Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Садовничий, З. Ю. Фазулин, Асимптотика собственных чисел и формула следа возмущения оператора Лапласа на сфере $\mathbb{S}^2$, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 3, 434–448

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2504>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 14:58:07

УДК 517.946

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ И ФОРМУЛА СЛЕДА ВОЗМУЩЕНИЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА СФЕРЕ $\mathbb{S}^2$

В. А. Садовничий, З. Ю. Фазуллин

В работе изучается асимптотика собственных чисел оператора Лапласа на сфере $\mathbb{S}^2$, возмущенного произвольным ограниченным оператором. Впервые для оператора в частных производных второго порядка получен главный член второй поправки теории возмущений. Установлена связь между коэффициентом второго члена асимптотики собственных чисел и формулой следов рассматриваемого оператора.

Библиография: 12 названий.

В работах [1], [2] Гийемин и Видом исследовали асимптотику собственных чисел оператора $L = -\Delta + V$ на сфере $\mathbb{S}^n$ с гладким нечетным потенциалом V (т.е. $V(\tau s) = -V(s)$ для всякого $s \in \mathbb{S}^n$, где τ – антиподальное отображение) внутри одного кластера. В частности получена следующая оценка:

$$|\mu_{ki} - \lambda_{ki}| = O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad i = 1, 2, \dots, N_k,$$

где N_k – кратность собственных чисел λ_{ki} оператора $L_0 = -\Delta$, μ_{ki} – собственные числа оператора L . В дальнейшем асимптотика спектра и регуляризованные следы для собственных чисел оператора L на сфере $\mathbb{S}^2$ исследовались в работах [3], [4] в случае гладкого нечетного V и в работах [5]–[8] в случае произвольного V . В частности, из результатов работы [7] следует, что при $V \in C^2(\mathbb{S}^2)$ справедлива асимптотическая формула

$$\sum_{i=-k}^k [\mu_{ki} - \lambda_{ki} - c_0] = o\left(\frac{1}{k}\right), \quad (1)$$

где $\lambda_{ki} = k(k+1)$ – собственные числа оператора L_0 кратности $(2k+1)$ каждое. Следует заметить, что из доказательства теоремы 3 работы [7] вытекает более сильное утверждение, а именно, $o(1/k)$ в формуле (1) можно заменить на $O(k^{-\alpha})$, $\alpha > 1$, хотя это не отмечено. В работе [8] в случае, когда потенциал V удовлетворяет условию Липшица по двум угловым переменным, показано, что правая часть формулы (1) есть $O(\ln k \cdot k^{-3/2})$.

В настоящей статье мы предъявляем подробные доказательства более сильных утверждений, анонсированных нами в работе [9]. А именно, впервые для оператора в частных производных второго порядка получен второй член асимптотики собственных чисел.

Итак, пусть $L_0 = -\Delta$ – оператор Лапласа–Бельтрами на единичной сфере $\mathbb{S}^2$, действующий в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{S}^2)$, а V – оператор умножения на измеримую комплекснозначную функцию $V(\theta, \varphi)$ (θ, φ – сферические координаты) в $L^2(\mathbb{S}^2)$ и пусть $L = L_0 + V$. Обозначим через $\lambda_k = k(k+1)$ и $\mu_{ki}, k = 0, 1, \dots, -k \leq i \leq k$, собственные числа операторов L_0 и L соответственно. Тогда справедлива следующая основная

ТЕОРЕМА 1. Пусть $V(\omega)$ – произвольная, вообще говоря, комплексная функция из класса $C^3(\mathbb{S}^2)$. Тогда для собственных чисел оператора L справедлива следующая асимптотическая формула:

$$\sum_{i=-k}^k \mu_{ki} = (2k+1)[k(k+1) + c_0] + \frac{c_1}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad (2)$$

где

$$c_0 = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} V(\omega) d\omega, \quad c_1 = \frac{1}{32\pi^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_{\mathbb{S}^2} \frac{V(\omega)V(\omega_0)}{\sqrt{1 - (\vec{\omega}, \vec{\omega}_0)^2}} d\omega d\omega_0 - \frac{1}{16\pi} \int_{\mathbb{S}^2} V^2(\omega) d\omega,$$

