тогда функционал $\Omega(z)$ обладает H-свойством на D .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть произвольная последовательность $\{z_n\} \subset D$ слабо сходится к элементу $z_0 \in D$ и сходится к этому элементу по функционалу Ω . Тогда по определению слабой полунепрерывности снизу функционала $\Omega(z)$ получим предельное соотношение:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \Omega\left(\frac{z_n + z_0}{2}\right) \geq \Omega(z_0).$$

Применяя его вместе со сходимостью по функционалу: $\Omega(z_n) \rightarrow \Omega(z_0)$ в неравенстве (2.1), написанном для $z_1 = z_n$, $z_2 = z_0$, получим

$$\begin{aligned} \Omega(z_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\Omega(z_n) + \Omega(z_0)}{2} \right] \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\Omega\left(\frac{z_n + z_0}{2}\right) + \Delta(z_n, z_0) \right] \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \Omega\left(\frac{z_n + z_0}{2}\right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta(z_n, z_0) \geq \Omega(z_0) + \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta(z_n, z_0). \end{aligned}$$

Отсюда следует сходимость $\Delta(z_n, z_0) \rightarrow 0$. Из нее и из S -свойства функционала Δ получается сильная сходимость $z_n \rightarrow z_0$. Это доказывает, что функционал Ω имеет H -свойство.

Результат леммы 2.3 верен, например, для слабо полунепрерывных снизу и строго равномерно выпуклых функционалов, так как соответствующий функционал $\Delta(z_1, z_2) = \xi(\|z_1 - z_2\|)$ очевидно имеет S -свойство. Другие примеры приводятся ниже.

3. Усиленно выпуклые функционалы с H -свойством в пространствах Соболева. Везде далее будем считать, что Z – это пространство Соболева $W_p^l(T)$, $p > 1$, $l \geq 1$, функций $z(x)$, определенных в замкнутой ограниченной области $T \subset \mathbb{R}^N$ с достаточно гладкой границей (см. [2]), норма в котором задается равенством

$$\|z\| = \|z\|_{W_p^l} = \left\{ \sum_{0 \leq |\alpha| \leq l} \int_T |D^\alpha z(x)|^p dx \right\}^{1/p} = \left\{ \sum_{0 \leq |\alpha| \leq l} \|D^\alpha z\|_p^p \right\}^{1/p}. \quad (3.1)$$

Здесь

$$D^\alpha z(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} z}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_N = 0, 1, \dots,$$

а

$$\|z\|_p = \left\{ \int_T |z(x)|^p dx \right\}^{1/p}$$

– норма в пространстве $L_p(T)$. Число слагаемых в сумме (3.1) будем в дальнейшем обозначать как ν .

Предположим, что заданы линейные операторы вида

$$A_0 z(x) = z(x), \quad A_k z(x) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq l} a_{k\alpha} D^\alpha z(x), \quad k = 1, \dots, m,$$

с непрерывными в T коэффициентами $a_{k\alpha} = a_{k\alpha}(x)$. При этом считаем выполненным условие

$$\sum_{k=0}^m \|A_k z\|_p^p \geq c_0 \|z\|_{W_p^l}^p, \quad c_0 = \text{const} > 0, \quad z \in W_p^l(T). \quad (3.2)$$

Рассмотрим сначала функционалы специального вида, определенные на заданном выпуклом множестве $D \subset W_p^l(T)$ и имеющие форму

$$\overline{\Omega}(z) = \overline{\Omega}[z(x)] = \int_T f(x, |A_0 z(x)|, |A_1 z(x)|, \dots, |A_m z(x)|) dx, \quad z(x) \in D. \quad (3.3)$$

В дальнейшем будем предполагать, что производящая функция $f(x, y) = f(x, y_0, y_1, \dots, y_m)$ этого функционала имеет следующие свойства:

- а) она определена и непрерывна при $x \in T$, $y = (y_0, y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}_+^{m+1} = \{y_0 \geq 0, y_1 \geq 0, \dots, y_m \geq 0\}$;
- б) она не убывает по каждой переменной y_k , $k = 0, \dots, m$, при фиксированных других переменных, имеющих допустимые значения;
- в) она выпукла по y в $\mathbb{R}_+^{m+1}$ при каждом $x \in T$.

Заметим, что из а)–в) следует ограниченность этой функции снизу. Поэтому без ущерба для общности будем считать, что $f(x, y) \geq 0$.

ЛЕММА 3.1. Если производящая функция $f(x, y)$ имеет свойства а)–в), то функционал (3.3) слабо полунепрерывен снизу на выпуклом множестве $D \subset W_p^l(T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, отметим, что функция $f(x, |y|) = f(x, |y_0|, |y_1|, \dots, |y_m|)$ в силу условий а)–в) будет непрерывной и выпуклой по y в $\mathbb{R}^{m+1}$ при каждом $x \in T$. Поэтому на множестве D выполнено условие выпуклости функционала (3.3)

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\Omega}(z_1) + \overline{\Omega}(z_2)}{2} &= \int_T \left(\frac{f(x, |z_1(x)|, |A_1 z_1(x)|, \dots, |A_m z_1(x)|)}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{f(x, |z_2(x)|, |A_1 z_2(x)|, \dots, |A_m z_2(x)|)}{2} \right) dx \\ &\geq \int_T f \left(x, \left| \frac{z_1(x) + z_2(x)}{2} \right|, \left| A_1 \left(\frac{z_1(x) + z_2(x)}{2} \right) \right|, \dots, \right. \\ &\quad \left. \left| A_m \left(\frac{z_1(x) + z_2(x)}{2} \right) \right| \right) dx \\ &= \overline{\Omega} \left(\frac{z_1 + z_2}{2} \right) \quad \forall z_1, z_2 \in D \end{aligned} \quad (3.4)$$

и, кроме того, $\overline{\Omega}(z) \geq 0$. Докажем теперь сильную полунепрерывность снизу этого функционала на множестве D пространства $W_p^l(T)$. Возьмем любую последовательность $\{z_n\} \subset D$ такую, что $z_n \rightarrow z_0 \in D$ при $n \rightarrow \infty$. Если при этом

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \overline{\Omega}(z_n) = +\infty,$$

то

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \overline{\Omega}(z_n) \geq \overline{\Omega}(z_0),$$

и условие сильной полунепрерывности снизу выполнено. Если же предел

$$s = \liminf_{n \rightarrow \infty} \overline{\Omega}(z_n)$$

конечен, то найдется такая подпоследовательность $\{z_{n_i}\} \subset \{z_n\}$, для которой

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \overline{\Omega}(z_{n_i}) = s$$

