Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Литовченко, Задача Коши для $\{\vec{p}; \vec{h}\}$ -параболических уравнений с коэффициентами, зависящими от времени, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 3, 395–411

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2501>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 11:50:05

УДК 517.55

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ $\{\vec{p}; \vec{h}\}$ -ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ВРЕМЕНИ

В. А. Литовченко

Установлена корректная разрешимость задачи Коши для $\{\vec{p}; \vec{h}\}$ -параболических уравнений с коэффициентами, зависящими от времени, начальными данными которой являются обобщенные функции медленного роста. Также для определенного класса уравнений сформулированы необходимые и достаточные условия существования единственного решения задачи Коши со свойствами относительно пространственной переменной, которые являются характерными для ее фундаментального решения.

Библиография: 4 названия.

Введение. В 50-х годах прошлого века Шилов предложил некоторое обобщение параболичности по Петровскому систем дифференциальных уравнений, которое со временем получило название “параболичности по Шилову”. Согласно этому обобщению, параболическая система характеризуется порядком p и показателем параболичности h , $0 < h \leq p$.

При использовании теорем типа Фрагмена–Линделёфа [1] в качестве главного инструмента исследований, возникла необходимость введения дополнительной характеристики – так называемого рода параболичности μ . Известно [1], что если $p = h$, то $\mu = 1$. Но в случае, когда $h < p$, до сих пор не установлено, как выражается μ через p и h при условии, что последние являются точными характеристиками параболичности. Эта неопределенность рода параболичности естественным образом распространяется и на ряд результатов, полученных, например, в [2], [3].

С целью сохранения индивидуальной информации, которую несет каждая компонента пространственной переменной, в работе предложено некоторое обобщение параболичности по Шилову, которое состоит в замене скалярных характеристик p и h соответственно на векторные $\vec{p}, \vec{h}$ ($\{\vec{p}; \vec{h}\}$ -параболичность). Также рассматривается метод исследования свойств фундаментального решения задачи Коши для $\{\vec{p}; \vec{h}\}$ -параболических уравнений с коэффициентами, зависящими от времени, который базируется на известной формуле Фаа ди Бруно дифференцирования сложных функций. Благодаря этому методу установлена корректная разрешимость задачи Коши с начальными данными в пространствах обобщенных функций медленного роста. А также для определенного класса уравнений (в частности, параболических по Эйдельману) сформулированы необходимые и достаточные условия существования единственного решения задачи Коши со свойствами относительно пространственной переменной, которые являются характерными для ее фундаментального решения.

Следует отметить, что полученные результаты характеризуются только порядком $\vec{p}$ и показателем параболичности $\vec{h}$.

1. Пространства типа S . Пусть $\mathbb{R}^n$ – n -мерное эвклидово пространство, $x = (x_1; \dots; x_n)$, $y = (y_1; \dots; y_n)$ – его элементы, $(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, $\|x\| = (x, x)^{1/2}$, а $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ – пространство всех бесконечно дифференцируемых функций, определенных на $\mathbb{R}^n$. Для произвольных α и β из $\mathbb{R}^n$ таких, что $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$, $i \in \{1; \dots; n\}$, положим

$$\begin{aligned} S_\alpha &= \{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \exists A > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \ \exists c_k > 0 \ \forall q \in \mathbb{Z}_+^n \ \forall x \in \mathbb{R}^n : \\ &\quad |x^q D_x^k \varphi(x)| \leq c_k A^{|q|_*} q^{\alpha q} \}, \\ S^\beta &= \{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \exists B > 0 \ \forall q \in \mathbb{Z}_+^n \ \exists c_q > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \ \forall x \in \mathbb{R}^n : \\ &\quad |x^q D_x^k \varphi(x)| \leq c_q B^{|k|_*} k^{\beta k} \}, \\ S_\alpha^\beta &= \{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \exists c > 0 \ \exists A > 0 \ \exists B > 0 \ \forall \{k; q\} \subset \mathbb{Z}_+^n \ \forall x \in \mathbb{R}^n : \\ &\quad |x^q D_x^k \varphi(x)| \leq c A^{|q|_*} B^{|k|_*} k^{\beta k} q^{\alpha q} \}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbb{Z}_+^n$ – множество, состоящее из n -мерных векторов, координаты которых – неотрицательные целые числа;

$$D_x^m = \frac{\partial^{|m|_*}}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}}, \quad |m|_* = m_1 + \dots + m_n,$$

$m^{\gamma m} = m_1^{\gamma_1 m_1} \dots m_n^{\gamma_n m_n}$ для $m \in \mathbb{Z}_+^n$ и $\gamma \in \mathbb{R}^n$; $|\tau| = \sqrt{\tau^2}$, $\tau \in \mathbb{R}$.

Пространство S_α^β состоит только из тех функций $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, которые удовлетворяют неравенству

$$|D_x^k \varphi(x)| \leq c A^{|k|_*} k^{\beta k} e^{-\delta |x_1|^{1/\alpha_1}} \dots e^{-\delta |x_n|^{1/\alpha_n}}, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n, \ x \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

с некоторыми положительными константами c , A и δ , зависящими только от φ [1].

Справедливы следующие вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 1. Для всех $\{\varphi; \psi\} \subset S_\alpha^\beta$

$$J_r(\xi) \equiv \int_{\|x\| \leq r} \varphi(x) \psi(x + \xi) dx \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{S_\alpha^\beta} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \psi(x + \xi) dx \equiv J(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

(здесь через $\varphi_\nu \xrightarrow[\nu \rightarrow \nu_0]{\Phi} \varphi_{\nu_0}$ обозначен предел в смысле топологии пространства Φ).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению предела в пространстве S_α^β (см. [1]) достаточно проверить выполнение следующих условий:

I) $\forall k \in \mathbb{Z}_+^n$

$$|D_\xi^k (J_r(\xi) - J(\xi))| \xrightarrow[r \rightarrow +\infty]{\xi \in \mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n} 0$$

(т.е. равномерно по $\xi \in \mathbb{K}$ стремится к нулю на каждом компакте $\mathbb{K}$ из $\mathbb{R}^n$);

II) $\exists c > 0 \ \exists A > 0 \ \exists B > 0 \ \forall \{q; k\} \subset \mathbb{Z}_+^n \ \forall r > 0 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$:

$$|\xi^q D_\xi^k J_r(\xi)| \leq c A^{|k|_*} B^{|q|_*} k^{\beta k} q^{\alpha q}.$$

Учитывая тот факт, что $\{\varphi; \psi\} \subset S_\alpha^\beta$, а также неравенство

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) D_\xi^k \psi(x + \xi) dx \right| \leq c \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| dx < +\infty, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

получаем

$$\begin{aligned} |D_\xi^k (J_r(\xi) - J(\xi))| &\leq \int_{\|x\| > r} |\varphi(x)| |D_\xi^k \psi(x + \xi)| dx \\ &\leq c \int_{\|x\| > r} |\varphi(x)| dx \xrightarrow[r \rightarrow +\infty]{\xi \in \mathbb{K}} 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n, \quad \mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Таким образом, I) имеет место.