$(\vec{\omega}, \vec{\omega}_0)$ – скалярное произведение векторов

$$\vec{\omega} = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta), \quad \vec{\omega}_0 = (\cos \varphi_0 \sin \theta_0, \sin \varphi_0 \sin \theta_0, \cos \theta_0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $R_0(z) = (L_0 - zE)^{-1}$, $R(z) = (L - zE)^{-1}$ – резольвенты операторов L_0 и L и $f_k^{(i)} = Y_k^i(\varphi, \theta)$ – сферические функции, ортонормированные собственные функции оператора L_0 . Тогда в силу ограниченности оператора V существует число ρ такое, что $\|V\| < \rho \leq k+1$. Применяя оператор

$$\text{sp} \left(-\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda_k - z| = \rho} (\cdot) z dz \right)$$

(sp – след ядерного оператора) к обеим частям тождества

$$\begin{aligned} R(z) &= R_0(z) - R_0(z)V R_0(z) + (R_0(z)V)^2 R_0(z) \\ &\quad + \sum_{j=1}^3 (-1)^j (R_0(z)V)^{j+2} R_0(z) + (R_0(z)V)^6 R(z), \end{aligned}$$

используя теорему о вычетах получим

$$\sum_{i=-k}^k \mu_{ki} = (2k+1)[k(k+1) + c_0] + \alpha_k + \beta_k^{(1)} + \beta_k^{(2)} + \beta_k^{(3)} + O\left(\frac{1}{k^3}\right), \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \sum_{m=0, m \neq k}^{\infty} \frac{a_{mk}}{\lambda_k - \lambda_m}, \quad a_{mk} = \sum_{s=-k}^k \sum_{l=-m}^m |(V f_m^{(l)}, f_k^{(s)})|^2, \\ \beta_k^{(j)} &= \frac{(-1)^{j+1}}{2\pi i} \text{sp} \oint_{|\lambda_k - z| = \rho} (R_0(z)V)^{j+2} R_0(z) z dz, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь мы еще воспользовались оценкой

$$-\frac{1}{2\pi i} \operatorname{sp} \oint_{|\lambda_k - z| = k+1} (R_0(z)V)^6 R(z)z \, dz = O\left(\frac{1}{k^3}\right),$$

в справедливости которой нетрудно убедиться, воспользовавшись следующими оценками для резольвент: $\|R_0(z)\| \leq (k+1)^{-1}$, $\|R(z)\| \leq (k+1 - \|V\|)^{-1}$ при $|\lambda_k - z| = k+1$.

Из равенства (3) заключаем: так как $\beta_k^{(j)}$ – последующие поправки теории возмущений и их порядок при $k \rightarrow \infty$ меньше порядка α_k , для получения формулы (2) достаточно доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $k \gg 1$ и $V \in C^3(\mathbb{S}^2)$. Тогда

$$\alpha_k = \frac{c_1}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 2 преобразуем числа a_{km} (см. (4)). А именно, используя формулу сложения сферических гармоник, получаем

$$a_{km} = \frac{(2k+1)(2m+1)}{16\pi^2} \times \int_{\mathbb{S}^2} \int_{\mathbb{S}^2} V(\varphi, \theta) V(\varphi_0, \theta_0) P_k(\cos \alpha) P_m(\cos \alpha) \sin \theta \sin \theta_0 \, d\theta \, d\theta_0 \, d\varphi \, d\varphi_0,$$

где $\cos \alpha = (\vec{\omega}, \vec{\omega}_0)$, $P_k(\cos \alpha)$ – многочлены Лежандра, нормированные условием $P_k(1) = 1$. Далее, введем унитарную матрицу

$$T(\omega_0) = \begin{pmatrix} \sin \varphi_0 & \cos \theta_0 \cos \varphi_0 & \sin \theta_0 \cos \varphi_0 \\ -\cos \varphi_0 & \cos \theta_0 \sin \varphi_0 & \sin \theta_0 \sin \varphi_0 \\ 0 & -\sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