и, кроме того, $z_{n_i} \rightarrow z_0$, $D^\alpha z_{n_i} \rightarrow D^\alpha z_0 \quad \forall \alpha, |\alpha| = 1, \dots, l$, почти всюду в T . Последние две сходимости можно обеспечить, так как из условия $\|z_n - z_0\|_{W_p^l} \rightarrow 0$ следует, что $D^\alpha z_n \rightarrow D^\alpha z_0$ сильно в $L_p(T)$ при каждом $\alpha, |\alpha| = 0, 1, \dots, l$. Таким образом, почти всюду в T имеется сходимость

$$f(x, |z_{n_i}(x)|, |A_1 z_{n_i}(x)|, \dots, |A_m z_{n_i}(x)|) \rightarrow f(x, |z_0(x)|, |A_1 z_0(x)|, \dots, |A_m z_0(x)|).$$

Отсюда и из ограниченности последовательности $\{\overline{\Omega}(z_{n_i})\}$ по лемме Фату получим

$$\begin{aligned} \overline{\Omega}(z_0) &= \int_T f(x, |z_0(x)|, |A_1 z_0(x)|, \dots, |A_m z_0(x)|) dx \\ &\leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_T f(x, |z_{n_i}(x)|, |A_1 z_{n_i}(x)|, \dots, |A_m z_{n_i}(x)|) dx \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \overline{\Omega}(z_{n_i}) = \liminf_{i \rightarrow \infty} \overline{\Omega}(z_n), \end{aligned}$$

т.е. и в этом случае выполнено условие сильной полунепрерывности снизу функционала (3.3). В заключение заметим, что слабая полунепрерывность снизу этого функционала вытекает из его сильной полунепрерывности снизу и выпуклости на D [4].

ТЕОРЕМА 3.2. *Предположим, что производящая функция $f(x, y)$ функционала (3.3) обладает свойствами а), б) и, кроме того, усиленно выпукла в следующем смысле:*

$$\frac{f(x, |u|) + f(x, |v|)}{2} \geq f\left(x, \left|\frac{u+v}{2}\right|\right) + \kappa \sum_{k=0}^m ||u_k| - |v_k||^p \quad (3.5)$$

$$\forall x \in T, \quad u, v \in \mathbb{R}^{m+1}, \quad \kappa = \text{const} > 0.$$

Тогда соответствующий функционал (3.3) имеет H -свойство на множестве D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для функционала (3.3) из условия (3.5) с $u_k = A_k z_1(x)$, $v_k = A_k z_2(x)$ $\forall z_1, z_2 \in D$ по аналогии с (3.4) получается оценка (2.1), в которой

$$\Delta(z_1, z_2) = \kappa \sum_{k=0}^m \int_T ||A_k z_1(x)| - |A_k z_2(x)||^p dx.$$

Поэтому функционал (3.3) оказывается усиленно выпуклым. Покажем, что такой функционал $\Delta(z_1, z_2)$ имеет на D S -свойство. Возьмем любую последовательность $\{z_n\} \subset D$, для которой

$$z_n \xrightarrow{W_p^l} z_0 \in D \quad \text{и} \quad \Delta(z_n, z_0) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Тогда из вида функционала Δ следует

$$\|A_k z_n\|_p \rightarrow \|A_k z_0\|_p \quad \forall k.$$

Из слабой сходимости $z_n \rightharpoonup z_0$ в W_p^l вытекают слабые сходимости

$$D^\alpha z_n \xrightarrow{L_p} D^\alpha z_0 \quad \forall \alpha, \quad 0 \leq |\alpha| \leq l,$$

и, далее, $A_k z_n \xrightarrow{L_p} A_k z_0$. Тогда из H -свойства пространства L_p следует соотношение $A_k z_n \xrightarrow{L_p} A_k z_0$. Оно вместе с вытекающей из условия (3.2) оценкой

$$\sum_{k=0}^m \|A_k z_n - A_k z_0\|_p^p \geq c_0 \|z_n - z_0\|_{W_p^l}^p$$

приводит к сильной сходимости $z_n \rightarrow z_0$ в W_p^l . Таким образом, получилось, что из сходимостей $z_n \rightharpoonup z_0$, $\Delta(z_n, z_0) \rightarrow 0$ следует сильная сходимость $z_n \rightarrow z_0$. Это означает выполнение S -свойства для $\Delta(z_1, z_2)$. Так как по условиям теоремы производящая функция $f(x, y)$ имеет свойства а), б) и вытекающее из (3.5) свойство в), то по лемме 3.1 усиленно выпуклый функционал (3.3) будет слабо полунепрерывным снизу. В итоге, по лемме 2.3 он будет иметь на D H -свойство.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Если в теореме 3.2 заменить в условии (3.5) член $\sum_{k=0}^m ||u_k| - |v_k||^p$ на $\sum_{k=0}^m |u_k - v_k|^p$, то соответствующий функционал (3.3) также будет усиленно выпуклым на D , а точнее, строго равномерно выпуклым. Для него остается справедливым результат теоремы 3.2.

Проиллюстрируем применение теоремы 3.2 на простом примере. Известно, что пространство $W_p^l(T)$ имеет H -свойство при $p > 1$, $l \geq 1$, т.е. в нем из слабой сходимости $z_n \rightharpoonup z_0$ и сходимости норм $\|z_n\| \rightarrow \|z_0\|$ всегда вытекает сильная сходимость $z_n \rightarrow z_0$. При $p \geq 2$ это следует также и из теоремы 3.2. Действительно, пусть $\Omega(z) = \|z\|_{W_p^l}^p$ и $p \geq 2$. Учитывая вид производящей функции $f(x, y) = f(y) = |y_0|^p + |y_1|^p + \dots + |y_\nu|^p$ этого функционала (см. (3.1)) и используя числовое неравенство

$$\frac{|s_1|^p + |s_2|^p}{2} \geq \left| \frac{s_1 + s_2}{2} \right|^p + \kappa |s_1 - s_2|^p \quad \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}, \quad \kappa = \frac{\min\{1, 2^{3-p}\}}{8}, \quad p \geq 2, \quad (3.6)$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{f(u) + f(v)}{2} &= \sum_{k=0}^{\nu} \frac{|u_k|^p + |v_k|^p}{2} \geq \sum_{k=0}^{\nu} \left| \frac{u_k + v_k}{2} \right|^p + \kappa \sum_{k=0}^{\nu} |u_k - v_k|^p \\ &\geq f\left(\frac{u+v}{2}\right) + \kappa \sum_{k=0}^{\nu} ||u_k| - |v_k||^p \quad \forall u = (u_0, \dots, u_\nu), \quad v = (v_0, \dots, v_\nu). \end{aligned}$$

Отсюда следует условие (3.5) теоремы 3.2. Эта теорема гарантирует, что усиленно (строго равномерно) выпуклый при $p \geq 2$ функционал $\|z\|_{W_p^l}^p$ имеет H -свойство на всем пространстве $W_p^l(T)$.