Условие II) также выполняется, поскольку

$$\begin{aligned} &\forall \{\varphi; \psi\} \subset S_\alpha^\beta \quad \forall \{k; q\} \subset \mathbb{Z}_+^n \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad \forall r > 0 : \\ |\xi^q D_\xi^k J_r(\xi)| &\leq \sum_{|l|_* = 0}^{|q|_*} C_q^l \left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^l |\varphi(x)| |(x + \xi)^{q-l} D_{x+\xi}^k \psi(x + \xi)| dx \right) \\ &\leq c c_1 B^{|k|_*} k^{\beta k} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\delta_1}{2} |x_1|^{1/\alpha_1}} \dots e^{-\frac{\delta_n}{2} |x_n|^{1/\alpha_n}} dx \\ &\quad \times \sum_{|l|_* = 0}^{|q|_*} C_q^l A^{|q-l|_*} (q-l)^{\alpha(q-l)} \prod_{i=1}^n \sup_{t_i > 0} \{t_i^{l_i} e^{-t_i^{1/\alpha_i}}\} \\ &\leq c_2 A_1^{|q|_*} B^{|k|_*} k^{\beta k} q^{\alpha q}, \end{aligned}$$

где C_m^n – биномиальный коэффициент; c_2, A_1, B – положительные константы, не зависящие от k, q, r и ξ ; $c, A, B, \delta_i, i \in \{1; \dots; n\}$, – константы из соответственных оценок типа (1), (2) для функций φ и ψ . Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Если $\{\varphi; \psi\} \subset S_\alpha^\beta$, а $K(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r\}$, $r > 0$, то для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ функция $\varphi(\cdot) \psi(\cdot + \xi)$ интегрируема на множестве $K(r)$ в смысле топологии пространства S_α^β .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольным образом разбиение p множества $K(r)$ и для него рассмотрим верхнюю

$$J^*(p, \xi) = \sum_i \varphi(x_i^*) \psi(x_i^* + \xi) \Delta x_i, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

и нижнюю

$$J^{**}(p, \xi) = \sum_i \varphi(x_i^{**}) \psi(x_i^{**} + \xi) \Delta x_i, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

интегральные суммы Дарбу. Тогда для доказательства утверждения леммы 2 достаточно показать, что

$$|J^*(p, \xi) - J^{**}(p, \xi)| \xrightarrow[d \rightarrow 0]{S_\alpha^\beta} 0$$

(здесь d – максимальный из диаметров элементов p -разбиения множества $K(r)$), т.е., что

$$I) \forall k \in \mathbb{Z}_+^n:$$

$$|D_\xi^k(J^*(p, \xi) - J^{**}(p, \xi))| \xrightarrow[\xi \in \mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n]{d \rightarrow 0} 0;$$

$$II) \exists c > 0 \exists A > 0 \exists B > 0 \forall \{k; q\} \subset \mathbb{Z}_+^n \forall p \forall \xi \in \mathbb{R}^n:$$

$$|\xi^q D_\xi^k(J^*(p, \xi) - J^{**}(p, \xi))| \leq c A^{|q|_*} B^{|k|_*} k^{\beta k} q^{\alpha q}.$$

Условие I) выполняется. Действительно, согласно теореме Лагранжа о конечных приращениях, а также, учитывая, что $\{\varphi, \psi\} \subset S_\alpha^\beta$, получаем

$$\left| \sum_i D_\xi^k(\varphi(x_i^{**})\psi(x_i^{**} + \xi) - \varphi(x_i^*)\psi(x_i^* + \xi)) \Delta x_i \right| \leq \sum_i c_i \|x_i^* - x_i^{**}\| \Delta x_i \xrightarrow{d \rightarrow 0} 0,$$

где c_i – положительные константы, не зависящие от $\xi \in \mathbb{R}^n$, а $k \in \mathbb{Z}_+^n$.

Проверим выполнение условия II). Поскольку $\{\varphi, \psi\} \subset S_\alpha^\beta$, для этих функций выполняется условие (1) с соответствующими константами $c_i, A_i, B_i, i \in \{1; 2\}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} & \forall \{k; q\} \subset \mathbb{Z}_+^n \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad \forall p: \\ & |\xi^q D_\xi^k J^*(p, \xi)| \leq \sum_i \left(\sum_{|j|_*=0}^{|q|_*} C_q^i (x_i^*)^{q-j} \varphi(x_i^*) | |(x_i^* + \xi)^j D_{(x_i^* + \xi)}^k \varphi(x_i^* + \xi)| \right) \Delta x_i \\ & \leq \sum_i \left(\sum_{|j|_*=0}^{|q|_*} C_q^i c_1 A_1^{|q-j|_*} (q-j)^{\alpha(q-j)} c_2 A_2^{|j|_*} B_2^{|k|_*} k^{\beta k} j^{\alpha j} \right) \Delta x_i \\ & \leq c V_r A^{|q|_*} B_2^{|k|_*} q^{\alpha q} k^{\beta k}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $V_r = \text{mes } K(r)$, а c, A, B_2 – положительные константы, не зависящие от k, q, ξ и разбиения p .

Аналогичным образом убеждаемся в том, что оценка (3) выполняется и для $J^{**}(p, \cdot)$.

Отсюда, учитывая

$$|\xi^q D_\xi^k(J^*(p, \xi) - J^{**}(p, \xi))| \leq |\xi^q D_\xi^k J^*(p, \xi)| + |\xi^q D_\xi^k J^{**}(p, \xi)|, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \{k, q\} \subset \mathbb{Z}_+^n,$$

приходим к II). Что и требовалось доказать.

Из этих лемм, как следствие, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Для всех φ и ψ из S_α^β , а также $\xi \in \mathbb{R}^n$, функция $\varphi(\cdot)\psi(\cdot + \xi)$ интегрируема на $\mathbb{R}^n$ в смысле топологии пространства S_α^β .

Далее, обозначим через Φ' пространство, топологически сопряженное к $\Phi \in \{S_{\alpha^*}; S_{\alpha^*}^\beta\}$, где $\alpha_i^* = 1/h_i$, $\beta_i^* \geq Y - \alpha_i$, $p_i \geq 1$, $p_i \geq h_i > 0$, $i \in \{1; \dots; n\}$, $Y \equiv \max_{i \in \{1; \dots; n\}} \{p_i/h_i\}$.

Преобразование Фурье обобщенной функции $f \in \Phi'$, а также свертку этой функции с функционалом типа функции φ из Φ (будем обозначать $\varphi * f$) определим с помощью следующих соотношений [1]:

$$\langle F[f], F[\psi] \rangle = (2\pi)^n \langle f, \psi \rangle, \quad \langle \varphi * f, \psi \rangle = \langle f, \varphi * \psi \rangle, \quad \psi \in \Phi,$$

из которых получаем, что

$$\forall \varphi \in \Phi \quad \forall f \in \Phi' : \quad F[\varphi * f] = F[f]F[\varphi]. \quad (4)$$

Из того, что в пространстве S_α^β операция сдвига не только непрерывна, но и бесконечно дифференцируема [1], приходим к такому следствию.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для всех $f \in (S_\alpha^\beta)'$, а также для всех $\varphi \in S_\alpha^\beta$ $\langle f, \varphi(\cdot + \xi) \rangle \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\varphi \in S_\alpha^\beta$, а $f \in (S_\alpha^\beta)'$. Тогда для того, чтобы $\varphi * f = \langle f, \varphi(\cdot + \xi) \rangle$, необходимо и достаточно, чтобы f был действительнзначным функционалом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Принимая во внимание следствие 1, а также утверждение теоремы 1, учитывая линейность и непрерывность функционала f , убеждаемся в том, что

$$\langle \langle f, \varphi(\cdot + \xi) \rangle, \psi \rangle = \left\langle f, \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi(x)} \varphi(x + \xi) dx \right\rangle = \langle f, \varphi * \psi \rangle = \langle \varphi * f, \psi \rangle, \quad \psi \in S_\alpha^\beta.$$

Теорема доказана.