и вектор $\tilde{\omega} = (\sin \alpha \cos \psi, \sin \alpha \sin \psi, \cos \alpha)$, $0 \leq \alpha \leq \pi$, $0 \leq \psi \leq 2\pi$. Тогда для чисел a_{km} получим следующую формулу:

$$a_{km} = \frac{(2k+1)(2m+1)}{16\pi^2} \int_0^\pi q(\alpha) P_k(\cos \alpha) P_m(\cos \alpha) \sin \alpha \, d\alpha, \quad (6)$$

$$q(\alpha) = \int_0^{2\pi} d\psi \int_{\mathbb{S}^2} V(\omega_0) V(T(\omega_0)\tilde{\omega}) \, d\omega_0. \quad (7)$$

Отметим, что $q'(0) = q'(\pi) = 0$, в чем легко убедиться, используя формулы (5) и (7), так как

$$\int_0^{2\pi} \sin \psi \, d\psi = \int_0^{2\pi} \cos \psi \, d\psi = 0.$$

Далее, так как

$$\int_0^\pi P_k(\cos \alpha) P_m(\cos \alpha) \sin \alpha \, d\alpha = 0,$$

при $m \neq k$, используя равенство [10, с. 41]

$$\begin{aligned} I(\alpha, m, k) &= \int_0^\alpha P_k(\cos \theta) P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta \\ &= \frac{1}{(m-k)(m+k+1)} [mP_k(\cos \alpha)P_{m-1}(\cos \alpha) \\ &\quad - kP_m(\cos \alpha)P_{k-1}(\cos \alpha) - (m-k) \cos \alpha P_k(\cos \alpha)P_m(\cos \alpha)] \end{aligned} \quad (8)$$

и интегрируя по частям в (6), получим

$$a_{km} = \frac{(2k+1)(2m+1)}{16\pi^2} \int_0^\pi q'(\alpha) I(\alpha, m, k) d\alpha. \quad (9)$$

Для изучения асимптотики α_k нам понадобятся следующие свойства многочленов Лежандра. Имеет место неравенство [11, с. 172]

$$\sqrt{\sin \alpha} |P_k(\cos \alpha)| < \sqrt{\frac{2}{\pi k}}, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

и следующая асимптотическая формула [10, гл. VI, § 2], [12, с. 302]:

$$\begin{aligned} P_k(\cos \alpha) &= \frac{\cos[(k+1/2)\alpha - \pi/4]}{\sin^{1/2} \alpha} \left\{ \frac{f_0}{k^{1/2}} + \frac{f_1}{k^{3/2}} + \frac{f_2}{k^{5/2}} + O\left(\frac{1}{k^{7/2}}\right) \right\} \\ &\quad + \frac{\sin[(k+3/2)\alpha - \pi/4]}{\sin^{3/2} \alpha} \left\{ \frac{g_0}{k^{3/2}} + \frac{g_1}{k^{5/2}} + O\left(\frac{1}{k^{7/2}}\right) \right\} \\ &\quad + \frac{\cos[(k+5/2)\alpha - \pi/4]}{\sin^{5/2} \alpha} \left\{ \frac{d_0}{k^{5/2}} + O\left(\frac{1}{k^{7/2}}\right) \right\} + \frac{O(1)}{k^{7/2} \sin^{7/2} \alpha}, \\ &\quad k \geq 1, \quad \varepsilon \leq \alpha \leq \pi - \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$f_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad f_1 = -\frac{3}{8}\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad g_0 = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

f_2, g_1, d_0 – постоянные.

В дальнейшем нам нужна еще оценка суммы

$$R_k = \sum_{m \neq k} \frac{k^{1-\beta} m^{1-\gamma}}{|m-k|^q (m+k)^p}$$

при $k \rightarrow \infty$. С этой целью докажем лемму.