Однако условие (3.5) и, в частности, свойство строгой равномерной выпуклости функционалов, часто не выполнено даже в простейших случаях. Например, тот же функционал $\|z\|_{W_p^l}^p$ при $1 < p < 2$ уже не будет строго равномерно выпуклым на всем пространстве $W_p^l(T)$. Это доказывается как в [4, с. 217] и вытекает из того факта, что неравенства типа (3.6) при $1 < p < 2$ на всем множестве $\mathbb{R}$ не выполняются. Как следствие, теорема 3.2 и замечание 3.3 не дают ответа на вопрос об H -свойстве нормы в $W_p^l(T)$ в этом случае. Тем не менее, пространство $W_p^l(T)$, а, значит, и функционал $\|z\|_{W_p^l}^p$, все же имеет H -свойство в случае $1 < p < 2$, $l \geq 1$.

В оставшейся части этого пункта будут исследоваться классы функционалов общего вида в $W_p^l(T)$. При этом для более подробного рассмотрения случая $1 < p < 2$ введем величину

$$\begin{aligned} \Delta_{lp}(z_1, z_2) &= \sum_{0 \leq |\alpha| \leq l} \int_T (|D^\alpha z_1(x)|^{2-p} + |D^\alpha z_2(x)|^{2-p}) \\ &\quad \times (|D^\alpha z_2(x)|^{p-1} - |D^\alpha z_1(x)|^{p-1})^2 dx \\ &= \sum_{0 \leq |\alpha| \leq l} \Delta_p(D^\alpha z_1(x), D^\alpha z_2(x)). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Изучим ее.

ЛЕММА 3.4. Функционал $\Delta_{lp}(z_1(x), z_2(x))$ определен для любых функций $z_1(x), z_2(x) \in W_p^l(T)$ при $1 < p < 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функционал (3.7) состоит из однотипных слагаемых, построенных с помощью величины

$$\Delta_p(z_1, z_2) = \int_T (|z_1(x)|^{2-p} + |z_2(x)|^{2-p}) (|z_2(x)|^{p-1} - |z_1(x)|^{p-1})^2 dx,$$

в которой фигурируют элементы $z_1(x), z_2(x)$ и $D^\alpha z_1(x), D^\alpha z_2(x)$ пространства $L_p(T)$. Поэтому достаточно доказать конечность величины $\Delta_p(z_1, z_2)$ в $L_p(T)$. При исследовании на минимум функции

$$\zeta(t) = \frac{|t|^p + 1}{2} - \left| \frac{t+1}{2} \right|^p - \kappa(|t|^{2-p} + 1)(|t|^{p-1} - 1)^2, \quad \kappa = \frac{p(p-1)}{16}, \quad 1 < p < 2,$$

оказывается, что $\zeta(t) \geq \zeta_{\min} = \zeta(1) = 0$. Приняв $t = s_1/s_2$, $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, получим числовое неравенство

$$\frac{|s_1|^p + |s_2|^p}{2} \geq \left| \frac{s_1 + s_2}{2} \right|^p + \kappa(|s_1|^{2-p} + |s_2|^{2-p})(|s_2|^{p-1} - |s_1|^{p-1})^2. \quad (3.8)$$

Используя его с заменой s_1, s_2 на функции $z_1(x), z_2(x) \in L_p(T)$, $1 < p < 2$, и интегрируя по x , получим по свойствам интеграла Лебега

$$\begin{aligned} \frac{\|z_1\|_p^p + \|z_2\|_p^p}{2} &\geq \left\| \frac{z_1 + z_2}{2} \right\|_p^p \\ &\quad + \kappa \int_T (|z_1(x)|^{2-p} + |z_2(x)|^{2-p}) (|z_2(x)|^{p-1} - |z_1(x)|^{p-1})^2 dx \\ &= \left\| \frac{z_1 + z_2}{2} \right\|_p^p + \kappa \Delta_p(z_1, z_2). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Отсюда и следует конечность величины $\Delta_p(z_1, z_2)$.

ЛЕММА 3.5. Пусть $1 < p < 2$. Предположим, что для последовательности $\{z_n\} \subset L_p(T)$ и для элемента $z_0 \in L_p(T)$ выполнено предельное соотношение $\Delta_p(z_n, z_0) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Тогда имеют место сходимости

$$\|z_n\|_p \rightarrow \|z_0\|_p, \quad \int_T |z_n(x)|^p - |z_0(x)|^p dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем известное числовое неравенство

$$||s_2|^p - |s_1|^p| \leq \frac{p}{p-1} (|s_2| + |s_1|) ||s_2|^{p-1} - |s_1|^{p-1}| \quad \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}, \quad 1 < p < 2,$$

для получения оценки

$$\begin{aligned} ||z_n(x)|_p^p - |z_0(x)|_p^p| &= \left| \int_T (|z_n(x)|^p - |z_0(x)|^p) dx \right| \leq \int_T ||z_n(x)|^p - |z_0(x)|^p| dx \\ &\leq \frac{p}{p-1} \int_T (|z_n(x)| + |z_0(x)|) ||z_n(x)|^{p-1} - |z_0(x)|^{p-1}| dx. \end{aligned}$$

Применяя в ней справа неравенство Коши–Буняковского, получим

$$\begin{aligned}
 & \left| \|z_n(x)\|_p^p - \|z_0(x)\|_p^p \right| \leq \int_T \left| |z_n(x)|^p - |z_0(x)|^p \right| dx \\
 & \leq \frac{p}{p-1} \left\{ \left[\int_T |z_n(x)|^{2(1-p/2)} (|z_n(x)|^{p-1} - |z_0(x)|^{p-1})^2 dx \right]^{1/2} \left[\int_T |z_n(x)|^{2(p/2)} dx \right]^{1/2} \right. \\
 & \quad \left. + \left[\int_T |z_0(x)|^{2(1-p/2)} (|z_n(x)|^{p-1} - |z_0(x)|^{p-1})^2 dx \right]^{1/2} \left[\int_T |z_0(x)|^{2(p/2)} dx \right]^{1/2} \right\} \\
 & \leq \frac{p}{p-1} \left[\int_T (|z_n(x)|^{2-p} + |z_0(x)|^{2-p}) (|z_n(x)|^{p-1} - |z_0(x)|^{p-1})^2 dx \right]^{1/2} \\
 & \quad \times \left\{ \left[\int_T |z_n(x)|^p dx \right]^{1/2} + \left[\int_T |z_0(x)|^p dx \right]^{1/2} \right\} \\
 & = \frac{p}{p-1} (\|z_n(x)\|_p^{p/2} + \|z_0(x)\|_p^{p/2}) \Delta_p^{1/2}(z_n, z_0). \tag{3.10}
 \end{aligned}$$

Отсюда и из условия леммы следует, что

$$\left| \|z_n(x)\|_p^{p/2} - \|z_0(x)\|_p^{p/2} \right| \leq \frac{p}{p-1} \Delta_p^{1/2}(z_n, z_0) \rightarrow 0, \tag{3.11}$$

