Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Покровский, Устранимые особенности решений дивергентных эллиптических уравнений второго порядка, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 3, 424–433

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2503>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 16:31:37

УДК 517.956

УСТРАНИМЫЕ ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ДИВЕРГЕНТНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. В. Покровский

Пусть L – равномерно эллиптический линейный дифференциальный оператор второго порядка в дивергентной форме с ограниченными и измеримыми коэффициентами в ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$). В работе вводятся подклассы соболевского класса $W^{1,2}(G)_{\text{loc}}$, содержащие обобщенные решения уравнения $Lu = 0$, в которых замкнутые множества неизолированных особых точек, устранимые для таких решений, полностью описываются в терминах хаусдорфовых мер.

Библиография: 35 названий.

Пусть G – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$,

$$Lf = \sum_{i,j=1}^n D_i(a_{ij}(x)D_j f) + \sum_{i=1}^n D_i(b_i(x)f) + \sum_{i=1}^n c_i(x)D_i f + d(x)f, \quad (1)$$

$x = (x_1, \dots, x_n) \in G$, $D_i = \partial/\partial x_i$, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$ – линейный дифференциальный оператор второго порядка с ограниченными и измеримыми действительными коэффициентами в этой области,

$$|a_{ij}(x)| \leq M, \quad |b_i(x)| \leq M, \quad |c_i(x)| \leq M, \quad |d(x)| \leq M$$

для некоторого $M > 0$ и почти всех $x \in G$, $i, j = 1, \dots, n$, и L равномерно эллиптивен в G , т.е. существует такое $\lambda > 0$, что при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $x \in G$ выполняется неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2 = \lambda(\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2).$$

Пусть $1 \leq p < \infty$. Как обычно, $L_p(G)$ – пространство всех вещественных измеримых в области G функций f , суммируемых в степени p , с нормой

$$\|f\|_{L_p(G)} := \left(\int_G |f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

Эта работа выполнена при частичной поддержке фонда INTAS, грант № 9900089, и Государственной программы Украины, грант № 0102U000917.

$W^{1,p}(G)$ – соболевское пространство всех вещественных измеримых в G функций f , имеющих обобщенные производные $D_i f$, $i = 1, \dots, n$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{W^{1,p}(G)} := \left(\int_G |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \sum_{i=1}^n \left(\int_G |D_i f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

$W_0^{1,p}(G)$ – замыкание пространства $C_0^\infty(G)$ всех вещественных финитных бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в области G по норме пространства $W^{1,p}(G)$. Если $0 < \alpha \leq 1$, то, как обычно, $C^\alpha(G)$ – множество всех вещественных непрерывных в G функций f , удовлетворяющих там условию Гёльдера с показателем α , $C^{1,\alpha}(G)$ – множество всех вещественных функций f , непрерывно дифференцируемых в G , все первые частные производные которых удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α в области G . Если в каждой области $G \subset \mathbb{R}^n$ определен некоторый функциональный класс $H(G)$, так что для каждой пары областей $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}^n$ из $G_1 \subset G_2$ вытекает $H(G_2) \subset H(G_1)$, то $H(G)_{\text{loc}}$ обозначает множество всех таких функций f , определенных в G , что $f \in H(G_0)$ для каждой подобласти $G_0 \Subset G$. Символ ∇ используется для обозначения градиента функции: $\nabla f = (D_1 f, \dots, D_n f)$.

Функция $f \in W^{1,2}(G)_{\text{loc}}$ называется *обобщенным решением* уравнения $Lu = 0$, если для любой функции $\phi \in W_0^{1,2}(G)$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} (Lf, \phi) := & - \sum_{i,j=1}^n \int_G a_{ij}(x) D_i f(x) D_j \phi(x) dx - \sum_{i=1}^n \int_G b_i(x) f(x) D_i \phi(x) dx \\ & + \sum_{i=1}^n \int_G c_i(x) D_i f(x) \phi(x) dx + \int_G d(x) f(x) \phi(x) dx = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

В этом случае из определения пространства $W_0^{1,2}(G)$ вытекает, что при $f \in W^{1,2}(G)$ равенство (2) выполняется для всех функций $\phi \in W_0^{1,2}(G)$.

Если $x \in \mathbb{R}^n$ и $r > 0$, то $B(x, r)$ обозначает открытый евклидов шар с центром в точке x и радиусом $r > 0$: $B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}$.