ЛЕММА 1. Для $k \gg 1$ и $p+q+\gamma > 2$ функция R_k имеет следующие оценки:

$$\begin{aligned} \text{при } q=1 \quad R_k &= \begin{cases} O\left(\frac{\ln k}{k^{p+\beta+\gamma-2}}\right), & \gamma \leq 2, \\ O\left(\frac{1}{k^{p+\beta}}\right), & \gamma > 2, \end{cases} \\ \text{при } q>1 \quad R_k &= \begin{cases} O\left(\frac{1}{k^{p+\beta+\gamma-2}}\right), & \gamma \leq 2, \\ O\left(\frac{1}{k^{p+\beta+\gamma-2}}\right) + O\left(\frac{1}{k^{p+\beta+q-1}}\right), & \gamma > 2. \end{cases} \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разбивая R_k на две суммы, имеем

$$\begin{aligned} R_k &= O\left(\left[\int_1^{k-1} + \int_{k+1}^\infty\right] \frac{k^{1-\beta} x^{1-\gamma} dx}{|x-k|^q (x+k)^p}\right) \\ &= \frac{1}{k^{q+p+\beta+\gamma-3}} O\left(\left[\int_{1/k}^{1-1/k} + \int_{1+1/k}^\infty\right] \frac{\tau^{1-\gamma} d\tau}{|1-\tau|^q (1+\tau)^p}\right); \end{aligned} \quad (12)$$

в последнем равенстве мы воспользовались заменой переменных $x = k\tau$. Заметим, что при $q + p + \gamma > 2$ второй интеграл сходится для $\tau \geq 2$. Следовательно, при $k \gg 1$ и $q = 1$ имеем

$$\left[\int_{1/k}^{1-1/k} + \int_{1+1/k}^\infty\right] \frac{\tau^{1-\gamma} d\tau}{|1-\tau|^q (1+\tau)^p} = O(\ln k) + O\left(\left(\frac{1}{k}\right)^{2-\gamma}\right),$$

а при $q > 1$

$$\left[\int_{1/k}^{1-1/k} + \int_{1+1/k}^\infty\right] \frac{\tau^{1-\gamma} d\tau}{|1-\tau|^q (1+\tau)^p} = O\left(\left(\frac{1}{k}\right)^{2-\gamma}\right) + O\left(\left(\frac{1}{k}\right)^{1-q}\right).$$

Из этих соотношений и равенства (12) легко следует утверждение леммы 1. Лемма 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Используя формулы (4) и (9), числа α_k представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \sum_{m=0}^{N-1} \frac{a_{km}}{\lambda_k - \lambda_m} \\ &\quad - \frac{1}{16\pi^2} \sum_{m=N, m \neq k}^\infty \frac{(2k+1)(2m+1)}{(m-k)(m+k+1)} \left(\int_0^\varepsilon + \int_{\pi-\varepsilon}^\pi\right) q'(\alpha) I(\alpha, m, k) d\alpha \\ &\quad - \frac{1}{16\pi^2} \sum_{m=N, m \neq k}^\infty \frac{(2k+1)(2m+1)}{(m-k)(m+k+1)} \int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} q'(\alpha) I(\alpha, m, k) d\alpha \\ &= \alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(1)}(\varepsilon) + \alpha_k^{(2)}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (13)$$

где N – достаточно большое фиксированное число.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Разложение α_k на две суммы обусловлено тем, что в формуле (8) имеются многочлены Лежандра с индексом $m-1$, и при использовании их асимптотики из (11) имеем возможность применить формулу Тейлора для функции $(1-1/m)^\alpha$ при $m \geq N$.

Итак, исследуем асимптотику каждого слагаемого в (13). Имеет место

ЛЕММА 2. При $k \gg 1$

$$\alpha_k^{(1)}(\varepsilon) = O(\varepsilon^3 \ln k).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь интегральным представлением функции $I(\alpha, k, m)$ из (8) и неравенством (10), получаем

$$|\alpha_k^{(1)(\varepsilon)}| \leq \text{const} \sum_{m=N, m \neq k} \frac{k^{1/2} m^{1/2}}{|m-k|(m+k)} \left(\int_0^\varepsilon |q'(\alpha)| \alpha d\alpha + \int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} |q'(\alpha)| (\pi - \alpha) d\alpha \right). \quad (14)$$

Так как $q'(0) = q'(\pi) = 0$, то интегралы в (14) имеют порядок $O(\varepsilon^3)$. А из леммы 1 следует, что

$$\sum_{m=N, m \neq k} k^{1-1/2} m^{1-1/2} |m-k|^{-1} (m+k)^{-1} = O(\ln k).$$

Лемма 2 доказана.