т.е., что $\|z_n\|_p \rightarrow \|z_0\|_p$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда из (3.10) и (3.11) получается и другая доказываемая сходимость:

$$\int_T \left| |z_n(x)|^p - |z_0(x)|^p \right| dx \rightarrow 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 3.6. Если для последовательности $\{z_n\} \subset W_p^l(T)$, $1 < p < 2$, и для элемента $z_0 \in W_p^l(T)$ выполнено предельное соотношение $\Delta_{lp}(z_n, z_0) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, то справедливо неравенство

$$\left| \|z_n\|_{W_p^l}^{p/2} - \|z_0\|_{W_p^l}^{p/2} \right| \leq \frac{p\sqrt{p}}{p-1} \Delta_{lp}^{1/2}(z_n, z_0), \tag{3.12}$$

из которого следует, что $\|z_n\|_{W_p^l} \rightarrow \|z_0\|_{W_p^l}$. Кроме того,

$$\int_T \left| |z_n(x)|^p - |z_0(x)|^p \right| dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Действительно, нетрудно убедиться, что выполнено неравенство

$$\begin{aligned}
 \left| \|z_n\|_{W_p^l}^{p/2} - \|z_0\|_{W_p^l}^{p/2} \right| &= \left| \sqrt{\sum_{0 \leq |\alpha| \leq l} \|D^\alpha z_n\|_p^p} - \sqrt{\sum_{0 \leq |\alpha| \leq l} \|D^\alpha z_0\|_p^p} \right| \\
 &\leq \sum_{0 \leq |\alpha| \leq l} \left| \|D^\alpha z_n\|_p^{p/2} - \|D^\alpha z_0\|_p^{p/2} \right|.
 \end{aligned}$$

Продолжая оценивать его правую часть, применяя при этом аналоги полученной выше оценки (3.11) и неравенство Коши–Буняковского, получим

$$\begin{aligned} \left| \|z_n\|_{W_p^l}^{p/2} - \|z_0\|_{W_p^l}^{p/2} \right| &\leq \frac{p}{p-1} \sum_{0 \leq |\alpha| \leq l} \Delta_p^{1/2}(D^\alpha z_n, D^\alpha z_0) \\ &\leq \frac{p\sqrt{\nu}}{p-1} \left\{ \sum_{0 \leq |\alpha| \leq l} \Delta_p(D^\alpha z_n, D^\alpha z_0) \right\}^{1/2} = \frac{p\sqrt{\nu}}{p-1} \Delta_{lp}^{1/2}(z_n, z_0) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Это доказывает требуемую сходимость норм при $n \rightarrow \infty$. Вторая доказываемая сходимость получается из леммы 3.5.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.7. Функционал общего вида Ω называется *квазиравномерно выпуклым* на выпуклом множестве $D \subset W_p^l(T)$, $1 < p < 2$, если существует непрерывная и монотонно возрастающая при $t \geq 0$ функция $\xi(t)$, $\xi(0) = 0$, такая, что

$$\frac{\Omega(z_1) + \Omega(z_2)}{2} \geq \Omega\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) + \xi[\Delta_{lp}(z_1, z_2)] \quad \forall z_1, z_2 \in D. \quad (3.13)$$

Примером квазиравномерно выпуклого функционала на всем пространстве $W_p^l(T)$, $1 < p < 2$, будет $\Omega(z) = \|z\|_{W_p^l}^p$. Это устанавливается по той же схеме, что и строгая равномерная выпуклость нормы при $p \geq 2$. Действительно, производящая функция $f(x, y) = f(y) = |y_0|^p + |y_1|^p + \dots + |y_\nu|^p$ такого функционала в силу неравенства (3.8) обладает свойством

$$\frac{f(u) + f(v)}{2} \geq f\left(\frac{u+v}{2}\right) + \kappa \sum_{k=0}^{\nu} (|u_k|^{2-p} + |v_k|^{2-p}) (|u_k|^{p-1} - |v_k|^{p-1})^2 \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^{\nu+1}.$$

Отсюда и из определения (3.1) нормы получим условие квазиравномерной выпуклости с $\xi(t) = \kappa t$:

$$\begin{aligned} \frac{\|z_1\|_{W_p^l}^p + \|z_2\|_{W_p^l}^p}{2} &= \sum_{0 \leq |\alpha| \leq l} \int_T \frac{|D^\alpha z_1(x)|^p + |D^\alpha z_2(x)|^p}{2} dx \\ &\geq \sum_{0 \leq |\alpha| \leq l} \int_T \left| D^\alpha \left(\frac{z_1 + z_2}{2} \right) \right|^p dx \\ &\quad + \kappa \sum_{0 \leq |\alpha| \leq l} \int_T (|D^\alpha z_1|^{2-p} + |D^\alpha z_2|^{2-p}) (|D^\alpha z_1|^{p-1} - |D^\alpha z_2|^{p-1})^2 dx \\ &= \left\| \frac{z_1 + z_2}{2} \right\|_{W_p^l}^p + \kappa \Delta_{lp}(z_1, z_2). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3.8. Если функционал общего вида Ω является квазиравномерно выпуклым и слабо полунепрерывным снизу на выпуклом множестве D , то он обладает на D H -свойством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Квазиравномерная выпуклость функционала Ω есть частный случай усиленной выпуклости (см. определение 2.1) с $\Delta(z_1, z_2) = \xi[\Delta_{lp}(z_1, z_2)]$. Пусть для произвольной последовательности $\{z_n\} \subset D$ выполнены соотношения

$$z_n \rightarrow z_0 \in D, \quad \Delta(z_n, z_0) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Тогда из свойств функции $\xi(t)$ получим

$$\Delta_{lp}(z_n, z_0) = \xi^{-1}[\Delta(z_n, z_0)] \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Поэтому в силу (3.12) $\|z_n\|_{W_p^l} \rightarrow \|z_0\|_{W_p^l}$. Из слабой сходимости последовательности и из доказанной сходимости норм в силу H -свойства пространства $W_p^l(T)$ получается сильная сходимость $z_n \rightarrow z_0$. Таким образом, функционал $\Delta(z_1, z_2) = \xi[\Delta_{lp}(z_1, z_2)]$ имеет по терминологии п. 2 S -свойство. Но тогда по лемме 2.3 функционал Ω будет обладать на множестве D H -свойством.