Пусть $t_0 > 0$, $g(t)$ – положительная непрерывная неубывающая функция, определенная при $0 < t < t_0$, и пусть E – множество в $\mathbb{R}^n$. Напомним, что (*внешней*) *мерой Хаусдорфа* $\text{mes}_g E$ множества E относительно измеряющей функции g называется конечный или равный $+\infty$ предел при $t \rightarrow 0$ величины $\inf(\sum_i g(r_i))$, где инфимум берется по всем не более, чем счетным множествам открытых шаров $\{B(x_i, r_i)\}_i$ с $r_i \leq t$, образующих покрытие множества E . Если $g(t) = t^\gamma$, $\gamma \geq 0$, то хаусдорфова мера множества E относительно измеряющей функции g называется *длиной по Хаусдорфу порядка* γ множества E и обозначается $\text{mes}^\gamma E$.

Цель настоящей заметки состоит в обобщении следующей теоремы Е. П. Долженко об устранимых особенностях гармонических функций (т.е. решений уравнения $\Delta f = 0$, где $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \dots + \partial^2/\partial x_n^2$ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$) на случай обобщенных решений уравнения $Lf = 0$, где L – произвольный равномерно эллиптический оператор вида (1) с ограниченными измеримыми коэффициентами.

ТЕОРЕМА ДОЛЖЕНКО [1], [2]. Пусть G – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, E – замкнутое множество в этой области, $E \neq G$, и пусть $0 < \alpha < 1$. Тогда для устранимости множества E для гармонических функций в классе $C^{1,\alpha}(G)_{\text{loc}}$ (т.е. для

того, чтобы каждая функция $f \in C^{1,\alpha}(G)_{\text{loc}}$, гармоническая в $G \setminus E$, могла быть продолжена как гармоническая функция с $G \setminus E$ на G) необходимо и достаточно, чтобы хаусдорфова длина множества E порядка $n - 1 + \alpha$ равнялась нулю: $\text{mes}^{n-1+\alpha} E = 0$.

По поводу других результатов об устранимых особенностях гармонических функций и решений линейных дифференциальных уравнений с достаточно гладкими коэффициентами см. работы [3]–[18]. Отметим, что в отличие от этих работ мы рассматриваем дифференциальные операторы без каких-либо априорных предположений о гладкости их коэффициентов (и, как следствие, – о гладкости их решений, см., например, [19, с. 160, 161]), и доказываемая ниже теорема 1 является, по-видимому, первым результатом, где устранимые особенности обобщенных решений общих дивергентных равномерно эллиптических линейных уравнений второго порядка с ограниченными измеримыми коэффициентами полностью описаны в терминах хаусдорфовых мер.

Напомним, что по теореме Де Джорджи и Нэша [20], [21] (см. также [19], [22], [23]) каждое обобщенное решение уравнения $Lu = 0$ с точностью до переопределения на множестве нулевой меры является непрерывной функцией, которая на каждом компакте $K \Subset G$ удовлетворяет условию Гёльдера с некоторым показателем $\alpha > 0$, зависящем только от оператора L и области G (в дальнейшем, говоря об обобщенных решениях, мы всегда предполагаем такое переопределение выполненным). С другой стороны, для любого $\alpha > 0$ можно привести пример оператора вида (1) с $G = \mathbb{R}^n$ и обобщенного решения в $\mathbb{R}^n$ уравнения $Lu = 0$, которое не удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α ни в какой окрестности точки $x = 0$ (см. [19, с. 133]). Эти результаты показывают, что в случае произвольного равномерно эллиптического оператора L вида (1) с ограниченными измеримыми коэффициентами постановка задачи об устранимых особенностях обобщенных решений уравнения $Lf = 0$ в классе $C^{1,\alpha}(G)_{\text{loc}}$ становится малосодержательной: решения, вообще говоря, могут не принадлежать этому классу. Поэтому естественно возникает вопрос о том, в каких классах функций следует рассматривать задачу о стирании особенностей в этом случае, чтобы с одной стороны имело заключение типа вышеприведенной теоремы Долженко, а с другой – каждое обобщенное решение рассматриваемого уравнения принадлежало бы такому классу. В настоящей работе дается одно из таких определений.