Теперь исследуем асимптотику $\alpha_k^{(0)}(\varepsilon)$ из (13). Имеет место

ЛЕММА 3. При $k \gg 1$

$$\alpha_k^{(0)}(\varepsilon) = O(\varepsilon^{3/2} k^{-3/2}) + O(k^{-5/2}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для того чтобы воспользоваться представлением a_{km} из (9) и (8) сначала изучим асимптотику первых двух слагаемых $\alpha_k^{(0)}(\varepsilon)$, т.е. при $m = 0, 1$, обозначив их через $\alpha_k^{(0)}(\varepsilon, m)$. Хорошо известно, что $P_m(\cos \alpha) = (\cos \alpha)^m$, $m = 0, 1$, поэтому имеем

$$|\alpha_k^{(0)}(\varepsilon, m)| \leq \frac{\text{const}}{k} \left[\left| \left(\int_0^\varepsilon + \int_{\pi-\varepsilon}^\pi \right) q(\alpha) (\cos \alpha)^m P_k(\cos \alpha) \sin \alpha d\alpha \right| + \left| \int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} q(\alpha) (\cos \alpha)^m P_k(\cos \alpha) \sin \alpha d\alpha \right| \right]. \quad (15)$$

Теперь, используя неравенство (10) для первого слагаемого в (15) и асимптотику $P_k(\cos \alpha)$ из (11) с остатком $O(\sin^{-3/2} \alpha \cdot k^{-3/2})$ для второго слагаемого, интегрируя один раз по частям главный член асимптотики, получим, что

$$\alpha_k^{(0)}(\varepsilon, m) = O(\varepsilon^{3/2} \cdot k^{-3/2}) + O(k^{-5/2}). \quad (16)$$

Далее, так как

$$\int_0^\pi \left| \frac{q'(\alpha)}{\sin \alpha} \right| d\alpha = O(1),$$

воспользовавшись представлением для a_{km} из (9) и (8), в силу неравенства (10) при $m \geq 2$ получим оценку

$$\begin{aligned} |\alpha_k^{(0)}(\varepsilon)| &\leq c_1 \sum_{m=2}^{N-1} \frac{(2k+1)(2m+1)}{(m-k)^2(m+k+1)^2} \left[\frac{m^{1/2}}{k^{1/2}} + \frac{k^{1/2}}{(m-1)^{1/2}} + \frac{|m-k|}{k^{1/2}(m-1)^{1/2}} \right] \\ &= O(k^{-5/2}), \end{aligned}$$

откуда и из (16) следует доказательство леммы 3.

Теперь приступим к изучению асимптотики $\alpha_k^{(2)}(\varepsilon)$. С этой целью подставим асимптотику для многочленов Лежандра из (11) в представление (8) для функции $I(\alpha, k, m)$. Проведя довольно громоздкие аналитические выкладки и при этом используя формулу Тейлора для функций $(1 - 1/m)^\gamma$ и $(1 - 1/k)^\gamma$, $m \geq N$, $k \geq 1$, из формулы (13) получим, что