Введем более общие классы усиленно выпуклых функционалов, связанных с фиксированными операторами $A_k z(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.9. Функционал $\Omega(z)$ называется *обобщенно равномерно выпуклым* на выпуклом множестве D , $D \subset W_p^l(T)$, если существует такая непрерывная и возрастающая при $t \geq 0$ функция $\xi(t)$, $\xi(0) = 0$, и непрерывная, возрастающая при $s \geq 0$ функция $\varphi(s)$, что для любых $z_1, z_2 \in D$ выполнено неравенство

$$\frac{\Omega(z_1) + \Omega(z_2)}{2} \geq \Omega\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) + \xi(\Phi(z_1, z_2)), \quad (3.14)$$

где

$$\Phi(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^m \int_T |\varphi(|A_k z_1|) - \varphi(|A_k z_2|)|^p dx.$$

Функционал Ω называется *обобщенно квазиравномерно выпуклым* на выпуклом множестве $D \subset W_p^l(T)$, $1 < p < 2$, если вместо (3.14) выполнено соотношение

$$\frac{\Omega(z_1) + \Omega(z_2)}{2} \geq \Omega\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) + \xi(\Psi(z_1, z_2)) \quad \forall z_1, z_2 \in D, \quad (3.15)$$

в котором

$$\Psi(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^m \Delta_p[\varphi(|A_k z_1|), \varphi(|A_k z_2|)].$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.10. Пусть множество D содержит некоторую функцию $\tilde{z}(x)$, для которой $\varphi(|A_k \tilde{z}(x)|) \in L_p(T)$, $0 \leq k \leq m$. Тогда условия (3.14) или (3.15) порождают включение $\varphi(|A_k z(x)|) \in L_p(T)$ для любой $z(x) \in D$. Действительно, из (3.14) следует

$$\begin{aligned} \Phi(z, \tilde{z}) &= \sum_{k=0}^m \int_T |\varphi(|A_k z|) - \varphi(|A_k \tilde{z}|)|^p dx \\ &\leq \xi^{-1} \left[\frac{\Omega(z) + \Omega(\tilde{z})}{2} - \Omega\left(\frac{z + \tilde{z}}{2}\right) \right] < +\infty \quad \forall z(x) \in D \subset W_p^l(T), \end{aligned}$$

т.е. функция $\varphi(|A_k z(x)|) - \varphi(|A_k \tilde{z}(x)|)$, а, значит, и $\varphi(|A_k z(x)|)$, принадлежит $L_p(T)$, $0 \leq k \leq m$. Если же выполнено (3.15), то по аналогии с неравенством (3.11), заменяя в нем величины $z_n(x), z_0(x)$ на $\varphi(|A_k z(x)|), \varphi(|A_k \tilde{z}(x)|)$ и проводя оценку как в доказательстве следствия 3.6, получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \left| \left\| \varphi(|A_k z|) \right\|_p^{p/2} - \left\| \varphi(|A_k \tilde{z}|) \right\|_p^{p/2} \right| &\leq \frac{p\sqrt{m}}{p-1} \left\{ \sum_{k=0}^m \Delta_p[\varphi(|A_k z_1|), \varphi(|A_k z_2|)] \right\}^{1/2} \\ &= \frac{p\sqrt{m}}{p-1} \Psi^{1/2}(z, \tilde{z}) \leq \frac{p\sqrt{m}}{p-1} \left\{ \xi^{-1} \left[\frac{\Omega(z) + \Omega(\tilde{z})}{2} - \Omega\left(\frac{z + \tilde{z}}{2}\right) \right] \right\}^{1/2} < +\infty, \end{aligned}$$

и это снова доказывает включение $\varphi(|A_k z(x)|) \in L_p(T)$, $0 \leq k \leq m$.

ЛЕММА 3.11. *Предположим, что для функции $\varphi(s)$, непрерывной и монотонно возрастающей при $s \geq 0$, выполнены неравенства*

$$\varphi(s) \geq 0, \quad \varphi(s) \geq a + bs \quad \forall s \geq 0,$$

где a, b – некоторые константы, причем $b > 0$. Пусть, далее, последовательность $\{z_n(x)\} \subset D$ и элемент $z_0(x) \in D$ таковы, что $\varphi(|z_n(x)|) \in L_p(T)$ и $\varphi(|z_0(x)|) \in L_p(T)$. Тогда

1) если имеет место сходимость

$$\left\| \varphi(|z_n(x)|) - \varphi(|z_0(x)|) \right\|_p \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

$$\text{то } \|z_n\|_p \rightarrow \|z_0\|_p;$$

2) если при $1 < p < 2$ справедливо предельное соотношение

$$\Delta_p[\varphi(|z_n(x)|), \varphi(|z_0(x)|)] \rightarrow 0,$$

$$\text{то также } \|z_n\|_p \rightarrow \|z_0\|_p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В первом случае

$$\left\| \varphi(|z_n(x)|) - \varphi(|z_0(x)|) \right\|_p \rightarrow 0,$$

т.е.

$$v_n(x) = |v_n(x)| = \varphi(|z_n(x)|) \xrightarrow{L_p} \varphi(|z_0(x)|) = |v_0(x)| = v_0(x) \in L_p(T).$$

Исследуем предельное соотношение между функциями $|z_n(x)| = \varphi^{-1}(|v_n(x)|)$ и $|z_0(x)| = \varphi^{-1}(|v_0(x)|)$ при $n \rightarrow \infty$. По условиям на функцию $v = \varphi(s)$ получим

$$0 \leq s = \varphi^{-1}(v) = \varphi^{-1}(|v|) \leq a_0 + b_0 v = a_0 + b_0 |v|,$$

где $a_0 = -a/b$, $b_0 = 1/b$. Таким образом, $|\varphi^{-1}(|v|)| \leq a_0 + b_0 |v|$. Это условие согласно результатам из [5, с. 204], [6, с. 312] гарантирует, что оператор $\varphi^{-1}[\cdot]$, который действует по правилу $|z(x)| = \varphi^{-1}[|v(x)|]$ на элементы $v(x)$ пространства $L_p(T)$, будет непрерывным из L_p в L_p . Следовательно,

$$|z_n(x)| = \varphi^{-1}[|v_n(x)|] \xrightarrow{L_p} \varphi^{-1}[|v_0(x)|] = |z_0(x)|,$$

откуда и получается сходимость норм $\|z_n\|_p \rightarrow \|z_0\|_p$. Во втором случае, применяя лемму 3.5 с заменой в ней функций $z_n = z_n(x)$, $z_0 = z_0(x)$ на $\varphi(|z_n(x)|)$, $\varphi(|z_0(x)|)$ соответственно и учитывая условие $\varphi(s) \geq 0$, получим

$$\int_T |\varphi^p(|z_n(x)|) - \varphi^p(|z_0(x)|)| dx \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Это значит, что

$$w_n(x) = \varphi^p(|z_n|) \xrightarrow{L_1} \varphi^p(|z_0|) = w_0(x) \in L_1(T).$$

Используем далее тот факт, что оператор возведения в степень $v(x) = |w(x)|^{1/p}$ непрерывен из L_1 в L_p , как это следует из [5, с. 204], [6, с. 312]. Поэтому

$$v_n(x) = \varphi(|z_n(x)|) = |\varphi^p(|z_n(x)|)|^{1/p} \xrightarrow{L_p} |\varphi^p(|z_0(x)|)|^{1/p} = \varphi(|z_0(x)|) = v_0(x).$$

Дальнейшие рассуждения, использующие условия $\varphi(s) \geq 0$, $\varphi(s) \geq a + bs$, проводятся аналогично доказательству первой части этой леммы и снова дают сходимость $\|z_n\|_p \rightarrow \|z_0\|_p$.