Всюду ниже вплоть до замечания 4 мы предполагаем выполненным следующее условие: для любой неотрицательной функции $\phi \in C_0^\infty(G)$ справедливо неравенство

$$\int_G \left(d\phi - \sum_{i=1}^n b_i D_i \phi \right) dx \leq 0, \quad (3)$$

которое, в частности, имеет место, если $b_i = 0$ и $d \leq 0$ п.в. в G , $i = 1, \dots, n$.

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$ и $r > 0$, $f \in W^{1,2}(B(x, r))$. Обозначим через $f_{L,x,r}$ обобщенное решение задачи Дирихле $Lu = 0$ в $B(x, r)$, $u - f \in W_0^{1,2}(B(x, r))$, которое при условии (3) всегда существует и единственно (см. [23, теорема 8.3]).

Всюду ниже $h(t)$ – непрерывная положительная и неубывающая функция, определенная при $t > 0$, $g(t) := t^{n-1}h(t)$.

По определению функция $f \in W^{1,2}(G)_{\text{loc}}$ принадлежит классу $W(h, L, G)$, если существует такое $C \geq 0$, что для каждого шара $B(x, r)$, лежащего со своим замыканием в

области G , выполняется неравенство

$$\|f - f_{L,x,r} \mid W^{1,2}(B(x,r))\| \leq Cr^{n/2}h(r). \quad (4)$$

Если $h(t) = t^\alpha$, $\alpha \geq 0$, то $W(h, L, G) =: W^\alpha(L, G)$.

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$ и $r > 0$. Тогда для любой функции $\phi \in W_0^{1,2}(B(x,r))$ выполняется неравенство Пуанкаре

$$\|\phi \mid L_2(B(x,r))\| \leq Cr\|\nabla\phi \mid L_2(B(x,r))\|,$$

где C зависит только от размерности n (см., например, [23, с. 161]). Из этого неравенства вытекает, что в определении классов $W(h, L, G)$ неравенство (4) можно заменить неравенством

$$\|\nabla(f - f_{L,x,r}) \mid L_2(B(x,r))\| \leq Cr^{n/2}h(r).$$

Отметим, что идея такого определения функциональных классов восходит к работам В. С. Федорова по теории моногенности и представлению голоморфных функций одного комплексного переменного с компактным множеством особых точек в виде интеграла типа Коши. В этих работах условия на функцию давались в терминах ее локальных приближений в равномерной метрике или в среднем голоморфными функциями (см. [24]). В последствии эта идея широко использовалась в работах Б. Ж. Ишанова (см. [8]–[10], [25]).

Пусть E – замкнутое множество в области G , $E \neq G$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Множество E называется *L -устранимым в классе $W(h, L, G)$* , если любая функция $f \in W(h, L, G)$, являющаяся обобщенным решением уравнения $Lu = 0$ на множестве $G \setminus E$ (т.е. удовлетворяющая равенству (2) для каждой вещественной бесконечно дифференцируемой функции ϕ с носителем, принадлежащем $G \setminus E$), является после, возможно, переопределения ее на множестве E , обобщенным решением уравнения $Lu = 0$ в области G .

Всюду далее предполагается, что область G ограничена.

В принятых выше обозначениях сформулируем основной результат работы.

ТЕОРЕМА 1. *Для L -устранимости множества E в классе $W(h, L, G)$ необходимо и достаточно, чтобы хаусдорфова мера E относительно измеряющей функции $g(t) = t^{n-1}h(t)$ равнялась нулю: $\text{mes}_g E = 0$.*

Для доказательства теоремы нам потребуются три хорошо известных результата, которые мы сформулируем в виде лемм.

Для формулировки первого из них напомним, что *двоичным кубом* в $\mathbb{R}^n$ называется всякий куб вида $[s_1 2^{-k}, (s_1 + 1) 2^{-k}] \times \dots \times [s_n 2^{-k}, (s_n + 1) 2^{-k}]$, где $s_1, \dots, s_n$ – целые числа, k – натуральное. Если Q – двоичный куб и $d > 0$, то dQ обозначает куб с тем же самым центром, что и Q , и длиной ребра в d раз большей, чем длина ребра Q .