$$\begin{aligned} \alpha_k^{(2)}(\varepsilon) = & -\frac{1}{32\pi^2} \sum_{m=N, m \neq k} \frac{(2k+1)(2m+1)}{(m-k)^2(m+k+1)^2} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} q'(\alpha) \\ & \times \left\{ \sin(m-k)\alpha \left[\frac{a_1(m+k+1)}{k^{1/2}m^{1/2}} + \frac{a_2(m+k)^2}{k^{3/2}m^{3/2}} + \frac{a_3(m^3+k^3)}{k^{5/2}m^{5/2}} + O\left(\frac{m+k}{k^\beta m^\gamma}\right) \right] \right. \\ & + \frac{1}{\sin \alpha} \left\{ \sin(m+k)\alpha \left[\frac{b_1^{(1)}(m-k)}{k^{3/2}m^{3/2}} + \frac{b_3^{(1)}(m^3-k^3)}{k^{5/2}m^{5/2}} + O\left(\frac{|m-k|}{k^\beta m^\gamma}\right) \right] \right. \\ & + [\sin^2 \alpha \sin(m+k)\alpha + \sin \alpha \cos(m+k)\alpha] \left[\frac{b_1^{(j)}(m-k)}{k^{1/2}m^{1/2}} \right. \\ & + \frac{b_2^{(j)}(m^2-k^2)}{k^{3/2}m^{3/2}} + \frac{b_4^{(j)}(m-k)}{k^{3/2}m^{3/2}} + \frac{b_3^{(j)}(m^3-k^3)}{k^{5/2}m^{5/2}} + O\left(\frac{|m-k|}{k^\beta m^\gamma}\right) \Big] \\ & + \cos \alpha \cos(m-k)\alpha \left[\frac{b_1^{(4)}(m-k)}{k^{3/2}m^{3/2}} \right. \\ & + \frac{b_2^{(4)}(m^2-k^2)}{k^{3/2}m^{3/2}} + \frac{b_3^{(3)}(m^3-k^3)}{k^{5/2}m^{5/2}} + O\left(\frac{|m-k|}{k^\beta m^\gamma}\right) \Big] \Big\} \\ & + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left\{ \sin(m-k)\alpha \left[\frac{c_1(m+k)}{k^{3/2}m^{3/2}} + \frac{c_3(m^3+k^3)}{k^{5/2}m^{5/2}} + O\left(\frac{|m-k|}{k^\beta m^\gamma}\right) \right] \right. \\ & + [\cos(k+m+1)\alpha + \cos \alpha \cos(m+k+2)\alpha] \left[\frac{d_1^{(j)}(m-k)}{k^{3/2}m^{3/2}} \right. \\ & + \frac{d_2^{(j)}(m^2-k^2)}{k^{3/2}m^{3/2}} + \frac{d_3^{(j)}(m^3-k^3)}{k^{5/2}m^{5/2}} + O\left(\frac{|m-k|}{k^\beta m^\gamma}\right) \Big] \Big\} \\ & + \frac{1}{\sin^3 \alpha} \left\{ [\sin(m+k+3)\alpha - \cos(m+k+2)\alpha] \left[\frac{l_1^{(j)}(m-k)}{k^{3/2}m^{3/2}} \right. \right. \\ & + \frac{l_3^{(j)}(m^3-k^3)}{k^{5/2}m^{5/2}} + O\left(\frac{|m-k|}{k^\beta m^\gamma}\right) \Big] \Big\} + \frac{O(1)}{k^\beta m^\gamma \sin^4 \alpha} \Big\} d\alpha, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\beta = 1/2, 3/2, 5/2, 7/2$, $\beta \geq 1/2$, $\beta + \gamma = 4$, $a_i, c_i, b_i^{(j)}, d_i^{(j)}, l_i^{(j)}$ – постоянные, верхний индекс j которых указывает на то, что для каждой тригонометрической функции в квадратных скобках свои константы. Отметим, что

$$a_1 = f_0^2, \quad a_2 = f_0[f_1 + g_0]. \quad (18)$$

ЛЕММА 4. При $k \gg 1$ и $q \in C^3[0, \pi]$ справедлива формула

$$\alpha_k^{(2)}(\varepsilon) = \frac{1}{32\pi^3 k^2} \int_0^\pi q'(\alpha)(\pi - \alpha) d\alpha + \frac{O(\varepsilon^{-2})}{k^{7/2}} + \frac{O(\varepsilon)}{k^{3/2}} + \frac{O(\ln \varepsilon)}{k^{5/2}} + \frac{O(\varepsilon) \ln k}{k^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Исследуем асимптотическое поведение каждого слагаемого в (17). С этой целью заметим, что, так как $q'(0) = q'(\pi) = 0$, то

$$\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} |q'(\alpha)| \sin^{-n} \alpha \, d\alpha = \begin{cases} O(1), & n \leq 1, \\ O(\ln \varepsilon), & n = 2, \\ O(\varepsilon^{2-n}), & n \geq 3. \end{cases} \quad (19)$$