ТЕОРЕМА 3.12. *Предположим, что для функции $\varphi(s)$, включенной в определение 3.9, выполнены условия*

$$\varphi(s) \geq 0, \quad \varphi(s) \geq a + bs \quad \forall s \geq 0, \quad a, b = \text{const}, \quad b > 0.$$

Пусть, далее, выпуклое множество D , $D \subset W_p^l(T)$, содержит такую функцию $\tilde{z}(x)$, что $\varphi(|A_k \tilde{z}|) \in L_p(T)$ при всех $k = 0, \dots, t$ (например, $\tilde{z}(x) = C_0 = \text{const} \in D$), а функционал $\Omega(z)$ слабо полунепрерывен снизу на D . Тогда

- 1) *если функционал $\Omega(z)$ является обобщенно равномерно выпуклым на множестве D , то он обладает H -свойством;*
- 2) *если же функционал $\Omega(z)$ обобщенно квазиравномерно выпуклый на выпуклом множестве $D \subset W_p^l(T)$, $1 < p < 2$, то он также имеет H -свойство.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обобщенная равномерная выпуклость есть вариант усиленной выпуклости функционала $\Omega(z)$ с $\Delta(z_1, z_2) = \xi[\Phi(z_1, z_2)]$. Возьмем произвольную последовательность $\{z_n\} \subset D$ со свойствами $z_n \rightarrow z_0 \in D$ и $\xi[\Phi(z_n, z_0)] \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$\sum_{k=0}^m \int_T |\varphi(|A_k z_n|) - \varphi(|A_k z_0|)|^p dx \rightarrow 0$$

и, значит, по лемме 3.11 (с учетом замечания 3.10)

$$\|A_k z_n\|_p \rightarrow \|A_k z_0\|_p \quad \forall k \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Далее, повторяя буквально соответствующую часть доказательства теоремы 3.2, получим из этой сходимости норм, что $z_n \rightarrow z_0$ в $W_p^l(T)$, и это означает выполнение S -свойства для функционала $\Delta(z_1, z_2) = \xi[\Phi(z_1, z_2)]$. По лемме 2.3 обобщенно равномерно выпуклый и слабо полунепрерывный снизу на D функционал $\Omega(z)$ будет тогда обладать H -свойством. Пусть теперь $\Omega(z)$ – обобщенно квазиравномерно выпуклый на множестве $D \subset W_p^l(T)$, $1 < p < 2$, функционал. Тогда он усиленно выпуклый с $\Delta(z_1, z_2) = \xi[\Psi(z_1, z_2)]$. Выбрав снова произвольную последовательность, для которой $z_n \rightarrow z_0 \in D$ и $\xi[\Psi(z_n, z_0)] \rightarrow 0$, получим $\Psi(z_n, z_0) \rightarrow 0$, т.е. $\Delta_p[\varphi(|A_k z_n|), \varphi(|A_k z_0|)] \rightarrow 0$. Тогда по лемме 3.11 $\|A_k z_n\|_p \rightarrow \|A_k z_0\|_p$ для всех k . Дальнейшее доказательство проводится как для случая обобщенной равномерной выпуклости.

4. Достаточные условия усиленной выпуклости функционалов в пространствах Соболева. Обратимся снова к функционалам вида (3.3). Для того чтобы они были обобщенно равномерно выпуклы или обобщенно квазиравномерно выпуклы на выпуклом множестве $D \subset W_p^l(T)$, достаточно, например, потребовать для производящей функции $f(x, y) = f(x, y_0, y_1, \dots, y_m)$ выполнение условий а) и б), а также выполнения одного из следующих неравенств:

$$\frac{f(x, |u|) + f(x, |v|)}{2} \geq f\left(x, \left|\frac{u+v}{2}\right|\right) + \kappa \sum_{k=0}^m |\varphi(|u_k|) - \varphi(|v_k|)|^p \quad (4.1)$$

$$\forall x \in T, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^{m+1}, \quad \kappa = \text{const} > 0, \quad p > 1,$$

$$\begin{aligned} \frac{f(x, |u|) + f(x, |v|)}{2} \geq f\left(x, \left|\frac{u+v}{2}\right|\right) + \kappa \sum_{k=0}^m (\varphi^{2-p}(|u_k|) + \varphi^{2-p}(|v_k|)) \\ \times (\varphi^{p-1}(|u_k|) - \varphi^{p-1}(|v_k|))^2, \quad 1 < p < 2, \end{aligned} \quad (4.2)$$

с функцией $\varphi(s)$, которая удовлетворяет требованиям из определения 3.9 и условиям леммы 3.11 (теоремы 3.12). Тогда, с одной стороны, функция $f(x, y)$ будет подчиняться условиям а)–в) и, значит, по лемме 3.1 соответствующий функционал (3.3) будет слабо полунепрерывным снизу. С другой стороны, для такого функционала (3.3) будет выполнено неравенство (3.14) или (3.15) с $\xi(t) = \kappa t$. В этом нетрудно убедиться по аналогии с доказательством теоремы 3.2 с заменой там условия (3.5) на (4.1) или (4.2). Значит, по теореме 3.12 такой функционал (3.3) будет иметь H -свойство. При $\varphi(s) = s$ неравенства (4.1) и (4.2) аналогично обеспечивают строгую равномерную и квазиравномерную выпуклость функционала (3.3) соответственно и по теоремам 3.2, 3.8 – его H -свойство.

Интерес, однако, представляют более детальные достаточные условия на производящие функции для выполнения H -свойства функционалов, чем просто неравенства (4.1), (4.2). Такие условия можно получить для функционалов (3.3) специального вида

$$\widehat{\Omega}(z) = \int_T f(x, \varphi^p(|z(x)|), \varphi^p(|A_1 z(x)|), \dots, \varphi^p(|A_m z(x)|)) dx, \quad (4.3)$$

определенных на выпуклом множестве $D \subset W_p^l(T)$.