2. Задача Коши. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} = (P(t, D_x)U)(t, x), \quad (t, x) \in \Omega \equiv (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n, \quad (5)$$

где оператор

$$P(t, D_x) = \sum_{r_1/p_1 + \dots + r_n/p_n \leq 1} (-i)^{|r|^*} a_r(t) D_x^r, \\ t > 0, \quad i = \sqrt{-1}, \quad p_j \in \mathbb{N}, \quad j \in \{1; \dots; n\},$$

а $a_r(\cdot)$ – определенные на $(0, +\infty)$, ограниченные по модулю, комплекснозначные функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что уравнение (5) $\{\vec{p}; \vec{h}\}$ -параболично равномерно по t , если

$$\exists \delta_0 > 0 \quad \exists \delta_1 > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad \forall t > 0 : \\ \operatorname{Re} \left(\sum_{r_1/p_1 + \dots + r_n/p_n \leq 1} a_r(t) \xi^r \right) \leq -\delta_0 \widetilde{\|\xi\|}^{\vec{h}} + \delta_1, \quad (6)$$

где $\widetilde{\|\xi\|}^{\vec{h}} \equiv |\xi_1|^{h_1} + |\xi_2|^{h_2} + \dots + |\xi_n|^{h_n}$, $\vec{p} = \{p_1; \dots; p_n\}$, $\vec{h} = \{h_1; \dots; h_n\}$, $p_j \in \mathbb{N}$, $p_j \geq h_j > 0$, $j \in \{1; \dots; n\}$. При этом $\vec{p}$ назовем порядком, а $\vec{h}$ – показателем параболичности этого уравнения.

Соотношение между параболичностью по Шилову [2] и $\{\vec{p}; \vec{h}\}$ -параболичностью характеризует следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть уравнение (5) параболично по Шилову равномерно по t с порядком p_0 и показателем параболичности h_0 , $0 < h_0 \leq p_0$. Тогда это уравнение равномерно по t $\{\vec{p}; \vec{h}\}$ -параболично, причем $\vec{p} = \{p_0; \dots; p_0\}$, $\vec{h} = \{h_0; \dots; h_0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Исходя из определений параболичности по Шилову и $\{\vec{p}; \vec{h}\}$ -параболичности, достаточно показать, что

$$\exists \delta > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n : \quad \|\xi\|^{h_0} \geq \delta(|\xi_1|^{h_0} + \dots + |\xi_n|^{h_0}), \quad h_0 > 0. \quad (7)$$

В случае $h_0 \geq 1$ (учитывая вогнутость функции $y = t^{h_0}$, $t \geq 0$, при $h_0 > 1$), утверждение (7) становится очевидным, если

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n : \quad \|\xi\| \geq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} (|\xi_1| + \dots + |\xi_n|). \quad (8)$$

Поэтому докажем сначала (8).

Пусть $n = 2$. Тогда, поскольку

$$\sqrt{a^2 - b^2} = (a - b)\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \geq a - b, \quad a > b > 0,$$

получаем, что

$$\|\xi\| = \sqrt{(|\xi_1| + |\xi_2|)^2 - 2|\xi_1||\xi_2|} \geq |\xi_1| + |\xi_2| - \sqrt{2|\xi_1||\xi_2|}, \quad \xi \in \mathbb{R}^2.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\xi_1| + |\xi_2|) \geq \sqrt{2|\xi_1||\xi_2|},$$

приходим к такому неравенству:

$$\|\xi\| \geq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(|\xi_1| + |\xi_2|), \quad \xi \in \mathbb{R}^2. \quad (9)$$

Если же $n = 3$, то, обозначив через $\|\xi\|_1 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$ и учитывая, что $\|\xi\| = \sqrt{\|\xi\|_1^2 + |\xi_3|^2}$, из неравенства вида (9) получим

$$\begin{aligned} \|\xi\| &\geq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\|\xi\|_1 + |\xi_3|) \geq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(|\xi_1| + |\xi_2|) + |\xi_3|\right) \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 (|\xi_1| + |\xi_2| + |\xi_3|), \quad \xi \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс согласно методу математической индукции, получим неравенство (8).

Наконец, если $h_0 \in (0; 1)$, то, учитывая (8), для доказательства (7) достаточно убедиться в том, что

$$\exists c > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n : \quad (|\xi_1| + \dots + |\xi_n|)^{h_0} \geq c(|\xi_1|^{h_0} + \dots + |\xi_n|^{h_0}). \quad (10)$$

В свою очередь неравенство (10) становится очевидным, если

$$(|\xi_1| + \dots + |\xi_n|)^{1/2^k} \geq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{(n-1)(2-1/2^{k-1})} (|\xi_1|^{1/2^k} + \dots + |\xi_n|^{1/2^k}), \quad (11)$$

$$k \in \mathbb{N}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

В самом деле, зафиксируем $k \in \mathbb{N}$ так, чтобы $1 < 2^k h_0$. Тогда из (11) получаем

$$\begin{aligned} (|\xi_1| + \dots + |\xi_n|)^{h_0} &\geq \left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{(n-1)(2-1/2^{k-1})} (|\xi_1|^{1/2^k} + \dots + |\xi_n|^{1/2^k}) \right)^{2^k h_0} \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{(n-1)(2^{k+1}-2)h_0} (|\xi_1|^{h_0} + \dots + |\xi_n|^{h_0}), \quad \xi \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

(здесь еще раз использован факт вогнутости функции $y = t^{2^k h_0}$, $t > 0$, при $2^k h_0 > 1$).

В заключение отметим, что (11) легко устанавливается с помощью метода математической индукции и неравенства (8). Теорема доказана.

Отметим также, что из $\{\vec{p}; \vec{h}\}$ -параболичности уравнения (5) следует и параболичность этого уравнения по Шилову, например, с

$$p_0 = \max_{j \in \{1; \dots; n\}} \{p_j\}, \quad h_0 = \min_{j \in \{1; \dots; n\}} \{h_j\},$$

но очевидно, что характеристики p_0 и h_0 , вообще говоря, являются менее точными, нежели характеристики параболичности в смысле $\{\vec{p}; \vec{h}\}$.

Пусть уравнение (5) является $\{\vec{p}; \vec{h}\}$ -параболично равномерным по t , а

$$\theta_t(\cdot) \equiv \exp \left\{ \int_0^t P(\tau, \cdot) d\tau \right\}, \quad t > 0,$$

где

$$P(t, x) \equiv \sum_{r_1/p_1 + \dots + r_n/p_n \leq 1} a_r(t)x, \quad (t, x) \in \Omega.$$

Следующие вспомогательные утверждения характеризуют свойства этой функции.

ЛЕММА 3. Для всех $t > 0$ имеем $\theta_t(\cdot) \in S_{\alpha^*}^{\hat{\beta}}$, $\hat{\beta}_j = Y - \alpha_j^*$, $j \in \{1; \dots; n\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для упрощения изложения приведем схему доказательства в случае, когда $n = 2$ (используя метод математической индукции, эту схему нетрудно распространить и на случай произвольного натурального $n > 2$).