ЛЕММА 1 (Р. Харви и Дж. Полкинг [5], см. также [15, с. 20–22]). Пусть $\{Q_l\}_{l=1}^m$, $m \in \mathbb{N}$, – конечное множество двоичных кубов, внутренности которых попарно не пересекаются, r_l – длина ребра Q_l , $l = 1, \dots, m$. Тогда существует такое множество функций $\{\phi_l\}_{l=1}^m \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, принимающих значения только на интервале $[0, 1]$, что носитель ϕ_l содержится в кубе $\frac{3}{2}Q_l$, каждая частная производная функции ϕ_l порядка $k > 0$ по модулю не превосходит $C(n, k)r_l^{-k}$, где величина $C(n, k)$ зависит лишь от n и k , $i = 1, \dots, m$, и на множестве $\bigcup_{l=1}^m Q_l$ выполняется равенство $\sum_{l=1}^m \phi_l(x) = 1$.

ЛЕММА 2 (О. Фростман [26], см. также [4], [27]). Пусть $g(t)$ – положительная непрерывная неубывающая функция, определенная при $t > 0$, K – компакт в $\mathbb{R}^n$, имеющий положительную хаусдорфову меру относительно измеряющей функции g . Тогда существует такая борелевская мера μ с носителем на K , что $\mu(K) > 0$ и $\mu(B(x, r)) \leq g(r)$ для каждого шара $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$.

Следующая лемма – частный случай одного результата В. Г. Мазы [28, с. 56, 57].

ЛЕММА 3. Пусть борелевская мера μ с компактным носителем в $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию

$$c(\mu) := \sup\{r^{1-n}\mu(B(x, r)) : x \in \mathbb{R}^n, r > 0\} < \infty.$$

Тогда для каждой функции $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ выполняется неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x)| d\mu(x) \leq K c(\mu) \|\nabla \phi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)},$$

где K зависит только от размерности n .

Перейдем к ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ТЕОРЕМЫ, которое фактически получается последовательным применением трех вышеприведенных лемм. Начнем с достаточности. Пусть f – функция из класса $W(h, L, G)$, являющаяся обобщенным решением уравнения $Lu = 0$ на множестве $G \setminus E$. Зафиксируем произвольным образом функцию $\phi \in C_0^\infty(G)$ и $\varepsilon > 0$. Поскольку множество $E(\phi) := E \cap \text{supp } \phi$ – компакт, а $\text{mes}_g E = 0$, существует такое конечное множество двоичных кубов $\{Q_l\}_{l=1}^m$, $m \in \mathbb{N}$, внутренности которых попарно не пересекаются, что $E(\phi) \subset \bigcup_{l=1}^m Q_l$ и $\sum_{l=1}^m g(r_l) \leq \varepsilon$, где r_l обозначает длину ребра куба Q_l , $l = 1, \dots, m$ (каждый шар содержится в объединении не более чем 5^n двоичных кубов, длина ребра которых не превосходит радиуса этого шара). При этом, очевидно, можно предполагать, что $\bigcup_{l=1}^m B(x_l, \sqrt{n}r_l) \subset G$, где x_l – центр куба Q_l , $l = 1, \dots, m$. Пусть $\{\phi_l\}_{l=1}^m$ – система функций, образующая разбиение единицы из леммы 1 для системы кубов $\{Q_l\}_{l=1}^m$. Пользуясь тем, что $f_l := f|_{B(x_l, \sqrt{n}r_l)}$ – обобщенное решение уравнения $Lu = 0$ внутри шара $B(x_l, \sqrt{n}r_l) \supset \frac{3}{2}Q_l$, оценкой производных функций ϕ_l из леммы 1, определением класса $W(h, L, G)$ и неравенством Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned} |(Lf, \phi)| &= \left| \sum_{l=1}^m (Lf, \phi_l) + \left(Lf, \phi \left(1 - \sum_{l=1}^m \phi_l \right) \right) \right| \leq \sum_{l=1}^m |(Lf - Lf_l, \phi_l)| \\ &\leq \sum_{l=1}^m \left(\left| \sum_{i,j=1}^n \int_{B(x_l, \sqrt{n}r_l)} a_{ij} D_i(f - f_l) D_j(\phi_l) dx \right| \right. \\ &\quad + \left| \sum_{i=1}^n \int_{B(x_l, \sqrt{n}r_l)} b_i(f - f_l) D_i(\phi_l) dx \right| \\ &\quad + \left| \sum_{i=1}^n \int_{B(x_l, \sqrt{n}r_l)} c_i D_i(f - f_l)(\phi_l) dx \right| + \left| \int_{B(x_l, \sqrt{n}r_l)} d(f - f_l)(\phi_l) dx \right| \Big) \\ &\leq \sum_{l=1}^m C(L, G, n, \phi) \|f - f_l\|_{W^{1,2}(B(x_l, \sqrt{n}r_l))} \|r_l^{n/2} r_l^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{l=1}^m C(L, G, n, \phi, f, \alpha) r_l^{n/2} h(r_l) r_l^{n/2-1} \\
&= \sum_{l=1}^m C(L, G, n, \phi, f, \alpha) g(r_l) \leq C(L, G, n, \phi, f, \alpha) \varepsilon.
\end{aligned}$$