ТЕОРЕМА 4.1. *Предположим, что*

- 1) *функция $f(x, y) \geq 0$ определена при $x \in T$, $y = (y_0, y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}_+^{m+1}$ и непрерывна там;*
- 2) *она дифференцируема по y при каждом $x \in T$, причем $f'_{y_i}(x, y) \geq \gamma = \text{const} > 0$, $i = 0, 1, \dots, m$, $\forall (x, y) \in T \times \mathbb{R}_+^{m+1}$;*
- 3) *она выпукла по y в $\mathbb{R}_+^{m+1}$ при каждом $x \in T$;*
- 4) *функция $\varphi(s)$ непрерывна, неотрицательна, монотонно возрастает и выпукла при $s \geq 0$.*

Тогда функционал (4.3) является обобщенно квазиравномерно выпуклым при $1 < p < 2$ и обобщенно равномерно выпуклым при $p \geq 2$ на D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, например, $p \geq 2$. Тогда, используя выпуклость функции $f(x, y)$ по переменным y , монотонность функции $f(x, y) = f(x, y_0, y_1, \dots, y_m)$ по аргументам y_k , $k = 0, 1, \dots, m$, вытекающую из условия 2), применяя неравенство типа (3.6) с заменой в нем чисел s_1, s_2 на $\varphi^p(|u_k|)$ и $\varphi^p(|v_k|)$, $k = 0, 1, \dots, m$, обозначая

$\varphi^p(|u|) = (\varphi^p(|u_0|), \dots, \varphi^p(|u_m|))$ и используя формулу конечных приращений, получим

$$\begin{aligned} \frac{f(x, \varphi^p(|u|)) + f(x, \varphi^p(|v|))}{2} &\geq f\left(x, \frac{\varphi^p(|u|) + \varphi^p(|v|)}{2}\right) \\ &\geq f\left(x, \left|\frac{\varphi(|u|) + \varphi(|v|)}{2}\right|^p + \kappa |\varphi(|u|) - \varphi(|v|)|^p\right) \\ &= f\left(x, \left|\frac{\varphi(|u|) + \varphi(|v|)}{2}\right|^p\right) \\ &\quad + \sum_{k=0}^m f'_{y_k}\left(x, \left|\frac{\varphi(|u|) + \varphi(|v|)}{2}\right|^p + \kappa \theta |\varphi(|u|) - \varphi(|v|)|^p\right) \cdot \kappa |\varphi(|u_k|) - \varphi(|v_k|)|^p \\ &\geq f\left(x, \left|\frac{\varphi(|u|) + \varphi(|v|)}{2}\right|^p\right) + \gamma \kappa \sum_{k=0}^m |\varphi(|u_k|) - \varphi(|v_k|)|^p \\ &\quad \forall u = (u_0, u_1, \dots, u_m), \quad v = (v_0, v_1, \dots, v_m), \quad 0 < \theta < 1. \end{aligned}$$

Продолжим эту выкладку с учетом возрастания функции $f(x, y)$ по аргументам y , выпуклости функции $\varphi(s) \geq 0$ и ее возрастания при $s \geq 0$:

$$f\left(x, \left|\frac{\varphi(|u|) + \varphi(|v|)}{2}\right|^p\right) \geq f\left(x, \varphi^p\left(\frac{|u| + |v|}{2}\right)\right) \geq f\left(x, \varphi^p\left(\left|\frac{u + v}{2}\right|\right)\right).$$

В итоге, для каждого $x \in T$ и любых $u, v \in \mathbb{R}^{m+1}$ получим

$$\frac{f(x, \varphi^p(|u|)) + f(x, \varphi^p(|v|))}{2} \geq f\left(x, \varphi^p\left(\left|\frac{u + v}{2}\right|\right)\right) + \gamma \kappa \sum_{k=0}^m |\varphi(|u_k|) - \varphi(|v_k|)|^p.$$

Подставляя в это числовое неравенство вместо u_k, v_k величины $A_k z_1(x), A_k z_2(x)$ для произвольных функций $z_1(x), z_2(x)$ из выпуклого множества $D \subset W_p^l(T)$ и почленно интегрируя полученное соотношение, приходим к следующему варианту формулы (3.14):

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{\Omega}(z_1) + \widehat{\Omega}(z_2)}{2} &\geq \widehat{\Omega}\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) + \gamma \kappa \sum_{k=0}^m \int_T |\varphi(|A_k z_1(x)|) - \varphi(|A_k z_2(x)|)|^p dx \\ &\quad \forall z_1, z_2 \in D. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Это доказывает обобщенную равномерную выпуклость функционала (4.3).

В случае $1 < p < 2$ обобщенная квазиравномерная выпуклость доказывается по той же схеме с некоторыми изменениями. Так, вместо неравенства (3.6) используется неравенство (3.8) с заменой в нем чисел s_1, s_2 на $\varphi(|u_k|), \varphi(|v_k|)$ соответственно и с последующей заменой в выкладках члена $|\varphi(|u_k|) - \varphi(|v_k|)|^p$ на

$$(\varphi^{2-p}(|u_k|) + \varphi^{2-p}(|v_k|))(\varphi^{p-1}(|u_k|) - \varphi^{p-1}(|v_k|))^2.$$

В частности, так модифицируется неравенство (4.4). В итоге получается вариант соотношения (3.15):

$$\frac{\widehat{\Omega}(z_1) + \widehat{\Omega}(z_2)}{2} \geq \widehat{\Omega}\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) + \gamma \kappa \sum_{k=0}^m \Delta_p[\varphi(|A_k z_1|), \varphi(|A_k z_2|)] \quad \forall z_1, z_2 \in D,$$

и это доказывает теорему.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Если множество D удовлетворяет условию теоремы 3.12 (например, содержит некоторую постоянную функцию), а для функций f и φ выполнены условия теоремы 4.1 и, кроме того, как и в теореме 3.12, условие $\varphi(s) \geq a + bs$ ($b > 0$) при $s \geq 0$, то функционал (4.3) слабо полунепрерывен снизу на D и обладает там H -свойством.

Действительно, производящая функция $f_0(x, y) = f(x, \varphi^p(y))$ функционала (4.3) имеет свойства а)–в) из п. 3. Ее непрерывность и монотонность следует из условий 1), 2) и 4) теоремы 4.1, а ее выпуклость вытекает из неравенства (4.4) при $p \geq 2$ или его аналога при $1 < p < 2$. Поэтому для доказательства остается применить лемму 3.1, теорему 4.1 и теорему 3.12.

Рассмотрим конкретные примеры. Как нетрудно убедиться, следующие функционалы с $\varphi(s)$, подчиненной условиям теоремы 3.12, оказываются по теореме 4.1 обобщенно равномерно выпуклыми при $p \geq 2$ и обобщенно квазиравномерно выпуклыми при $1 < p < 2$ на D :

$$\begin{aligned}\Omega_1(z) &= \sum_{k=0}^m \int_T q(x) \exp[\varphi^p(|A_k z(x)|)] dx, \\ \Omega_2(z) &= \sum_{k=0}^m \int_T q(x) [\varphi^p(|A_k z(x)|) + 1] \ln[\varphi^p(|A_k z(x)|) + 1] dx.\end{aligned}$$

Здесь $q(x) \geq q_0 = \text{const} > 0$ – заданная непрерывная в T функция. По следствию 4.2 функционалы $\Omega_{1,2}(z)$, будучи слабо полунепрерывными снизу, имеют H -свойство на D .

