Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Матвеев, Собственные значения отображения Синюкова для геодезически эквивалентных метрик глобально упорядочены, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 3, 412–423

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2502>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 12:50:04

УДК 517.9+514.17

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ОТОБРАЖЕНИЯ СИНЮКОВА ДЛЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ МЕТРИК ГЛОБАЛЬНО УПОРЯДОЧЕНЫ

В. С. Матвеев

Пусть все геодезические двух римановых метрик g и $\bar{g}$, заданных на одном (связном, геодезически полном) многообразии M^n , совпадают. В каждой точке $x \in M^n$ рассмотрим совместные собственные значения $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ этих метрик (предполагая $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_n$) и числа

$$\lambda_i = (\rho_1 \rho_2 \dots \rho_n)^{1/(n+1)} \frac{1}{\rho_i}.$$

Мы покажем, что числа λ_i упорядочены на всем многообразии: для любых двух точек x и y многообразия, число $\lambda_k(x)$ всегда не больше числа $\lambda_{k+1}(y)$. Если $\lambda_k(x) = \lambda_{k+1}(y)$, то существует точка $z \in M^n$, в которой $\lambda_k(z) = \lambda_{k+1}(z)$. Если многообразие замкнуто и если все совместные собственные значения этих метрик различны в каждой точке, то многообразие покрывается тором.

Библиография: 14 названий.

1. Формулировки. Пусть $g, \bar{g}$ – две C^2 -гладкие римановы метрики на n -мерном многообразии M^n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Метрики g и $\bar{g}$ называются *геодезически эквивалентными*, если все их геодезические, рассматриваемые как непараметризованные кривые, совпадают.

Рассмотрим послойно-линейное отображение

$$G: TM^n \rightarrow TM^n,$$

заданное тензором

$$G_j^i = g^{i\alpha} \bar{g}_{\alpha j}.$$

В инвариантных терминах для любой точки $x \in M^n$ ограничение послойно-линейного отображения G на касательное пространство $T_x M^n$ является таким линейным преобразованием пространства $T_x M^n$, что для любых двух векторов $u, v \in T_x M^n$ справедливо равенство

$$g(G(u), v) = \bar{g}(u, v),$$

где $g(\cdot, \cdot)$ и $\bar{g}(\cdot, \cdot)$ обозначают скалярные произведения в метриках g и $\bar{g}$ соответственно.

Работа выполнена при финансовой поддержке European Post-Doctoral Institute for Mathematical Sciences.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Отображением Синюкова* для пары метрик $g, \bar{g}$ называется послойно-линейное отображение

$$B: TM^n \rightarrow TM^n,$$

заданное тензором

$$B_j^i = \left(\frac{\det(\bar{g})}{\det(g)} \right)^{1/(n+1)} \bar{g}^{i\alpha} g_{\alpha j}.$$

В инвариантных терминах

$$B = (\det(G))^{1/(n+1)} G^{-1}.$$

Отображение Синюкова и его характеристические инварианты играют важную роль в теории геодезически эквивалентных метрик (см., например, обзорную статью [1]). В частности, если метрики $g, \bar{g}$ геодезически эквивалентны, то метрики $g_B = g_{i\alpha} B_j^\alpha$, $\bar{g}_B = \bar{g}_{i\alpha} B_j^\alpha$ тоже геодезически эквивалентны (см. [2]).

Собственными значениями отображения G в точке $x \in M^n$ будем называть собственные значения ограничения послойно-линейного отображения G на касательное пространство $T_x M^n$, т.е. корни многочлена

$$\det(G - \rho E)|_x = \left(\frac{1}{\det(g)} \det(\bar{g} - \rho g) \right) \Big|_x.$$

Собственные значения отображения G называются также *совместными собственными значениями* метрик $g, \bar{g}$.

Аналогично, *собственными значениями послойно-линейного отображения B* в точке $x \in M^n$ мы будем называть корни многочлена

$$\det(B - \lambda E)|_x = \left(\left(\frac{1}{\det(\bar{g})} \right)^{1/(n+1)} \det \left(\frac{g}{(\det(g))^{1/(n+1)}} - \lambda \frac{\bar{g}}{(\det(\bar{g}))^{1/(n+1)}} \right) \right) \Big|_x.$$

Так как метрики $g, \bar{g}$ положительно определены, в каждой точке $x \in M^n$ все собственные значения послойно-линейных отображений G и B вещественны и положительны. С учетом кратности их количество равно n . Пусть $\rho_1(x), \rho_2(x), \dots, \rho_n(x)$ – упорядоченный по убыванию набор собственных значений послойно-линейного отображения G в точке $x \in M^n$:

$$\rho_1(x) \geq \rho_2(x) \geq \dots \geq \rho_n(x).$$

Пусть $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_n(x)$ – упорядоченный по возрастанию набор собственных значений послойно-линейного отображения B в точке $x \in M^n$:

$$\lambda_1(x) \leq \lambda_2(x) \leq \dots \leq \lambda_n(x).$$

Числа $\lambda_i(x)$ и $\rho_i(x)$ очевидно связаны соотношениями

$$\lambda_i(x) = (\rho_1(x) \rho_2(x) \dots \rho_n(x))^{1/(n+1)} \frac{1}{\rho_i(x)}, \quad \rho_i(x) = \frac{1}{\lambda_1(x) \lambda_2(x) \dots \lambda_n(x)} \frac{1}{\lambda_i(x)}.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть метрики $g, \bar{g}$ геодезически эквивалентны на многообразии M^n . Пусть многообразие M^n связно и геодезически полно по отношению к метрике g . Тогда для любых точек $x, y \in M^n$, для любого числа $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$

$$\lambda_i(x) \leq \lambda_{i+1}(y).$$

При этом выполнение неравенства $\lambda_i(x) < \lambda_{i+1}(x)$ для какой-нибудь точки $x \in M^n$ влечет справедливость неравенства $\lambda_i(z) < \lambda_{i+1}(z)$ для почти всех точек z многообразия M^n .

Другими словами, собственные значения отображения Синюкова для геодезически эквивалентных метрик глобально упорядочены на всем связном геодезически полном (по отношению к любой из метрик) многообразии.

СЛЕДСТВИЕ 1 [3]. Пусть метрики $g, \bar{g}$ геодезически эквивалентны на многообразии M^n . Пусть многообразие M^n связно и геодезически полно по отношению к метрике g . Тогда если метрики g и $\bar{g}$ пропорциональны в каждой точке некоторого подмножества $U \subset M^n$ положительной меры, то $\bar{g} = \text{Const} \cdot g$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть метрики $g, \bar{g}$ геодезически эквивалентны на многообразии M^n . Пусть многообразие M^n связно и геодезически полно по отношению к метрике g . Тогда если для точек $x, y \in M^n$, для вещественного числа λ и для целого числа $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ выполняется равенство

$$\lambda_i(x) = \lambda_{i+1}(y) = \lambda,$$

то существует такая точка $z \in M^n$, что $\lambda_i(z) = \lambda_{i+1}(z) = \lambda$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть метрики $g, \bar{g}$ геодезически эквивалентны на связном замкнутом многообразии M^n . Пусть все собственные значения послойно-линейного отображения G различны в каждой точке многообразия. Тогда многообразие M^n накрывается тором T^n .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В двумерном случае теорема 3 доказана в [4], а теоремы 1, 2 вытекают из классификации квадратично интегрируемых геодезических потоков на полных поверхностях, полученной в [5], [6]. В трехмерном случае теоремы 1–3 доказаны в [7]–[9].

Основным инструментом доказательств теорем 1–3 является следующая теорема, доказанная в [10], [11] (см. также [12], [13]).

Для каждой точки $x \in M^n$ рассмотрим характеристический многочлен

$$\det(G - \rho E)|_x = c_0 \rho^n + c_1 \rho^{n-1} + \dots + c_n. \quad (1)$$

Коэффициенты этого многочлена являются C^2 -гладкими функциями на многообразии, причем $c_0 \equiv (-1)^n$.

Рассмотрим послойно-линейные отображения

$$S_0, S_1, \dots, S_{n-1}: TM^n \rightarrow TM^n,$$

заданные общей формулой

$$S_k = \left(\frac{\det(g)}{\det(\bar{g})} \right)^{(k+2)/(n+1)} \sum_{i=0}^k c_i G^{k-i+1}.$$

Компоненты тензора, соответствующего послойно-линейному отображению S_k , будем обозначать $(S_k)_j^i$.

Рассмотрим функции $I_k: T^*M^n \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, заданные общей формулой

$$I_k(x, p) = g^{\alpha j}(S_k)_\alpha^i p_i p_j.$$

В инвариантных терминах функции I_k задаются следующим образом. С помощью метрики g отождествим канонически касательное и кокасательное расслоения многообразия M^n . Тогда для любой точки $x \in M^n$, для любого ковектора $\xi \in T_x^*M^n \cong T_x M^n$ значение функции I_k на нем задается

$$I_k(x, \xi) = g(S_k(\xi), \xi).$$

Рассмотрим каноническую симплектическую форму $\omega = dp_i \wedge dx^i$ на кокасательном расслоении T^*M^n . Под *геодезическим потоком* метрики g мы будем понимать гамильтонову систему на кокасательном расслоении T^*M^n , задаваемую гамильтонианом $H(x, \xi) = \frac{1}{2}g(\xi, \xi)$. Известно, что траектории геодезического потока метрики g проектируются в геодезические метрики g . А именно, пусть кривая $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M^n$ является геодезической метрики g . Тогда кривая $(\gamma, \dot{\gamma}): \mathbb{R} \rightarrow T^*M^n \cong T^*M^n$, где $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}M^n \cong T_{\gamma(t)}^*M^n$ суть вектор скорости кривой γ в точке $\gamma(t)$, является траекторией геодезического потока метрики g .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. По теореме Гамильтона–Кэли отображение $-S_{n-1}$ является тождественным. Следовательно, функция $-\frac{1}{2}I_{n-1}$ совпадает с гамильтонианом геодезического потока метрики g .

ТЕОРЕМА 4. Если метрики g и $\bar{g}$ на многообразии M^n геодезически эквивалентны, то функции I_k коммутируют.