Согласно известной формуле Фаа ди Бруно дифференцирования сложной функции

$$\begin{aligned} D_x^{k_1} f(\varphi(x)) &= \sum_{\nu_1}^{k_1} \frac{k_1!}{q_1! j_1! \dots \mu_1!} \frac{d^{\nu_1} f(\varphi)}{d\varphi^{\nu_1}} \\ &\times \left(\frac{d\varphi(x)}{1! dx} \right)^{q_1} \left(\frac{d^2 \varphi(x)}{2! dx^2} \right)^{j_1} \dots \left(\frac{d^{L_1} \varphi(x)}{L_1! dx^{L_1}} \right)^{\mu_1}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k_1 \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

(здесь знак суммы распространяется на все решения в целых неотрицательных числах уравнения $k_1 = q_1 + 2j_1 + \dots + L_1\mu_1$, а число $\nu_1 = q_1 + j_1 + \dots + \mu_1$), получаем, что

$$\forall k \in \mathbb{Z}_+^2 \quad |D_x^k \theta_t(x)| \leq \sum_{\nu_1}^{k_1} \frac{k_1!}{q_1! j_1! \dots \mu_1!} \sum_{j=0}^{k_2} C_{k_2}^j |D_{x_2}^j \hat{P}(t, x)| |D_{x_2}^{k_2-j} \theta_t(x)|, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{P}(t, x) &\equiv \left(\int_0^t \frac{\partial P(\tau, x)}{1! \partial x_1} d\tau \right)^{q_1} \\ &\times \left(\int_0^t \frac{\partial^2 P(\tau, x)}{2! \partial x_1^2} d\tau \right)^{j_1} \dots \left(\int_0^t \frac{\partial^{L_1} P(\tau, x)}{L_1! \partial x_1^{L_1}} d\tau \right)^{\mu_1}, \quad (t, x) \in \Omega. \end{aligned}$$

Используя формулу Фаа ди Бруно, еще раз убеждаемся в том, что

$$\begin{aligned} \forall j \in \mathbb{Z}_+ : \quad |D_{x_2}^j \theta_t(x)| &\leq \sum_{\nu_2}^j \frac{j!}{q_2! j_2! \dots \mu_2!} |\theta_t(x)| \left(\int_0^t \left| \frac{\partial P(\tau, x)}{1! \partial x_2} \right| d\tau \right)^{q_2} \dots \\ &\times \left(\int_0^t \left| \frac{\partial^{L_2} P(\tau, x)}{L_2! \partial x_2^{L_2}} \right| d\tau \right)^{\mu_2}, \quad (t, x) \in \Omega, \end{aligned}$$

где $j = q_2 + 2j_2 + \dots + L_2\mu_2$, а $p_2 = q_2 + j_2 + \dots + \mu_2$.

Далее,

$$\begin{aligned} &e^{-t\rho/L} \widetilde{\|x\|}^{\vec{h}} \left(\int_0^t \left| \frac{\partial^\nu P(\tau, x)}{\nu! \partial x_2^\nu} \right| d\tau \right)^q \\ &\leq A^q \left[\sum_{r_1/p_1 + r_2/p_2 \leq 1} \int_0^t |a_r(\tau)| d\tau \left(\frac{qL}{\rho t} \right)^{r_1/h_1 + r_2/h_2 - \nu/h_2} \right. \\ &\times \left. \left(\left\{ \sup_{\delta > 0} \{ \delta^{r_1/h_1} e^{-\delta} \} \sup_{\delta > 0} \{ \delta^{(r_2 - \nu)/h_2} e^{-\delta} \}, \quad r_2 \geq \nu, \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. 0, \quad r_2 < \nu \right) \right]^q \\ &\leq (A_1(qL)^{Y - \nu/h_2} t^{1 + \nu/h_2 - \gamma})^q \left(\left\{ \begin{array}{ll} 1, & p_2 \geq \nu, \\ 0, & p_2 < \nu \end{array} \right. \right), \quad (t, x) \in \Omega, \quad (13) \end{aligned}$$

где $\{\nu; L; q\} \subset \mathbb{Z}_+$, $\rho > 0$,

$$\gamma \equiv \begin{cases} Y, & t \in (0; 1), \\ 0, & t \geq 1, \end{cases}$$

а A_1 – положительная константа, не зависящая от t, x, L, ν и q . Отсюда, учитывая условие параболичности (6), а также неравенства

$$\frac{j!}{q_2! (j_2!)^2 \dots (\mu_2!)^{L_2}} \leq 2^{L_2 j}, \quad \sum_{\nu_2}^j 1 \leq (2e)^j \quad (14)$$

(здесь $\nu_2 = q_2 + j_2 + \dots + \mu_2$, а $j = q_2 + 2j_2 + \dots + L_2\mu_2$), находим, что

$$\begin{aligned} |D_{x_2}^j \theta_t(x)| &\leq A_2^j t^{\gamma_1(j)+j/h_2-j\gamma} \sum_{\nu_2}^j \frac{j!}{q_2! j_2! \dots \mu_2!} \exp \left\{ \int_0^t (\operatorname{Re} P(\tau, x) + \rho \widetilde{\|x\|}^{\vec{h}}) d\tau \right\} \\ &\quad \times j^{Y\nu_2-j/h_2} \left(\begin{array}{l} 1, \quad p_2 \geq L_2, \\ 0, \quad p_2 < L_2 \end{array} \right) \\ &\leq e^{\delta_1 t} A_3^j t^{\gamma_1(j)+j(1/h_2-\gamma)} e^{-t\rho_1 \widetilde{\|x\|}^{\vec{h}}} \\ &\quad \times \sum_{\nu_2}^j \frac{j! j^{j-\nu_2} \cdot j^{Y\nu_2-j/h_2}}{q_2! (j_2!)^2 \dots (\mu_2!)^{L_2}} \left(\begin{array}{l} 1, \quad p_2 \geq L_2, \\ 0, \quad p_2 < L_2 \end{array} \right) \\ &\leq e^{\delta_1 t} A_4^j t^{\gamma_1(j)+j(1/h_2-\gamma)} j^{j(Y-1/h_2)} e^{-t\rho_1 \widetilde{\|x\|}^{\vec{h}}}, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \quad (t, x) \in \Omega, \end{aligned} \quad (15)$$

где A_4, ρ_1 – положительные постоянные, не зависящие от j, t и x , а

$$\gamma_1(j) \equiv \begin{cases} j, & t \geq 1, \\ 1, & t \in (0; 1). \end{cases}$$

Поскольку для $t > 0, x \in \mathbb{R}^2, \{l; L; g; \eta\} \subset \mathbb{N}$ и $\rho_2 \equiv \rho_1/2$

$$\begin{aligned} &\exp \left\{ -\frac{t\rho_2}{\eta} \widetilde{\|x\|}^{\vec{h}} \right\} \left| \int_0^t \frac{\partial^{L+l} P(\tau, x)}{L! l! \partial x_1^L \partial x_2^l} d\tau \right|^g \\ &\leq A_5^g \left[\sum_{r_1/p_1+r_2/p_2 \leq 1} \int_0^t |a_r(\tau)| d\tau \left(\frac{g\eta}{\rho_2 t} \right)^{Y-L/h_1-l/h_2} \right. \\ &\quad \times \left(\begin{array}{l} \sup_{\delta>0} \{ \delta^{(r_1-L)/h_1} e^{-\delta} \} \sup_{\delta>0} \{ \delta^{(r_2-l)/h_2} e^{-\delta} \}, \quad r_1 \geq L \text{ и } r_2 \geq l, \\ 0, \quad r_1 < L \text{ или } r_2 < l \end{array} \right) \left. \right]^g \\ &\leq (A_6(g\eta))^{Y-L/h_1-l/h_2} t^{1+L/h_1+l/h_2-\gamma} g \left(\begin{array}{l} 1, \quad L/p_1+l/p_2 \geq 1, \\ 0, \quad L/p_1+l/p_2 > 1 \end{array} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