Особый интерес представляет функционал

$$\Omega_3(z) = \sum_{k=0}^m \int_T q(x) [|A_k z(x)| + r]^p \ln^p \left[\frac{|A_k z(x)| + r}{r} \right] dx, \quad (4.5)$$

определенный на некотором выпуклом множестве $D \subset W_p^l(T)$. Здесь $r > 0$ – заданная константа. При $Z = L_1(T)$ близкий по виду функционал

$$\Omega_E(z) = \int_T z(x) \ln \frac{z(x)}{r} dx,$$

определенный на $D_r = \{z(x) \in L_1(T) : z(x) \geq r, \Omega_E(z) < \infty\}$ и используемый в так называемом методе максимальной энтропии, хорошо изучен (см., например, [7], [8]). В частности, в [3] фактически установлено его H -свойство на D_r . Функционал (4.5) с этой точки зрения ранее не изучался. Производящая функция функционала (4.5)

$$f(x, y) = q(x) \sum_{k=0}^m y_k$$

удовлетворяет на множестве $T \times \mathbb{R}^{m+1}$ условиям теоремы 4.1. Условиям этой теоремы подчинена и функция

$$\varphi(s) = (s + r) \ln \left(\frac{s + r}{r} \right), \quad s \geq 0.$$

Кроме того, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(s) \geq s$. Поэтому по теореме 4.1 функционал $\Omega_3(z)$ будет обобщенно равномерно выпуклым при $p \geq 2$ или обобщенно квазиравномерно выпуклым при

$1 < p < 2$ на множестве D . По следствию 4.2 он будет слабо полунепрерывным снизу на D и будет иметь там H -свойство.

Теперь рассмотрим часто встречающиеся в приложениях функционалы вида

$$\Omega(z) = \sum_{k=0}^m \int_T q(x) |A_k z(x)|^p \psi(|A_k z(x)|) dx, \quad z(x) \in D \subset W_p^l(T), \quad (4.6)$$

где $q(x), \psi(z)$ – некоторые заданные функции.

ТЕОРЕМА 4.3. *Предположим, что $q(x) \geq q_0 = \text{const} > 0$ – непрерывная в T функция, а неотрицательная и непрерывная при $s \geq 0$ функция $\psi(s)$ такова, что при рассматриваемом числе p функция $\omega(s) = (\psi(|s|) - 1)|s|^p$ выпукла. Тогда функционал (4.6) будет строго равномерно выпуклым при $p \geq 2$ и квазиравномерно выпуклым при $1 < p < 2$ на выпуклом множестве D .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $f(x, y_k) = q(x)y_k^p \psi(y_k)$, $y_k \geq 0$, и пусть, например, $1 < p < 2$. Тогда для любых $u_k, v_k \in \mathbb{R}$ из неравенства (3.8), а также из неравенства $q(x) \geq q_0$ и выпуклости функции $\omega(s) = (\psi(|s|) - 1)|s|^p$, следует оценка

$$\begin{aligned} \frac{f(x, |u_k|) + f(x, |v_k|)}{2} &= q(x) \frac{|u_k|^p + |v_k|^p + |u_k|^p(\psi(|u_k|) - 1) + |v_k|^p(\psi(|v_k|) - 1)}{2} \\ &\geq q(x) \left| \frac{u_k + v_k}{2} \right|^p + q_0 \kappa (|u_k|^{2-p} + |v_k|^{2-p}) (|u_k|^{p-1} - |v_k|^{p-1})^2 \\ &\quad + q(x) \left| \frac{u_k + v_k}{2} \right|^p \left(\psi \left(\left| \frac{u_k + v_k}{2} \right| \right) - 1 \right) \\ &= q(x) \left| \frac{u_k + v_k}{2} \right|^p \psi \left(\left| \frac{u_k + v_k}{2} \right| \right) + q_0 \kappa (|u_k|^{2-p} + |v_k|^{2-p}) (|u_k|^{p-1} - |v_k|^{p-1})^2 \\ &= f \left(x, \left| \frac{u_k + v_k}{2} \right| \right) + q_0 \kappa (|u_k|^{2-p} + |v_k|^{2-p}) (|u_k|^{p-1} - |v_k|^{p-1})^2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Отсюда ясно, что выполнено соотношение (4.2) с $\varphi(s) = s$, из которого, как это указано в начале п. 4, получается условие квазиравномерной выпуклости (3.13) функционала (4.6) на выпуклом множестве D с $\xi(t) = q_0 \kappa t$. Эта теорема доказывается аналогично и для случая $p \geq 2$, если вместо (3.8) использовать неравенство (3.6). Соответственно меняется выкладка (4.7), и вместо (4.2) получается вариант соотношения (4.1).

СЛЕДСТВИЕ 4.4. *Если функции q, ψ подчинены условиям теоремы 4.3 и, кроме того, $\psi(s)$ не убывает при $s \geq 0$, то производящая функция*

$$f(x, y) = q(x) \sum_{k=0}^m y_k^p \psi(y_k)$$

функционала (4.6) имеет при $y \in \mathbb{R}_+^{m+1}$, $x \in T$ свойства а)–в). Тогда по лемме 3.1 функционал (4.6) полунепрерывен снизу, а по теореме 3.2 (при $p \geq 2$) или по теореме 3.8 (при $1 < p < 2$) с учетом результата теоремы 4.3 он имеет H -свойство на D .

В качестве конкретного примера таких функционалов (4.6) можно указать

$$\Omega_4(z) = \sum_{k=0}^m \int_T q(x) |A_k z(x)|^p \exp(|A_k z(x)|) dx$$

и ряд других.

В заключении отметим, что утверждения об H -свойстве могут быть по близкой методике доказаны и для аналогов функционалов (3.3), (4.3) и (4.6)

$$\begin{aligned}\overline{\Omega}(z) &= \int_T f(x, |z(x)|) dx, & \widehat{\Omega}(z) &= \int_T f(x, \varphi^p(|z(x)|)) dx, \\ \Omega(z) &= \int_T q(x) |z(x)|^p \psi(|z(x)|) dx\end{aligned}$$

в пространстве $L_p(T)$, $p > 1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Diestel J. Geometry of Banach Spaces—Selected Topics. № 11. Lecture Notes in Math. V. 485. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1975.
- [2] Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
- [3] Леонов А. С. Обобщение метода максимальной энтропии для решения некорректных задач // Сиб. матем. ж. 2000. Т. 41. № 4. С. 863–872.
- [4] Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.
- [5] Вайнберг М. М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. М.: ГИТТЛ, 1956.
- [6] Крейн С. Г. (ред.) Функциональный анализ (Серия СМБ). М.: Наука, 1972.
- [7] Amato U., Hughes W. Maximum entropy regularization of Fredholm integral equations of the first kind // Inverse Problems. 1991. V. 7. P. 793–808.
- [8] Eggermont P. P. B. Maximum entropy regularization for Fredholm integral equations of the first kind // SIAM J. Math. Anal. 1993. V. 24. № 6. P. 1557–1576.

Московский инженерно-физический институт (технический университет)
E-mail: leonov@illposed.msk.ru

Поступило
27.06.2002