Другими словами, если метрики g и $\bar{g}$ геодезически эквивалентны, то функции I_k являются коммутирующими интегралами геодезического потока метрики g .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Квантовая версия теоремы 4 доказана в [3].

Для доказательства теоремы 1 мы рассмотрим следующую функцию на прямом произведении $\mathbb{R} \times T^*M^n$:

$$F_t = t^{n-1}I_{n-1} + t^{n-2}I_{n-2} + \dots + I_0. \quad (2)$$

Для каждой точки $(x, \xi) \in T^*M^n$ функция (2) является многочленом по t . Его корни будем обозначать $t_1(x, \xi), t_2(x, \xi), \dots, t_{n-1}(x, \xi)$, предполагая

$$t_1(x, \xi) \leq t_2(x, \xi) \leq \dots \leq t_{n-1}(x, \xi).$$

Мы покажем, что для каждой точки $(x, \xi) \in T^*M^n$ выполняются неравенства

$$\lambda_i(x) \leq t_i(x, \xi) \leq \lambda_{i+1}(x).$$

Так как коэффициенты многочлена (2) сохраняются вдоль геодезической, его корни тоже сохраняются.

Соединяя произвольные точки $x, y \in M^n$ геодезической, получаем

$$\lambda_i(x) \leq t_i \leq \lambda_{i+1}(y),$$

откуда вытекает теорема 1.

Для доказательства теоремы 2 мы покажем, что геодезическая γ , соединяющая точки x и y , для которых

$$\lambda_i(x) = \lambda_{i+1}(y) = \lambda,$$

проходит через некоторую точку $z \in M^n$, в которой $\lambda_i(z) = \lambda_{i+1}(z) = \lambda$. Фактически мы покажем, что в каждой точке w этой геодезической либо $\lambda_i(w) = \lambda$, либо $\lambda_{i+1}(w) = \lambda$, либо реализуются обе эти возможности. Так как множества

$$\Gamma_0 = \{w \in \gamma : \lambda_i(w) = \lambda\}, \quad (3)$$

$$\Gamma_1 = \{w \in \gamma : \lambda_{i+1}(w) = \lambda\}, \quad (4)$$

очевидно, замкнуты и их объединение совпадает с геодезической γ , то их пересечение, т.е. множество точек $z \in \gamma$, в которых $\lambda_i(z) = \lambda_{i+1}(z) = \lambda$, непусто.

Если совместные собственные значения метрик $g, \bar{g}$ различны в каждой точке многообразия, то интегралы I_k из теоремы 4 функционально независимы. Если к тому же многообразие замкнуто, то типическая связная компонента поверхности уровня $\{I_0 = \text{const}_0, I_1 = \text{const}_1, \dots, I_{n-1} = \text{const}_{n-1}\}$ является n -мерным тором T^n , который называется тором Лиувилля. Мы покажем, что в предположениях теоремы для подходящих констант $\text{const}_0, \text{const}_1, \dots, \text{const}_{n-1}$ ограничение проекции $\pi: T^*M^n \rightarrow M^n$, $\pi(x, \xi) = x$, на соответствующий тор Лиувилля не имеет особых точек и, тем самым, является накрытием многообразия M^n .

Автор благодарен П. Топалову и Ур. Хаменштадт за ценные обсуждения, А. В. Аминовой, А. В. Болсинову, А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко за внимание к работе.

2. Доказательства. Рассмотрим функцию

$$F_t: \mathbb{R} \times T^*M^n \rightarrow \mathbb{R},$$

$$F_t(x, \xi) = t^{n-1}I_{n-1}(x, \xi) + t^{n-2}I_{n-2}(x, \xi) + \dots + I_0(x, \xi).$$

Для каждой точки $(x, \xi) \in T^*M^n$ F_t является многочленом по t с неположительным старшим коэффициентом. Если функции $I_0, I_1, \dots, I_{n-1}$ являются интегралами геодезического потока метрики g , то для каждого фиксированного t функция F_t является интегралом геодезического потока метрики g .

ЛЕММА 1. *Верны следующие утверждения:*

- 1) для любой точки $(x, \xi) \in T^*M^n$ все корни многочлена F_t вещественны и положительны;
- 2) для любой точки $(x, \xi) \in T^*M^n$, для любого $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$

$$\lambda_i(x) \leq t_i(x, \xi) \leq \lambda_{i+1}(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем точку $x \in M^n$. Для простоты будем писать $\lambda_i, \rho_i, t_i(\xi)$ вместо $\lambda_i(x), \rho_i(x), t_i(x, \xi)$. Подходящей заменой координат в кокасательном пространстве $T_x^*M^n$ первая метрика приводится к единично-диагональному виду, а вторая — к диагональному

$$\text{diag}(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n).$$

Обозначим через σ_j элементарный симметрический многочлен степени j от n переменных $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Обозначим через $\sigma_j(\check{\lambda}_i)$ элементарный симметрический многочлен степени j от $n-1$ переменной $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n$. Покажем по индукции, что матрица отображения S_k задается

$$S_k = (-1)^{n-k} \operatorname{diag}(\sigma_{n-k-1}(\check{\lambda}_1), \sigma_{n-k-1}(\check{\lambda}_2), \dots, \sigma_{n-k-1}(\check{\lambda}_n)). \quad (5)$$