Следовательно, $(Lf, \phi) = 0$, и f – обобщенное решение уравнения $Lu = 0$ в G .

Установим теперь необходимость условия теоремы 1.

Пусть $\text{mes}_g E > 0$. Выделяя, в случае необходимости, подмножество, можно считать, что E – компакт. По лемме 2 существует такая борелевская мера μ с носителем на E , что $\mu(E) > 0$ и $\mu(B(x, r)) \leq g(r)$ для каждого шара $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$.

Из леммы 3, ограниченности области G и неравенства Гёльдера следует, что функционал $\phi \rightarrow \int \phi d\mu$ продолжается по непрерывности с $C_0^\infty(G)$ до ограниченного функционала на $W_0^{1,2}(G)$ (далее при $\phi \in W_0^{1,2}(G)$ интеграл $\int \phi d\mu$ понимается как значение этого функционала), поэтому неоднородная задача Дирихле $Lf = \mu$ (т.е.

$$(Lf, \phi) = \int \phi d\mu \quad (5)$$

$\forall \phi \in W_0^{1,2}(G)$) разрешима в пространстве $W_0^{1,2}(G)$ (доказательство этого факта почти дословно повторяет доказательство теоремы 8.3 из [23]).

Пусть $B(y, r)$ – произвольный шар, лежащий со своим замыканием в G . Положим в равенстве (5) $\phi = f - f_{L,y,r}$. Поскольку $f_{L,y,r}$ – обобщенное решение уравнения $Lu = 0$ в $B(y, r)$, то

$$(L(f - f_{L,y,r}), f - f_{L,y,r}) = \int (f - f_{L,y,r}) d\mu. \quad (6)$$

Оценим по модулю снизу левую часть равенства (6). Имеем

$$\begin{aligned}
&|(L(f - f_{L,y,r}), f - f_{L,y,r})| \\
&= \left| \sum_{i,j=1}^n \int_{B(y,r)} a_{ij} D_i(f - f_{L,y,r}) D_j(f - f_{L,y,r}) dx \right. \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \int_{B(y,r)} b_i (f - f_{L,y,r}) D_i(f - f_{L,y,r}) dx \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \int_{B(y,r)} c_i D_i(f - f_{L,y,r}) (f - f_{L,y,r}) dx \\
&\quad \left. - \int_{B(y,r)} d(f - f_{L,y,r}) (f - f_{L,y,r}) dx \right|. \quad (7)
\end{aligned}$$

Пользуясь ограниченностью коэффициентов и равномерной эллиптичностью оператора L , получаем двойное неравенство

$$\begin{aligned}
&\lambda \int_{B(y,r)} |\nabla(f - f_{L,y,r})|^2 dx \\
&\leq \left| \sum_{i,j=1}^n \int_{B(y,r)} a_{ij} D_i(f - f_{L,y,r}) D_j(f - f_{L,y,r}) dx \right| \\
&\leq n^2 M \int_{B(y,r)} |\nabla(f - f_{L,y,r})|^2 dx. \quad (8)
\end{aligned}$$

Вторую сумму в правой части равенства (7) оценим по модулю сверху с помощью неравенств Гёльдера и Пуанкаре

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n \int_{B(y,r)} b_i(x) (f - f_{L,y,r}) D_i(f - f_{L,y,r}) dx \right| \\ & \leq nM \left(\int_{B(y,r)} |f - f_{L,y,r}|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{B(y,r)} |\nabla(f - f_{L,y,r})|^2 \right)^{1/2} \\ & \leq nMCr \left(\int_{B(y,r)} |\nabla(f - f_{L,y,r})|^2 \right) dx, \end{aligned}$$

где C – постоянная в неравенстве Пуанкаре.