(здесь A_6 – положительная константа, не зависящая от t, x, η, L, l и g), то, принимая во внимание оценки типа (13) и (14), получаем, что для всех $\{\nu; m\} \subset \mathbb{Z}_+$

$$\begin{aligned} &\exp \left\{ -\frac{\rho_2 t}{m} \widetilde{\|x\|}^{\vec{h}} \right\} \left| D_{x_2}^\nu \left(\left(\int_0^t \frac{\partial^L P(\tau, x)}{L! \partial x_1^L} d\tau \right)^g \right) \right| \\ &\leq \sum_{\nu_3}^\nu \frac{\nu!}{q! j! \dots \mu!} \\ &\quad \times \left(\begin{array}{l} \frac{g!}{(g-\nu_3)!} \exp \left\{ -\frac{\rho_2 t}{m(s+1)} \widetilde{\|x\|}^{\vec{h}} \right\} \left| \int_0^t \frac{\partial^L P(\tau, x)}{L! \partial x_1^L} d\tau \right|^{g-\nu_3}, \quad g \geq \nu_3, \\ 0, \quad g < \nu_3 \end{array} \right) \\ &\quad \times \left(\exp \left\{ -\frac{\rho_2 t}{m(s+1)} \widetilde{\|x\|}^{\vec{h}} \right\} \left| \int_0^t \frac{\partial^{L+1} P(\tau, x)}{L! \partial x_1^L \partial x_2} d\tau \right|^q \right) \dots \\ &\quad \times \left(\exp \left\{ -\frac{\rho_2 t}{m(s+1)} \widetilde{\|x\|}^{\vec{h}} \right\} \left| \int_0^t \frac{\partial^{L+s} P(\tau, x)}{L! s! \partial x_1^L \partial x_2^s} d\tau \right|^\mu \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2^g \sum_{\nu_3}^{\nu} \frac{\nu! \nu_3! \nu^{\nu-\nu_3}}{q! (j!)^2 \dots (\mu!)^s} \\
&\times \left(\begin{cases} (A_1((g-\nu_3)m(s+1))^{Y-L/h_1} t^{1+L/h_1-\gamma})^{g-\nu_3}, & g \geq \nu_3 \text{ и } p_2 \geq L, \\ 0, & g < \nu_3 \text{ или } p_2 < L \end{cases} \right) \\
&\times A_6^{\nu_3} t^{\nu_3+L\nu_3/h_1+\nu/h_2-\gamma\nu_3} (\nu m(s+1))^{Y\nu_3-L\nu_3/h_1-\nu/h_2} \\
&\times \left(\begin{cases} 1, & L/p_1 + s/p_2 \leq 1, \\ 0, & L/p_1 + s/p_2 > 1 \end{cases} \right) \\
&\leq A_7^g A_8^{\nu} t^{(1+L/h_1-\gamma)g+\nu/h_2} m^{(Y-L/h_1)g-\nu/h_2} g^{g(Y-L/h_1)} \nu^{\nu(1-1/h_2)} \\
&\times \left(\begin{cases} 1, & g \geq \nu \text{ и } p_1 \geq L, \\ 0, & g < \nu \text{ или } p_1 < L \end{cases} \right), \tag{17}
\end{aligned}$$

где $\nu = q + 2j + \dots + s\mu$, $\nu_3 = q + j + \dots + \mu$, а A_7, A_8 – положительные константы, не зависящие от t, x, m, ν, L и g .

Таким образом,

$$\begin{aligned}
&\exp \left\{ -t\rho_2 \widetilde{\|x\|}^{\tilde{h}} \right\} |D_{x_2}^j \hat{P}(t, x)| \\
&\leq \sum_{M_1=0}^j C_j^{M_1} \left(\exp \left\{ -\frac{t\rho_2}{L_1} \widetilde{\|x\|}^{\tilde{h}} \right\} \left| D_{x_2}^{j-M_1} \left(\left(\int_0^t \frac{\partial P(\tau, x)}{\partial x_1} d\tau \right)^{q_1} \right) \right| \right) \sum_{M_2=0}^{M_1} C_{M_1}^{M_2} \\
&\times \left(\exp \left\{ -\frac{t\rho_2}{L_1} \widetilde{\|x\|}^{\tilde{h}} \right\} \left| D_{x_2}^{M_1-M_2} \left(\left(\int_0^t \frac{\partial^2 P(\tau, x)}{2! \partial x_1^2} d\tau \right)^{j_1} \right) \right| \right) \dots \sum_{M_{L_1-1}=0}^{M_{L_1-2}} C_{M_{L_1-2}}^{M_{L_1-1}} \\
&\times \left(\exp \left\{ -\frac{t\rho_2}{L_1} \widetilde{\|x\|}^{\tilde{h}} \right\} \left| D_{x_2}^{M_{L_1-2}-M_{L_1-1}} \left(\left(\int_0^t \frac{\partial^{L_1-1} P(\tau, x)}{(L_1-1)! \partial x_1^{L_1-1}} d\tau \right)^{\eta_1} \right) \right| \right) \\
&\times \left(\exp \left\{ -\frac{t\rho_2}{L_1} \widetilde{\|x\|}^{\tilde{h}} \right\} \left| D_{x_2}^{M_{L_1-1}} \left(\left(\int_0^t \frac{\partial^{L_1} P(\tau, x)}{L_1! \partial x_1^{L_1}} d\tau \right)^{\mu_1} \right) \right| \right) \\
&\leq A_7^{\nu_1} A_8^j j^{j(1-1/h_2)} k_1^{Y\nu_1-k_1/h_1} L_1^{Y\nu_1-k_1/h_1-j/h_2} t^{\nu_1(1-\gamma)+k_1/h_1+j/h_2} \\
&\times \left(\sum_{M_1=0}^j C_j^{M_1} \sum_{M_2=0}^{M_1} C_{M_1}^{M_2} \dots \sum_{M_{L_1-1}=0}^{M_{L_1-2}} C_{M_{L_1-2}}^{M_{L_1-1}} \right) \\
&\times \left(\begin{cases} 1, & p_1 \geq L_1, \\ 0, & p_1 < L_1 \end{cases} \right), \quad (t, x) \in \Omega, \quad j \in \mathbb{Z}_+. \tag{18}
\end{aligned}$$

Отсюда и из неравенств (12) и (15), учитывая

$$\sum_{M_1=0}^j C_j^{M_1} \sum_{M_2=0}^{M_1} C_{M_1}^{M_2} \dots \sum_{M_{L_1-1}=0}^{M_{L_1-2}} C_{M_{L_1-2}}^{M_{L_1-1}} \leq 2^{L_1 j},$$

приходим к следующей оценке:

$$\begin{aligned}
 |D_x^k \theta_t(x)| &\leq \sum_{\nu_1}^{k_1} \frac{k_1! k_1^{k_1-\nu_1}}{q_1! (j_1!)^2 \dots (\mu_1!)^{L_1}} \sum_{j=0}^{k_2} C_{k_2}^j A_7^{\nu_1} A_8^j j^{j(1-1/h_2)} k_1^{Y\nu_1-k_1/h_1} \\
 &\quad \times p_1^{Y\nu_1-k_1/h_1-j/h_2} t^{\nu_1(1-\gamma)+k_1/h_1+j/h_2} 2^{p_1 j} e^{\delta_1 t} A_4^{k_2-j} \\
 &\quad \times t^{\gamma_1(k_2-j)+(k_2-j)(1/h_2-\gamma)} (k_2-j)^{(k_2-j)(Y-1/h_2)} e^{-t\rho_2 \widehat{\|x\|}^{\tilde{h}}} \\
 &\leq e^{\delta_1 t} A_9^{|k|_*} t^{k_1/h_1+k_2/h_2+\gamma_2(k)} k_1^{k_1(Y-1/h_1)} k_2^{k_2(Y-1/h_2)} e^{-t\rho_2 \widehat{\|x\|}^{\tilde{h}}}, \\
 &\quad k \in \mathbb{Z}_+^2, \quad (t, x) \in \Omega,
 \end{aligned} \tag{19}$$

где A_9 – положительная константа, не зависящая от t, x и k , а

$$\gamma_2(k) \equiv \begin{cases} |k|_*, & t \geq 1, \\ 1 + |k|_*(1-Y), & t \in (0; 1). \end{cases}$$

Что и требовалось доказать.