Очевидно, коэффициенты c_k характеристического полинома (1) задаются формулой

$$c_k = (-1)^{n-k} \frac{\sigma_{n-k}}{(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n)^{k+1}}.$$

В частности,

$$\det(G) = c_n = \frac{1}{(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n)^{n+1}}.$$

База индукции: для $k=0$ имеем

$$\begin{aligned} S_0 &= \left(\frac{1}{\det(G)} \right)^{2/(n+1)} c_0 G \\ &= (-1)^n (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n)^2 \operatorname{diag} \left(\frac{1}{\lambda_1 (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n)}, \frac{1}{\lambda_2 (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n)}, \dots, \frac{1}{\lambda_n (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n)} \right) \\ &= (-1)^n \operatorname{diag}(\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_n, \lambda_1 \lambda_3 \dots \lambda_n, \dots, \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-2} \lambda_n, \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-2} \lambda_{n-1}) \\ &= (-1)^n \operatorname{diag}(\sigma_{n-1}(\check{\lambda}_1), \sigma_{n-1}(\check{\lambda}_2), \dots, \sigma_{n-1}(\check{\lambda}_n)). \end{aligned}$$

Индукционный переход: пусть равенство (5) выполняется для S_{k-1} . Тогда для S_k имеем

$$\begin{aligned} S_k &= \left(\frac{1}{\det(G)} \right)^{1/(n+1)} G \left(S_{k-1} + \left(\frac{1}{\det(G)} \right)^{(k+1)/(n+1)} c_k E \right) \\ &= \operatorname{diag} \left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n} \right) \\ &\quad \times \operatorname{diag} \left((-1)^{n-k} (\sigma_{n-k} - \sigma_{n-k}(\check{\lambda}_1)), (-1)^{n-k} (\sigma_{n-k} - \sigma_{n-k}(\check{\lambda}_2)), \dots, \right. \\ &\quad \left. (-1)^{n-k} (\sigma_{n-k} - \sigma_{n-k}(\check{\lambda}_n)) \right). \end{aligned}$$

Используя $(\sigma_l - \sigma_l(\check{\lambda}_i)) = \lambda_i \sigma_{l-1}(\check{\lambda}_i)$, получаем, что матрица S_k является диагональной матрицей

$$(-1)^{n-k} \operatorname{diag}(\sigma_{n-k-1}(\check{\lambda}_1), \sigma_{n-k-1}(\check{\lambda}_2), \dots, \sigma_{n-k-1}(\check{\lambda}_n)).$$

Равенство (5) доказано.

Таким образом, имеем

$$I_k = (-1)^{n-k} \sum_{i=1}^n \sigma_{n-k-1}(\check{\lambda}_i) p_i^2.$$

Используя следующее очевидное равенство:

$$\sum_{k=0}^{n-1} t^k \sigma_{n-k-1}(\check{\lambda}_i) (-1)^{n-k} = -(t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \dots (t - \lambda_{i-1})(t - \lambda_{i+1}) \dots (t - \lambda_n),$$

получаем, что многочлен F_t задается формулой

$$F_t = \sum_{k=0}^{n-1} t^k I_k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^n t^k (-1)^{n-k} \sigma_{n-k-1}(\check{\lambda}_i) p_i^2 \right) = - \sum_{i=1}^n \Pi_i(t) p_i^2, \quad (6)$$

где функции $\Pi_i(t)$ задаются

$$\Pi_i(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \cdots (t - \lambda_{i-1})(t - \lambda_{i+1}) \cdots (t - \lambda_n).$$

Мы видим, что F_t является многочленом степени $n - 1$ по t с коэффициентами, зависящими от ковектора $\xi = (p_1, p_2, \dots, p_n)$. Таким образом, нам необходимо показать, что все корни $t_i(\xi)$ многочлена (6) вещественны и что для любого ковектора ξ корень $t_i(\xi)$ лежит на отрезке $[\lambda_i, \lambda_{i+1}]$. Из соображений непрерывности достаточно показать это в предположении, что все p_i отличны от нуля и все собственные значения λ_i различны. Тогда для любого $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$ знаки значений многочлена F_t при $t = \lambda_i$ и при $t = \lambda_{i+1}$ различны. Действительно, при $i \neq j$ имеем

$$\Pi_i(\lambda_j) = 0.$$

Следовательно, значение $(-1)^{n-i+1} F_{\lambda_i}$ задается формулой

$$\begin{aligned} (-1)^{n-i-1} F_{\lambda_i} &= (-1)^{n-i} (\lambda_i - \lambda_1)(\lambda_i - \lambda_2) \cdots (\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1}) \cdots (\lambda_i - \lambda_n) p_i^2 \\ &= (\lambda_i - \lambda_1)(\lambda_i - \lambda_2) \cdots (\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_{i+1} - \lambda_i) \cdots (\lambda_n - \lambda_i) p_i^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Так как $\lambda_i > \lambda_j$ для $i > j$ и так как, по предположению, $p_i^2 > 0$, то число (7) положительно и, следовательно, знаки значений многочлена F_t при $t = \lambda_i$ и при $t = \lambda_{i+1}$ различны. Следовательно, существует хотя бы один корень t многочлена F_t внутри открытого интервала $]\lambda_i, \lambda_{i+1}[$. Степень многочлена F_t равна $n - 1$, всего мы имеем $n - 1$ непересекающихся интервалов, на каждом из которых лежит корень.