Точно также оценивается третья сумма в правой части равенства (7), а последний интеграл в этом равенстве с помощью неравенства Пуанкаре оценивается по модулю сверху величиной MC^2r^2 . Поэтому существует такое $r_0 > 0$, зависящее только от λ , M и n , что при всех $r < r_0$ выполняется неравенство

$$\frac{\lambda}{2} \int_{B(y,r)} |\nabla(f - f_{L,y,r})|^2 dx \leq |(L(f - f_{L,y,r}), f - f_{L,y,r})|. \quad (9)$$

Оценим сверху модуль правой части (6), применяя лемму 3 к сужению меры μ на шар $B(y, r)$. Имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{B(y,r)} (f - f_{L,y,r}) d\mu(x) \right| & \leq Kh(r) \|\nabla(f - f_{L,y,r})\|_{L_1(B(y,r))} \\ & \leq C(n)h(r)r^{n/2} \|\nabla(f - f_{L,y,r})\|_{L_2(B(y,r))}. \end{aligned} \quad (10)$$

Поэтому из (6), (9) и (10) при $r < r_0$ получаем

$$\frac{\lambda}{2} \|\nabla(f - f_{L,y,r})\|_{L_2(B(y,r))}^2 \leq C(n)h(r)r^{n/2} \|\nabla(f - f_{L,y,r})\|_{L_2(B(y,r))},$$

откуда

$$\|\nabla(f - f_{L,y,r})\|_{L_2(B(x,r))} \leq 2C(n)\lambda^{-1}h(r)r^{n/2}$$

и, следовательно, $f \in W(h, L, G)$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $0 \leq \alpha \leq 1$. Тогда для L -устранимости множества E в классе $W^\alpha(L, G)$ необходимо и достаточно, чтобы хаусдорфова длина E порядка $n - 1 + \alpha$ равнялась нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теорема 1 и следствие 1 остаются справедливыми, если в них заменить классы $W(h, L, G)$ и $W^\alpha(G, L)$ на $W(h, L, G)_{\text{loc}}$ и $W^\alpha(G, L)_{\text{loc}}$ соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $0 < \alpha < 1$ и $L = \Delta$, то из результатов работы [17] вытекает совпадение функциональных классов $W^\alpha(G, L)_{\text{loc}}$ и $C^{1,\alpha}(G)_{\text{loc}}$, поэтому следствие 1 (с учетом предыдущего замечания) содержит в себе вышеупомянутый результат Долженко.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При доказательстве теоремы 1 фактически установлено, что при $\lim_{t \rightarrow 0} h(t)t^{-1} = 0$ класс $W(h, L, G)$ состоит только из обобщенных решений уравнения $Lu = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Предположим, что условие (3) не выполнено. В этом случае задача Дирихле, с помощью которой мы определили классы $W(h, L, G)$, может, вообще говоря, быть неразрешимой (см., например, [29, с. 326, 327]). Однако она всегда разрешима на шарах радиуса $r < r_0$, где $r_0 > 0$ зависит только от оператора L и области G (и, в более общем случае, в областях достаточно малой лебеговой меры, см. [23], [30]). Поэтому определение классов $W(h, L, G)$ сохраняется со следующей модификацией: если задача Дирихле $Lu = 0$, $u - f \in W_0^{1,2}(B(x, r))$ в шаре $B(x, r)$ однозначно разрешима, то $f_{L, x, r}$ — ее решение; в противном случае $f_{L, x, r} \equiv f$ в $B(x, r)$. Теорема 1 в этом случае остается в силе, если ограничиться рассмотрением компактных множеств особых точек и определить понятие устранимости множества E по аналогии с тем, как это обычно делается в случае задачи Пенлеве (характеризации компактных множеств, устранимых для класса ограниченных аналитических функций). А именно, будем называть компакт $E \subset G$ (L, h) -устраанимым, если для любой области $G_1 \subset G$ такой, что $E \subset G_1$, и для любой функции $f \in W(h, L, G_1)$, которая в $G_1 \setminus E$ является обобщенным решением уравнения $Lu = 0$, выполняется следующее: функция f после, возможно, переопределения ее на E становится обобщенным решением уравнения $Lu = 0$ в G_1 .