ЛЕММА 4. Для всех $\varphi \in \Phi$:

$$\theta_t(\cdot) \varphi(\cdot) \xrightarrow[t \rightarrow +0]{\Phi} \varphi(\cdot).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Phi = S_{\alpha}^{\beta*}$; тогда достаточно установить выполнение таких условий:

I) $\forall k \in \mathbb{Z}_+^n$:

$$D_x^k(\theta_t(x)\varphi(x)) \xrightarrow[t \rightarrow +0]{x \in \mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n} D_x^k \varphi(x);$$

II) $\exists \delta_1 > 0 \exists c_1 > 0 \exists A_1 > 0 \forall t \in (0; 1) \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \forall x \in \mathbb{R}^n$:

$$|D_x^k(\theta_t(x)\varphi(x))| \leq c_1 A_1^{|k|_*} k^{\beta* k} e^{-\delta_1 \widehat{\|x\|}^{\tilde{h}}}.$$

Заметим, что

$$D_x^k(\theta_t(x)\varphi(x)) = \theta_t(x) D_x^k \varphi(x) + \sum_{|j|_*=1}^{|k|_*} C_k^j D_x^j \theta_t(x) D_x^{k-j} \varphi(x), \quad k \in \mathbb{Z}_+^n, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{20}$$

И поскольку для каждого компактного множества $\mathbb{K}$ из $\mathbb{R}^n$

$$D_x^j \theta_t(x) D_x^{k-j} \varphi(x) \xrightarrow[t \rightarrow +0]{} 0, \quad \theta_t(x) \xrightarrow[t \rightarrow +0]{} 1$$

равномерно по $x \in \mathbb{K}$ для всех $|j|_* \in \{1; 2; \dots; |k|_*\}$, то условие I) выполняется.

Докажем выполнение условия II). Поскольку $\varphi \in \Phi$, то

$$\begin{aligned}
 \exists \delta_0 > 0 \exists c_0 > 0 \exists A_0 > 0 \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \forall x \in \mathbb{R}^n : \\
 |D_x^k \varphi(x)| \leq c_0 A_0^{|k|_*} k^{\beta* k} e^{-\delta_0 \widehat{\|x\|}^{\tilde{h}}}.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Далее, повторяя рассуждения, проведенные при получении оценки (19), и используя при этом в левых частях неравенств (13), (16)–(18) вместо $e^{-g(t)\|x\|^{\tilde{h}}}$ функцию $e^{-\delta_0 c\|x\|^{\tilde{h}}}$, где $c \neq c(t)$, $t > 0$, убеждаемся в том, что

$$\exists \delta_1 > 0 \quad \exists c_2 > 0 \quad \exists A_2 > 0 \quad \forall t \in (0; 1) \quad \forall j \in \mathbb{Z}_+^n \quad \forall x \in \mathbb{R}^n : \\ e^{-\delta_0 c\|x\|^{\tilde{h}}} |D_x^j \theta_t(x)| \leq c_2 A_2^{|j|_*} j_1^{j_1(Y-1/h_1)} \dots j_n^{j_n(Y-1/h_n)} e^{-\delta_1 \|x\|^{\tilde{h}}}.$$

Отсюда, учитывая (20), (21), приходим к условию II).

В случае, когда $\Phi = S_{\alpha^*}$, выполнение соответствующего условия II) доказывается аналогично. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. *Функция $\theta_t(\cdot)$ дифференцируема по $t > 0$ в смысле топологии пространства Φ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что предельное соотношение

$$\Psi_{\Delta t}(t, x) \equiv \frac{1}{\Delta t} [\theta_{(t+\Delta t)}(x) - \theta_t(x)] \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} P(t, x) \theta_t(x)$$

выполняется в том смысле, что

$$\text{I)} \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \quad \forall t > 0:$$

$$D_x^k \Psi_{\Delta t}(t, x) \xrightarrow[\Delta t \rightarrow 0]{x \in \mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n} D_x^k (P(t, x) \theta_t(x));$$

$$\text{II)} \quad \forall t > 0 \quad \exists c_3 > 0 \quad \exists A_3 > 0 \quad \exists \delta_3 > 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall \Delta t \in (-1; 1), |\Delta t| \leq t/2:$$

$$|D_x^k \Psi_{\Delta t}(t, x)| \leq c_3 A_3^{|k|_*} k^{\beta^* k} e^{-\delta_3 \|x\|^{\tilde{h}}},$$

$$\text{если } \Phi = S_{\alpha^*}^{\beta^*}.$$

Функция $\theta_t(\cdot)$, $t > 0$, дифференцируема по t в обычном смысле, поэтому

$$\Psi_{\Delta t}(t, x) = P(t + \eta \Delta t, x) \theta_{(t+\eta \Delta t)}(x), \quad t + \eta \Delta t > 0, \quad 0 < \eta < 1, \quad (t, x) \in \Omega.$$

Таким образом,

$$D_x^k \Psi_{\Delta t}(t, x) = \sum_{|j|_* = 0}^{|k|_*} C_k^j D_x^j P(t + \eta \Delta t, x) D_x^{k-j} \theta_{(t+\eta \Delta t)}(x), \quad (22) \\ t + \eta \Delta t > 0, \quad 0 < \eta < 1, \quad (t, x) \in \Omega, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Поскольку

$$D_x^j P(t + \eta \Delta t, x) D_x^{k-j} \theta_{(t+\eta \Delta t)}(x) \xrightarrow[\Delta t \rightarrow 0]{x \in \mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n} D_x^j P(t, x) D_x^{k-j} \theta_t(x),$$

из (22) получаем условие I).

Выполнение условия II) становится очевидным, исходя из (22), если учитывать неравенство типа (19), а также то, что функции $a_j(\cdot)$, $j_1/p_1 + j_2/p_2 \leq 1$, ограничены по модулю.

В случае, когда $\Phi = S_{\alpha^*}$, выполнение соответствующего условия II) доказывается аналогично. Лемма доказана.

Учитывая, что оператор F^{-1} является непрерывным в пространстве $S_{\alpha}^{\beta}[1]$, из утверждения леммы 5 приходим к такому следствию.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для всех $t > 0$:

$$F^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial t} \theta_t(\cdot) \right] = \frac{\partial}{\partial t} F^{-1} [\theta_t(\cdot)].$$

Далее, если для уравнения (5) задать начальное условие

$$U(t, \cdot)|_{t=0} = f, \quad f \in (S_{\beta}^{\alpha*})', \quad (23)$$

то под решением задачи Коши (5), (23) будем понимать функцию $U(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, дифференцируемую по t , $\vec{r}$ раз дифференцируемую по x , удовлетворяющую уравнению (5) и начальному условию (23) в том смысле, что

$$U(t, \cdot) \xrightarrow[t \rightarrow +0]{(S_{\beta}^{\alpha*})'} f.$$

Пусть $G_t(\cdot) \equiv F^{-1}[\theta_t(x)](t, \cdot)$, $t > 0$. Непосредственно из леммы 3 убеждаемся в том, что $G_t(\cdot) \in (S_{\beta}^{\alpha*})'$, $t > 0$.

Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. Если f – действительнoзначный функционал из пространства $(S_{\beta}^{\alpha*})'$, то для задачи Коши (5), (23) существует единственное дифференцируемое по t , бесконечно дифференцируемое по x решение, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $F \left[\frac{\partial}{\partial t} U \right] = \frac{\partial}{\partial t} F[U]$, $t > 0$;
- 2) $U(t, x) = G_t(x) * f$, $(t, x) \in \Omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 2, следствия 1 и леммы 5, учитывая, что преобразования Фурье (как прямое, так и обратное) являются непрерывными в пространствах типа S , следует, что функция $U(t, x) = \langle f, G_t(x + \xi) \rangle$, $(t, x) \in \Omega$, является обычной функцией, дифференцируемой по t и бесконечно дифференцируемой по x . Поскольку $G_t(\cdot)$ удовлетворяет уравнению (5), отсюда получаем, что

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} - P(t, D_x) \right\} (G_t(x) * f) = \left\{ \frac{\partial G_t(x)}{\partial t} - P(t, D_x) G_t(x) \right\} * f = 0.$$

Таким образом, функция $U(t, x) = G_t(x) * f$, $(t, x) \in \Omega$, удовлетворяет (5) в обычном смысле. Тот факт, что она удовлетворяет начальному условию (23), следует непосредственно из леммы 4.

Из того, что

$$\frac{\partial U(t, \cdot)}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial t} G_t(\cdot) \right) * f, \quad f \in (S_{\beta}^{\alpha*})', \quad t > 0,$$

учитывая следствие 2, а также равенство (4), убеждаемся в том, что

$$\begin{aligned} \forall t > 0: \quad F \left[\frac{\partial U}{\partial t} \right] &= F[f] \cdot F \left[\frac{\partial}{\partial t} G_t(\cdot) \right] = F[f] \cdot \frac{\partial}{\partial t} (F[G_t(\cdot)]) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (F[G_t(\cdot) * f]) = \frac{\partial}{\partial t} F[U]. \end{aligned}$$

Таким образом, условие 1) данной теоремы выполняется.

Наконец отметим, что единственность решения задачи Коши (5), (23), для которого выполняется условие 1) данной теоремы, как элемента из $(S_{\beta}^{\alpha*})'$ при каждом фиксированном $t > 0$, следует из единственности решения $F[U](t, \cdot)$, $t > 0$, соответствующей двойственной по Фурье задачи Коши (в том, что $F[U]$ единственное, убеждаемся традиционно – методом от противного). Теорема доказана.

Далее, пусть многочлен $P(\cdot, \cdot)$ из уравнения (5), кроме условия $\{\vec{p}; \vec{h}\}$ -параболичности, удовлетворяет еще и следующему:

$$\exists \delta_1^* > 0 \quad \exists \delta_2^* > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall t > 0: \quad \operatorname{Re} P(t, x) \geq -\delta_1^* \widetilde{\|x\|^{\vec{h}}} - \delta_2^* \quad (24)$$

(например, этому условию удовлетворяет равномерно по t $2\vec{b}$ -параболическое уравнение).

Имеет место следующее вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 6. Если $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, а

$$\widehat{\theta}_t(x) \equiv \exp \left\{ - \int_0^t P(\tau, x) d\tau \right\},$$

то

$$\forall \varphi \in \Phi \quad \exists t_0 \in (0; 1) \quad \forall t \in (0; t_0): \quad \widehat{\theta}_t(\cdot) \varphi(\cdot) \in \Phi.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\Phi = S_{\alpha}^{\beta*}$. Тогда достаточно убедиться в том, что

$$\begin{aligned} \exists \delta_0 > 0 \quad \exists t_0 \in (0; 1) \quad \forall t \in (0; t_0) \quad \exists c_1 > 0 \quad \exists A_1 > 0 \quad \forall l \in \mathbb{Z}_+^n \quad \forall x \in \mathbb{R}^n: \\ |D_x^l(\widehat{\theta}_t(x)\varphi(x))| \leq c_1 A_1^{|l|_*} l^{\beta^* l} e^{-\delta_0 \widetilde{\|x\|^{\vec{h}}}}, \quad \varphi \in \Phi. \end{aligned} \quad (25)$$

Для произвольного $l \in \mathbb{Z}_+^n$

$$|D_x^l(\widehat{\theta}_t(x)\varphi(x))| \leq \sum_{|k|_* = 0}^{|l|_*} C_l^k |D_x^k \widehat{\theta}_t(x)| |D_x^{l-k} \varphi(x)|, \quad (t, x) \in \Omega,$$

и, поскольку $\varphi \in \Phi$, то, учитывая (2),

$$|D_x^l(\widehat{\theta}_t(x)\varphi(x))| \leq c(2A)^{|l|_*} \sum_{|k|_* = 0}^{|l|_*} (l-k)^{\beta^*(l-k)} (|D_x^k \widehat{\theta}_t(x)| e^{-\delta \widetilde{\|x\|^{\vec{h}}}}). \quad (26)$$

Размышляя аналогичным образом, как и при установлении неравенств (12)–(18), учитывая при этом условие (24), получим, что

$$e^{-\delta \widetilde{\|x\|^{\vec{h}}}} |D_x^k \widehat{\theta}_t(x)| \leq c_2 A_2^{|k|_*} k^{\beta^* k} e^{-(\delta/4 - t\delta_1^*) \widetilde{\|x\|^{\vec{h}}}}, \quad (t, x) \in \Omega, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n,$$

где c_2, A_2 – положительные постоянные, не зависящие от k и x .

Отсюда уже при $0 < t < \delta/(4\delta_1^*)$, а также из неравенства (26) приходим к утверждению (25).

Нетрудно убедиться в том, что данное утверждение справедливо и в случае, когда $\Phi = S_{\alpha}^{\beta*}$. Лемма доказана.

Следующая теорема характеризует мультипликатор в пространстве Φ .

ТЕОРЕМА 5. Для того, чтобы функция $c(\cdot)$ была мультипликатором в пространстве Φ , необходимо и достаточно, чтобы для каждого фиксированного t , $0 < t \ll 1$, произведение $c(\cdot)\theta_t(\cdot) \in \Phi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Для этого достаточно установить выполнение следующих условий:

- 1) $\forall \varphi \in \Phi: c(\cdot)\varphi(\cdot) \in \Phi$;
- 2) $\forall \{\varphi_\nu, \nu \in \mathbb{N}\} \subset \Phi, \varphi_\nu \xrightarrow[\nu \rightarrow \infty]{\Phi} 0: c(\cdot)\varphi_\nu(\cdot) \xrightarrow[\nu \rightarrow \infty]{\Phi} 0$.

Согласно утверждению леммы 6

$$\forall \varphi \in \Phi \exists t_0 \in (0; 1) \forall t \in (0; t_0): c(\cdot)\varphi(\cdot) = (c(\cdot)\theta_t(\cdot))(\widehat{\theta_t(\cdot)\varphi(\cdot)}) \in \Phi,$$

как произведение функций из Φ . Таким образом, условие 1) выполняется.