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть точка $x \in M^n$. Рассмотрим произвольное число $\tau > 0$. Если для любого элемента ξ некоторого подмножества $U \subset T_x^* M^n$ положительной меры число τ является корнем кратности $k \geq 1$ многочлена $F_t(x, \xi)$, то число τ является собственным значением кратности $k + 1$ отображения B в точке x . В частности, если для любого элемента $\xi \in U^n$ справедливо равенство $t_i(x, \xi) = \tau$, то $\tau = \lambda_i(x) = \lambda_{i+1}(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для любого ковектора $\xi = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in U \subset T_x^* M^n$ число τ является корнем многочлена $F_t(x, \xi)$. Обозначим через

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_m$$

различные собственные значения отображения B в точке x . Кратность собственного значения λ_i обозначим через k_i , так что $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$. В этих обозначениях функции $\Pi_i(t)$ из формулы (6) переписываются как

$$\Pi_i(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} (t - \lambda_2)^{k_2} \cdots (t - \lambda_i)^{k_i-1} \cdots (t - \lambda_m)^{k_m},$$

и, следовательно, многочлен F_t задается формулой

$$F_t = - \sum_{i=1}^m \Pi_i(t) p_i^2 = -(t - \lambda_1)^{k_1-1} (t - \lambda_2)^{k_2-1} \dots (t - \lambda_m)^{k_m-1} \left(\sum_{i=1}^m \tilde{\Pi}_i(t) P_i^2 \right),$$

где $\tilde{\Pi}_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $P_i^2: T_x^* M^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, суть следующие функции:

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_i(t) &= (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \dots (t - \lambda_{i-1})(t - \lambda_{i+1}) \dots (t - \lambda_m), \\ P_1^2 &= p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_{k_1}^2, \quad P_2^2 = p_{k_1+1}^2 + \dots + p_{k_1+k_2}^2, \quad \dots, \\ P_m^2 &= p_{k_1+k_2+\dots+k_{m-1}+1}^2 + \dots + p_n^2. \end{aligned}$$

Для каждого $\tau \in \mathbb{R}$, по крайней мере, одно из чисел $\Pi_i(\tau)$ отлично от нуля, так что множество

$$Q_\tau := \left\{ (p_1, p_2, \dots, p_n) \in T_x^* M^n : \sum_{i=1}^m \tilde{\Pi}_i(\tau) P_i^2 = 0 \right\}$$

является квадрикой и, следовательно, имеет меру нуль.

Таким образом, если подмножество U имеет положительную меру, то $U \setminus Q_\tau$ непусто. Следовательно, число τ является корнем многочлена

$$(t - \lambda_1)^{k_1-1} (t - \lambda_2)^{k_2-1} \dots (t - \lambda_m)^{k_m-1}$$

кратности k . Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть метрики $g, \bar{g}$ геодезически эквивалентны на многообразии M^n . Рассмотрим произвольную геодезическую $\gamma(\tau)$ (для первой метрики). Рассмотрим соответствующую траекторию геодезического потока метрики g . Канонически отождествим (с помощью метрики g) касательное и кокасательное расслоения к многообразию M^n . Тогда траектория геодезического потока, соответствующая геодезической γ , является кривой

$$(\gamma, \dot{\gamma}): \mathbb{R} \rightarrow TM^n \cong T^*M^n, \quad (\gamma, \dot{\gamma})(\tau) = (\gamma(\tau), \dot{\gamma}(\tau)),$$

где $\dot{\gamma}(\tau) \in T_{\gamma(\tau)} M^n$ суть вектор скорости геодезической в точке $\gamma(\tau) \in M^n$. Рассмотрим две произвольные точки $\gamma(\tau_1)$ и $\gamma(\tau_2)$, лежащие на геодезической γ . По лемме 1 для любого $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ имеем

$$\begin{aligned} \lambda_i(\gamma(\tau_1)) &\leq t_i(\gamma(\tau_1), \dot{\gamma}(\tau_1)) \leq \lambda_{i+1}(\gamma(\tau_1)), \\ \lambda_i(\gamma(\tau_2)) &\leq t_i(\gamma(\tau_2), \dot{\gamma}(\tau_2)) \leq \lambda_{i+1}(\gamma(\tau_2)). \end{aligned}$$

Так как коэффициенты $I_0, I_1, \dots, I_{n-1}$ многочлена F_t постоянны на траекториях геодезического потока, то $t_i(\gamma(\tau_1), \dot{\gamma}(\tau_1)) = t_i(\gamma(\tau_2), \dot{\gamma}(\tau_2))$. Следовательно,

$$\lambda_i(\gamma(\tau_1)) \leq \lambda_{i+1}(\gamma(\tau_2)).$$

Так как любые две точки геодезически полного многообразия можно соединить геодезической, для любых двух точек $x, y \in M^n$ мы имеем

$$\lambda_i(x) \leq \lambda_{i+1}(y),$$

и первая часть теоремы 1 доказана.