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В последние годы интенсивно изучаются решения вырождающихся квазилинейных эллиптических уравнений (см., например, монографию [31]), в частности, так называемые p -гармонические функции. Пусть $1 < p < \infty$. Напомним, что функция $f \in W^{1,p}(G)_{\text{loc}}$ называется p -гармонической в области G , если для любой функции $\phi \in C_0^\infty(G)$ выполняется равенство

$$\int_G |\nabla f|^{p-2} \nabla f \cdot \nabla \phi \, dx = 0$$

(точкой обозначено скалярное произведение векторов; если $p < 2$ и $\nabla f = 0$, то считаем $|\nabla f|^{p-2} \nabla f = 0$). Каждая такая функция после, возможно, переопределения на множестве нулевой меры Лебега в G принадлежит классу $C^{1,\alpha}(G)_{\text{loc}}$ при некотором $\alpha > 0$, зависящем лишь от n и p , и после такого переопределения становится бесконечно дифференцируемой на множестве $\{x \in G: \nabla f(x) \neq 0\}$. В работе [32] доказан следующий результат об устранимости замкнутых множеств $E \subset G$, $E \neq G$, для p -гармонических функций в классе $C^\alpha(G)_{\text{loc}}$, $0 < \alpha < 1$: множество E устранимо тогда и только тогда, когда хаусдорфова длина E порядка $n - p + \alpha(p - 1)$ равна нулю. Пусть $q = p/(p - 1)$ и h — такая же функция, как и выше. Рассмотрим множество $U_p(h, G)$ (которое, вообще говоря, не является линейным пространством) всех функций $f \in W^{1,p}(G)_{\text{loc}}$, удовлетворяющих следующему условию: для каждого шара $B(x, r)$, лежащего со своим замыканием в G , и для каждой функции $\phi \in C_0^\infty(B(x, r))$ выполняется неравенство

$$\left| \int_{B(x, r)} |\nabla f|^{p-2} \nabla f \cdot \nabla \phi \, dx \right| \leq Ch(r)r^{n/q} \|\nabla \phi\|_{L_p(B(x, r))},$$

где $C \geq 0$ не зависит от r и функции ϕ . Тогда, фактически повторяя доказательство теоремы 1 (комментария здесь требует только доказательство существования функции

$f \in W_0^{1,p}(G)$ такой, что для любой $\phi \in C_0^\infty(G)$ выполняется равенство

$$\int_G |\nabla f|^{p-2} \nabla f \cdot \nabla \phi \, dx = \int_G \phi \, d\mu,$$

где μ – та же мера, что и выше; это установлено, например, в [33], см. также [34, с. 204]), мы получаем, что ее условие является необходимым и достаточным для устранимости множества E для p -гармонических функций в классе $U_p(h, G)$ (устранимость здесь понимается так же, как и в определении 1). При $p = 2$ этот класс совпадает с классом $W(h, \Delta, G)$. В частности, при $h(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, класс $U_2(h, G)_{\text{loc}}$ совпадает с классом $C^{1,\alpha}(G)_{\text{loc}}$, и сформулированный результат может рассматриваться как обобщение теоремы Долженко на случай p -гармонических функций. С естественными изменениями сказанное в этом замечании переносится на решения более общих вырождающихся квазилинейных эллиптических уравнений, рассматриваемых в [31].