Для доказательства 2) в случае, когда $\Phi = S_{\alpha^*}^{\beta^*}$, достаточно показать, что

$$\text{I) } \forall k \in \mathbb{Z}_+^n:$$

$$\left| D_x^k(c(x)\varphi_\nu(x)) \right| \underset{\nu \rightarrow \infty}{\overset{x \in \mathbb{K}\mathbb{C}\mathbb{R}^n}{\Rightarrow}} 0;$$

$$\text{II) } \exists \delta > 0 \exists c_1 > 0 \exists A_1 > 0 \forall \nu \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \forall x \in \mathbb{R}^n:$$

$$\left| D_x^k(c(x)\varphi_\nu(x)) \right| \leq c_1 A_1^{|k|_*} k^{\beta^* k} e^{-\delta \widehat{\|x\|}^{\tilde{h}}}.$$

Поскольку $\varphi_\nu(x) \xrightarrow[\nu \rightarrow \infty]{\Phi} 0$, то

$$\text{а) } \forall k \in \mathbb{Z}_+^n: \left| D_x^k \varphi_\nu(x) \right| \underset{\nu \rightarrow \infty}{\overset{x \in \mathbb{K}\mathbb{C}\mathbb{R}^n}{\Rightarrow}} 0;$$

$$\text{б) } \forall \nu \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{Z}_+^n: |D_x^k \varphi_\nu(x)| \leq c_0 A_0^{|k|_*} k^{\beta^* k} e^{-\delta_0 \widehat{\|x\|}^{\tilde{h}}}, x \in \mathbb{R}^n, \text{ где } c_0, A_0, \delta_0 - \text{положительные константы, не зависящие от } x, k \text{ и } \nu.$$

Условие I) выполняется. В самом деле, согласно условию а)

$$\forall k \in \mathbb{Z}_+^n: \left| D_x^k(c(x)\varphi_\nu(x)) \right| \leq \sum_{|l|_*=0}^{|k|_*} C_k^l \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{ |D_x^l c(x)| \} |D_x^{k-l} \varphi_\nu(x)| \underset{\nu \rightarrow \infty}{\overset{x \in \mathbb{K}\mathbb{C}\mathbb{R}^n}{\Rightarrow}} 0.$$

Докажем выполнение условия II). Благодаря б) и рассуждениям, проведенным при доказательстве неравенства (25), получаем

$$\left| D_x^l(\widehat{\theta_t}(x)\varphi_\nu(x)) \right| \leq c_2 A_2^{|l|_*} l^{\beta^* l} e^{-(\delta_0/4 - t\delta_1^*) \widehat{\|x\|}^{\tilde{h}}},$$

где c_2, A_2 – положительные константы, которые не зависят от $l \in \mathbb{Z}_+^n$ и $x \in \mathbb{R}^n$, а $0 < t < \delta_0/(4\delta_1^*)$.

Отсюда, учитывая, что $c(\cdot)\theta_t(\cdot) \in \Phi$, $t \in (0; 1)$, получаем

$$\begin{aligned} & \forall \nu \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \quad \forall x \in \mathbb{R}^n : \\ & |D_x^k(c(x)\varphi_\nu(x))| \leq \sum_{|l|_*=0}^{|k|_*} C_k^l |D_x^{k-l}(c(x)\theta_t(x))| |D_x^l(\hat{\theta}_t(x)\varphi_\nu(x))| \\ & \leq c_2 c_3 e^{-(\delta_0/4 - t\delta_1^*) \widetilde{\|x\|}^{\vec{h}}} \\ & \quad \times \sum_{|l|_*=0}^{|k|_*} C_k^l A_2^{|l|_*} l^{\beta^* l} A_3^{|k-l|_*} (k-l)^{\beta^* (k-l)} e^{-\delta_3 \widetilde{\|x\|}^{\vec{h}}} \\ & \leq c_4 A_4^{|k|_*} k^{\beta^* k} e^{-\delta_4 \widetilde{\|x\|}^{\vec{h}}}, \end{aligned}$$

где c_4, A_4, δ_4 – положительные константы, которые не зависят от ν, k и x . Таким образом, доказано выполнение условия II).

В случае, когда $\Phi = S_{\alpha^*}$, выполнение условия II) доказывается аналогично. Теорема доказана.

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 6. Пусть уравнение (5) является равномерно по t $\{\vec{p}, \vec{h}\}$ -параболическим, для которого выполняется условие (24). Тогда для того, чтобы задача Коши (5), (23) была корректно разрешимой (т.е. имела единственное решение, которое непрерывно зависит от начальных данных) и

- 1) ее решение $U(t, \cdot)$ при каждом фиксированном $t > 0$ принадлежало пространству $F[\Phi]$;
- 2) $\frac{\partial}{\partial t} F[U] = F\left[\frac{\partial U}{\partial t}\right]$, $t > 0$,

необходимо и достаточно, чтобы $F[f]$ был мультипликатором в пространстве Φ . При этом всегда будет иметь место равенство

$$U(t, x) = G_t(x) * f, \quad (t, x) \in \Omega.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку нас интересуют решения уравнения (5), которые при каждом фиксированном $t > 0$ являются элементами пространства $F[\Phi]$ и по t удовлетворяют условию 2) данной теоремы, то, учитывая тот факт, что отображения

$$\begin{aligned} F(F^{-1}): S_\alpha^\beta &\rightarrow S_\beta^\alpha, & F(F^{-1}): S_\beta &\rightarrow S^\beta, \\ \alpha_j > 0, & \beta_j > 0, & j &\in \{1; \dots; n\}, \end{aligned}$$

являются взаимнооднозначными и непрерывными [1, с. 155], получаем эквивалентность уравнения (5) с уравнением

$$\frac{\partial \tilde{U}(t, \xi)}{\partial t} = P(t, \xi) \tilde{U}(t, \xi), \quad (t, \xi) \in \Omega \quad (27)$$

(здесь $\tilde{V} \equiv F[V]$), причем начальное условие (23) будет выполняться только тогда, когда

$$\tilde{U}(t, \cdot) \xrightarrow[t \rightarrow +0]{\Phi'} \tilde{f}. \quad (28)$$

Таким образом, вопрос о корректной разрешимости задачи Коши (5), (23) в пространстве $F[\Phi]$ эквивалентен вопросу о корректной разрешимости задачи Коши (27), (28) в пространстве Φ .

Докажем *необходимость*. Для этого достаточно показать, что когда задача Коши (27), (28) корректно разрешима, то $\tilde{f}$ – мультипликатор в Φ .

Отметим, что уравнение (27) – обычное дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, общее решение которого

$$\tilde{U}(t, \xi) = c(\xi)\theta_t(\xi), \quad (t, \xi) \in \Omega. \quad (29)$$

Поскольку $\tilde{U}(t, \cdot) \in \Phi$ при каждом фиксированном $t > 0$, то согласно теореме 5 функция $c(\cdot)$ является мультипликатором в пространстве Φ .

Учитывая утверждение леммы 4, из условия (28) и из равенства (29) находим, что

$$\forall \varphi \in \Phi: \quad \langle c(\cdot), \varphi(\cdot) \rangle = \langle \tilde{f}(\cdot), \varphi(\cdot) \rangle.$$

Отсюда на основании единственности решения задачи Коши (27), (28) убеждаемся в том, что $\tilde{f}$ – регулярный функционал, порожденный мультипликатором в пространстве Φ . Необходимость доказана. *Достаточность* фактически получается из теоремы 4 и теоремы 1 из [4].

Наконец, заметим, что решение U задачи Коши (5), (23) непрерывно зависит от начальных данных задачи, поскольку соответствующее решение $\tilde{U}$ обладает таким свойством, а F^{-1} – непрерывный оператор из Φ в $F[\Phi]$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Пространства основных и обобщенных функций. М.: Физматгиз, 1958.
- [2] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1958.
- [3] Городецкий В. В., Житарюк И. В. О скорости локализации решений задачи Коши для уравнений параболического типа с вырождением // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 4. С. 697–699.
- [4] Борок В. М. Решение задачи Коши для некоторых типов систем линейных уравнений в частных производных // Докл. АН СССР. 1984. Т. 97. № 6. С. 949–952.

Черновицкий национальный университет им. Юрия Фельдовича, Украина
E-mail: vladlit@chnu.cv.ua

Поступило
08.10.2002