Пусть теперь для каждой точки y некоторого подмножества $V \subset M^n$ выполняется равенство $\lambda_i(y) = \lambda_{i+1}(y)$ (для некоторого фиксированного $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$). Из первой части теоремы 1 вытекает, что тогда значение λ_i постоянно для всех точек множества V . Обозначим его через λ . Пусть $\lambda_i(x) < \lambda_{i+1}(x)$. Рассмотрим множество $U \subset T_x M^n$ всех векторов скорости в точке x всех геодезических, соединяющих точку x с хотя бы одной точкой из V . По лемме 2 множество U имеет меру нуль. Так как V лежит в образе экспоненциального отображения $\exp_x: T_x M^n \rightarrow M^n$ множества U , то множество V тоже имеет меру нуль. Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть метрики $g, \bar{g}$ геодезически эквивалентны на связном геодезически полном по отношению к метрике g многообразии M^n . Предположим, что для некоторых точек $x, y \in M^n$ и для некоторого числа $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$

$$\lambda_i(x) = \lambda_{i+1}(y) = \lambda.$$

Если для некоторой точки $z \in M^n$ выполнено $\lambda_{i-1}(z) = \lambda$ (или $\lambda_{i+2}(z) = \lambda$), то по теореме 1 для каждой точки $z \in M^n$ имеем $\lambda_i(z) = \lambda$ (соответственно $\lambda_{i+1}(z) = \lambda$) и утверждение теоремы, очевидно, выполнено.

Рассмотрим функцию $F_\lambda: T^*M^n \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть для некоторой точки $(z, \nu) \in T^*M^n$, $\nu \neq 0$, дифференциал dF_λ равен 0. Покажем, что тогда хотя бы одно из чисел $\lambda_i(z)$, $\lambda_{i+1}(z)$ равно λ .

Действительно, заменой координат в окрестности точки z приведем метрику g в точке z к единично-диагональному виду, а метрику $\bar{g}$ к диагональному $\text{diag}(\rho_1(z), \dots, \rho_n(z))$. Тогда функция F_λ (как функция на кокасательном пространстве $T_z^*M^n$) задается формулой

$$F_\lambda = - \sum_{i=1}^n \Pi_i(\lambda) p_i^2.$$

Следовательно, частные производные этой функции по переменным p_i

$$\frac{\partial F_\lambda}{\partial p_i} = -2\Pi_i(\lambda)p_i.$$

Поэтому λ является одним из собственных значений отображения B . По теореме 1 либо $\lambda_i(z) = \lambda$, либо $\lambda_{i+1}(z) = \lambda$.

Так как многообразие M^n геодезически полно, существует такая геодезическая $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M^n$, что $\gamma(0) = x$ и $\gamma(1) = y$. Рассмотрим соответствующую геодезическую траекторию $(\gamma, \dot{\gamma}): \mathbb{R} \rightarrow TM^n \cong T^*M^n$. Покажем, что дифференциал dF_λ обращается в нуль в каждой точке этой геодезической траектории. Так как функция F_λ является интегралом геодезического потока метрики g , достаточно показать, что дифференциал dF_λ обращается в нуль в начальной точке $(x, \dot{\gamma}(0))$ этой геодезической траектории. По лемме 1

$$\lambda = \lambda_i(x) \leq t_i(x, \dot{\gamma}(0)) \quad \text{и} \quad t_i(y, \dot{\gamma}(1)) \leq \lambda_{i+1}(y) = \lambda.$$

Так как коэффициенты I_k сохраняются вдоль геодезических траекторий,

$$t_i(x, \dot{\gamma}(0)) = t_i(y, \dot{\gamma}(1)),$$

откуда $t_i(x, \dot{\gamma}(0)) = t_i(y, \dot{\gamma}(1)) = \lambda$. Следовательно, геодезическая траектория $(\gamma, \dot{\gamma})$ лежит в топологическом пространстве

$$Q = \{(z, \xi) \in T^*M^n : F_\lambda(z, \xi) = 0\}.$$

Покажем, что дифференциал dF_λ равен 0 в точке $(x, \dot{\gamma}(0)) \in Q \cap T_x^*M^n$. Фактически, мы покажем, что никакая окрестность этой точки в топологическом пространстве Q не гомеоморфна $(2n - 1)$ -мерному диску. Действительно, по предположению, в каждой точке z некоторой окрестности $U \subset M^n$ точки x собственное подпространство ограничения отображения B на $T_z M^n$ одномерно. Следовательно, для некоторого векторного поля ϕ на U

$$B\phi = \lambda_i \phi \quad \text{и} \quad g(\phi, \phi) = 1.$$

Канонически отождествим с помощью метрики g касательное и кокасательное расслоения к многообразию M^n . Если мы приведем заменой координат в окрестности точки z метрику g в точке z к единично-диагональному виду, а метрику $\bar{g}$ к диагональному $\text{diag}(\rho_1(z), \dots, \rho_n(z))$, то i -я компонента вектора ϕ будет равна 1 или -1 , а все остальные компоненты будут равны 0. Более того, i -я компонента произвольного вектора $\nu \in T_z M^n \cong T_z^* M^n$ равна с точностью до знака скалярному произведению $g(\nu, \phi)$.