Основной результат работы впервые доложен на Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам в Суздале в июле 2002 г. (см. [35]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Долженко Е.П. Определении непрерывных гармонических функций в виде потенциалов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28. № 5. С. 1113–1130.
- [2] Долженко Е.П. Об особых точках непрерывных гармонических функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28. № 6. С. 1251–1270.
- [3] Carleson L. Removable singularities for continuous harmonic functions in $\mathbb{R}^n$ // Math. Scand. 1963. V. 12. P. 15–18.
- [4] Карлесон Л. Избранные проблемы теории исключительных множеств. М.: Мир, 1971.
- [5] Harvey R., Polking J. C. Removable singularities of solutions of linear partial differential equations // Acta Math. 1970. V. 125. № 1/2. P. 39–56.
- [6] Kral J. Removable singularities of solutions of semielliptic equations // Rendiconti de Matematica. 1973. V. 6. № 4. P. 763–783.
- [7] Kral J. Semielliptic singularities // Casopis pro pest. mat. 1984. V. 109. P. 204–322.
- [8] Ищанов Б.Ж. Об устранимых особенностях функций классов BMO и их обобщений // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 1985. № 5. С. 77–80.
- [9] Ищанов Б.Ж. Незамкнутые особые множества для слабых решений линейных дифференциальных уравнений // Геометрические вопросы теории функций и множеств. Калинин: Калининский гос. ун-т, 1989. С. 41–49.
- [10] Ищанов Б.Ж. О представлении решений некоторых классов уравнений в виде потенциалов мер, распределенных на множестве особенностей // Докл. РАН. 1998. Т. 358. № 4. С. 455–458.
- [11] Uy N. X. Removable set for Lipschitz harmonic functions // Michigan Math. J. 1990. V. 37. P. 45–51.
- [12] Verdera J. C^m -approximations by solutions of elliptic equations and Calderon–Zygmund operators // Duke Math. J. 1987. V. 55. № 1. P. 157–187.
- [13] Mateu J., Orobitg J. Lipschitz approximations by harmonic functions // Indiana Univ. Math. J. 1990. V. 39. P. 703–736.
- [14] Ullrich D. C. Removable sets for harmonic functions // Michigan Math. J. 1991. V. 38. № 3. P. 467–473.
- [15] Тарханов Н.Н. Ряд Лорана для решений эллиптических систем. Новосибирск: Наука, 1991.
- [16] David G., Mattila P. Removable sets for Lipschitz harmonic functions in the plane // Revista Mat. Iberoamericana. 2000. V. 16. P. 137–215.
- [17] Покровский А.В. Локальные аппроксимации решениями гипоеллиптических уравнений и устранимые особенности // Докл. РАН. 1999. Т. 367. № 1. С. 15–17.

- [18] Покровский А. В. Об устранимых особенностях решений однородных эллиптических уравнений в классах Никольского–Бесова // Докл. РАН. 2001. Т. 380. № 2. С. 168–171.
- [19] Кондратьев В. А., Ландис Е. М. Качественная теория линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 32. М.: ВИНТИ, 1988. С. 99–215.
- [20] De Giorgi E. Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari // Mem. Acad. Sci. Torino. Ser. 3. 1957. № 1. P. 25–38.
- [21] Nash J. Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations // Amer. J. Math. 1958. V. 80. P. 931–954.
- [22] Ландис Е. М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типа. М.: Наука, 1971.
- [23] Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.
- [24] Фёдоров В. С. Sur la representation des fonctions analytiques au voisinage d'un ensemble de ses points singuliers // Матем. сб. 1928. Т. 35. С. 237–250.
- [25] Долженко Е. П. Работы Д. Е. Меньшова по теории аналитических функций и современное состояние теории моногенности // УМН. 1992. Т. 47. № 5 (287). С. 67–96.
- [26] Frostman O. Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie de fonctions // Meddel. Lunds Univ. Mat. Sem. 1935. V. 3. P. 1–118.
- [27] Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. М.: Мир, 1980.
- [28] Мазья В. Г. Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд. Ленинград. ун-та, 1985.
- [29] Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: ГИФМЛ, 1961.
- [30] Кондратьев В. А. О разрешимости первой краевой задачи для сильно эллиптических уравнений // Тр. ММО. 1977. Т. 16. С. 293–318.
- [31] Heinonen J., Kilpeläinen T., Martio O. Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations. Oxford: Oxford Univ. Press, 1993.
- [32] Kilpeläinen T., Zhong X. Removable sets for continuous solutions of quasilinear elliptic equations // Proc. Amer. Math. Soc. 2002. V. 130. № 6. P. 1681–1688.
- [33] Мазья В. Г. О непрерывности в граничной точке решений квазилинейных эллиптических уравнений // Вестн. Ленинград. ун-та. 1970. № 13. С. 42–55.
- [34] Куфнер А., Фучик С. Нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1988.
- [35] Pokrovskii A. V. Removable singularities for solutions to second-order elliptic equations // International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems (Suzdal, July 1–6, 2002). Abstracts. Vladimir, 2002. P. 195–196.