Для будущего заметим, что коэффициенты многочлена $\Pi_i(t)$ из формулы (6) выражаются через характеристические инварианты отображения B и через λ_i и, следовательно, гладко зависят от точки окрестности U . Для того, чтобы подчеркнуть зависимость многочлена Π_i от точки $z \in U$, мы будем писать $\Pi_i(t; z)$ вместо $\Pi_i(t)$.

Рассмотрим функцию $I: TM^n \rightarrow \mathbb{R}$, $I(z, \nu) = g(\nu, \phi)$. Очевидно, $I(x, \dot{\gamma}(0)) = 0$ и частная производная $\partial I / \partial r_i$ отлична от нуля в точке $(x, \dot{\gamma}(0))$. По теореме о неявной функции некоторая окрестность V точки $(x, \dot{\gamma}(0))$ в топологическом пространстве

$$Q^* = \{(z, \nu) \in TM^n : I(z, \nu) = 0\}$$

гомеоморфна прямому произведению $U' \times D^{n-1}$, где $U' \subset U$ является окрестностью точки x , а D^{n-1} является $(n - 1)$ -мерным диском.

При этом ограничение проекции π на V совпадает с естественной проекцией прямого произведения $U' \times D^{n-1}$ на компоненту U' .

Для каждой точки $(z, \nu) \in V$ рассмотрим точки

$$(z, \nu_+) = \left(z, \nu + \phi \sqrt{\frac{F_\lambda(z, \nu)}{\Pi_i(\lambda; z)}} \right), \quad (z, \nu_-) = \left(z, \nu - \phi \sqrt{\frac{F_\lambda(z, \nu)}{\Pi_i(\lambda; z)}} \right).$$

Так как $\lambda_i(z) \leq \lambda < \lambda_{i+1}(z)$, подкоренное выражение всегда неотрицательно. Оно равно 0, только если $\lambda_i(z) = \lambda$. Легко увидеть, что если для точек $(z^1, \nu^1), (z^2, \nu^2) \in V$ выполняется хотя бы одно из равенств

$$\begin{aligned} (z^1, \nu_+^1) &= (z^2, \nu_+^2), & (z^1, \nu_-^1) &= (z^2, \nu_+^2), \\ (z^1, \nu_+^1) &= (z^2, \nu_-^2), & (z^1, \nu_-^1) &= (z^2, \nu_-^2), \end{aligned}$$

то $(z^1, \nu^1) = (z^2, \nu^2)$.

Непосредственно проверяется, что $F_\lambda(z, \nu_+) = F_\lambda(z, \nu_-) = 0$. С другой стороны, любая точка (z, ξ) некоторой окрестности точки $(x, \dot{\gamma}(0))$ в топологическом пространстве Q является либо точкой (z, ν_+) , либо точкой (z, ν_-) для точки $(z, \nu) = (z, \xi - \phi g(\phi, \xi)) \in V$. Следовательно, некоторая окрестность точки $(x, \dot{\gamma}(0))$ в топологическом пространстве Q гомеоморфна прямому произведению двух экземпляров U' , склеенных по точкам z , в которых $\lambda_i(z) = \lambda$, на диск D^{n-1} . Так как $\lambda_i(x) = \lambda$, никакая окрестность точки $(x, \dot{\gamma}(0))$ в топологическом пространстве Q не гомеоморфна диску. Следовательно, дифференциал dF_λ равен 0 в точке $(x, \dot{\gamma}(0))$. Следовательно, он равен 0 в каждой точке геодезической $(\gamma, \dot{\gamma})$. Таким образом, каждая точка вещественной прямой $\mathbb{R}$ лежит в одном из следующих подмножеств:

$$\Gamma_0 = \{\tau \in \mathbb{R} : \lambda_i(\gamma(\tau)) = \lambda\}, \quad (8)$$

$$\Gamma_1 = \{\tau \in \mathbb{R} : \lambda_{i+1}(\gamma(\tau)) = \lambda\}. \quad (9)$$

Эти подмножества очевидно замкнуты и непусты. Следовательно, их пересечение не является пустым множеством. По определению, в любой точке τ этого пересечения $\lambda_i(\gamma(\tau)) = \lambda_{i+1}(\gamma(\tau)) = \lambda$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть многообразие M^n связно и замкнуто, пусть метрики $g, \bar{g}$ на многообразии M^n геодезически эквивалентны и пусть собственные значения $\rho_1(x), \rho_2(x), \dots, \rho_n(x)$ различны в каждой точке многообразия. Тогда по теореме 2 существуют такие числа $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{n-1}$, что для любой точки $x \in M^n$

$$\lambda_1(x) < \tau_1 < \lambda_2(x) < \tau_2 < \dots < \tau_{n-1} < \lambda_n(x).$$

Рассмотрим многочлен

$$-(t - \tau_1)(t - \tau_2) \dots (t - \tau_{n-1}) = C_{n-1}t^{n-1} + C_{n-2}t^{n-2} + \dots + C_0.$$

Рассмотрим подмножество

$$L^n = \{(x, \xi) \in T^*M^n : I_0(x, \xi) = C_0, I_1(x, \xi) = C_1, \dots, I_{n-1}(x, \xi) = C_{n-1}\}.$$

Мы покажем, что в каждой точке этого подмножества дифференциалы

$$dI_0, dI_1, \dots, dI_{n-1} \quad (10)$$

линейно независимы, так что по теореме Лиувилля (см., например, [14]) это подмножество состоит из набора торов Лиувилля, и что ограничение проекции $\pi: T^*M^n \rightarrow M^n$, $\pi(x, \xi) = x$, на любой из этих торов Лиувилля не имеет особых точек и, тем самым, является накрытием многообразия M^n .

Достаточно показать, что в каждой точке $(x, \xi) \in L^n$ определитель $(n \times n)$ -матрицы

$$W_{ij} = \frac{\partial I_i}{\partial p_j} \quad (11)$$

отличен от нуля. Действительно, в этом случае дифференциалы (10) линейно независимы. По теореме о неявной функции ограничение проекции π на L^n регулярно в точке (x, ξ) . Обозначим через $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ собственные значения отображения

Синюкова в точке x . Так как функции $F_{\lambda_1}, F_{\lambda_2}, \dots, F_{\lambda_n}$ являются линейными комбинациями функций $I_0, I_1, \dots, I_{n-1}$, достаточно показать, что определитель $(n \times n)$ -матрицы

$$\widetilde{W}_{ij} = \frac{\partial F_{\lambda_i}}{\partial p_j}$$

не обращается в нуль в точках множества L_n .

Заменой координат в окрестности точки x приведем метрику g в точке x к единично-диагональному, а метрику $\bar{g}$ к диагональному виду. Тогда функция F_t задана формулой (6) и, следовательно, матрица $\widetilde{W}$ является диагональной матрицей

$$\text{diag}(-2\Pi_1(\lambda_1)p_1, -2\Pi_2(\lambda_2)p_2, \dots, -2\Pi_n(\lambda_n)p_n).$$

Так как по условию

$$\lambda_1(x) < \tau_1 < \lambda_2(x) < \tau_2 < \dots < \tau_{n-1} < \lambda_n(x),$$

все числа вида $\Pi_i(\lambda_i)p_i$ отличны от нуля; отсюда следует, что определитель матрицы (11) отличен от нуля. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Микеш Й. Геодезические отображения аффинно-связных и римановых пространств // Итоги науки и техники. Современная матем. и ее прилож. Т. 11. Геометрия-2. М.: ВИНТИ, 1994.
- [2] Синюков Н. С. К теории геодезических отображений // Докл. АН СССР. 1966. Т. 169. С. 770–772.
- [3] Matveev V. S., Topalov P. J. Quantum integrability of the Beltrami–Laplace operator as geodesic equivalence // Math. Z. 2001. V. 238. № 4. P. 833–866.
- [4] Матвеев В. С., Топалов П. Й. Геодезическая эквивалентность метрик на поверхностях как интегрируемость их геодезических потоков // Докл. РАН. 1999. Т. 367. № 6. С. 736–738.
- [5] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Римановы метрики с интегрируемыми геодезическими потоками на поверхностях: локальная и глобальная геометрия // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 10. С. 5–32.
- [6] Igarashi M., Kiyohara K., Sugahara K. Noncompact Liouville surfaces // J. Math. Soc. Japan. 1993. V. 45. № 3. P. 460–479.
- [7] Matveev V. S. Geschlossene hyperbolische 3-Mannigfaltigkeiten sind geodätisch starr // Manuscripta Math. 2001. V. 105. № 3. P. 343–352.
- [8] Matveev V. S. Three-manifolds admitting metrics with the same geodesics // Math. Res. Lett. 2002. V. 9. № 2–3. P. 267–276.
- [9] Matveev V. S. Low-dimensional manifolds admitting metrics with the same geodesics // Contemporary Mathematics. 2002. V. 308. P. 229–243.
- [10] Matveev V. S., Topalov P. J. Trajectory equivalence and corresponding integrals // Regular and Chaotic Dynamics. 1998. V. 3. P. 29–44.
- [11] Matveev V. S., Topalov P. J. Geodesic equivalence via integrability // Geometriae Dedicata. 2003. V. 96. P. 91–115.
- [12] Bolsinov A. V., Fomenko A. T., Matveev V. S. Riemannian metrics with integrable geodesic flows on surfaces: local and global geometry // Max-Planck-Institute for Mathematics Preprint Series № 120. Bonn: MPIM, 1998.
- [13] Topalov P. J., Matveev V. S. Geodesic equivalence and integrability // Max-Planck-Institute for Mathematics Preprint Series № 74. Bonn: MPIM, 1998.
- [14] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979.