Более того, если $q \in C^3[0, \pi]$, то интегрированием по частям легко убеждаемся в справедливости оценок

$$\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{q'(\alpha)\varphi(\alpha)}{\sin^n \alpha} \left(\frac{\cos l\alpha}{\sin l\alpha} \right) d\alpha = \frac{O(\varepsilon^{1-n})}{l} + \frac{O(\varepsilon^{-n})}{l^2}, \quad (20)$$

где в качестве $\varphi(\alpha)$ может быть взята любая из функций: тождественная единица или $\cos \alpha$. Обозначим слагаемое $\alpha_k^{(2)}(\varepsilon)$, соответствующее в (17) члену $O(1)k^{-\beta}m^{-\gamma} \times \sin^{-4} \alpha$, через $\alpha_k^{(2,1)}(\varepsilon)$. Тогда, используя (19) и лемму 1 при $q = 2, \gamma = 1/2, 3/2, 5/2, 7/2$, получим

$$\alpha_k^{(2,1)}(\varepsilon) = \frac{O(\varepsilon^{-2})}{k^{7/2}}. \quad (21)$$

Далее, изучим слагаемые, соответствующие членам $O(|m \pm k| \cdot k^{-\beta} \cdot m^{-\gamma})$ в (17), обозначив их через $\alpha_k^{(2,2)}(\varepsilon)$. Сначала проинтегрировав один раз по частям слагаемые, содержащие функции $\sin^3 \alpha$, затем используя оценку (19) и лемму 1, получим, что

$$\alpha_k^{(2,2)}(\varepsilon) = \frac{O(\ln \varepsilon)}{k^{5/2}} + \frac{O(\varepsilon^{-2})}{k^{7/2}}. \quad (22)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В итоге мы положим $\varepsilon = k^{-\delta}$, $2/3 < \delta < 3/4$. Следовательно, в оценке $\alpha_k^{(2,2)}(\varepsilon)$ и в дальнейшем главную часть асимптотики выбираем с учетом этого замечания.

Изучим слагаемые $\alpha_k^{(2)}(\varepsilon)$ с членами $(m - k)k^{-3/2}m^{-3/2}$ в (17), обозначив их через $\alpha_k^{(2,3)}(\varepsilon)$. Из леммы 1 при $q = 1, p = 2, \beta = \gamma = 3/2$ и оценки (19) вытекает, что

$$\alpha_k^{(2,3)}(\varepsilon) = \frac{O(\varepsilon^{-1}) \cdot \ln k}{k^3}. \quad (23)$$

Теперь покажем, что

$$\begin{aligned} \alpha_k^{(2,4)}(\varepsilon) &= -\frac{b_1^{(j)}}{32\pi^2} \sum_{m=N, m \neq k} \frac{(2k+1)(2m+1)}{(m-k)(m+k+1)k^{1/2}m^{1/2}} \\ &\quad \times \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} q'(\alpha) [\sin \alpha \sin(m-k)\alpha + \cos(m+k)\alpha] d\alpha \\ &= \frac{O(\varepsilon \cdot \ln k)}{k^2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Действительно, два раза интегрируя по частям интеграл в (24), получим оценку (20) при $n = -1, 0$. Тогда из леммы 1 при $q = 1, \beta = \gamma = 1/2, p = 3, 4$, учитывая замечание 2, получим оценку (24). Исследуем слагаемые $\alpha_k^{(2)}(\varepsilon)$, содержащие члены с

$(m^2 - k^2)m^{-3/2}k^{-3/2}$ в (17). Обозначим через $\alpha_k^{(2,5)}(\varepsilon)$ те из этих слагаемых, которые содержат $\sin(m+k+l)\alpha$ и $\cos(m+k+l)\alpha$, $l = 0, 1, 2$. Тогда, один раз интегрируя по частям и воспользовавшись леммой 1 при $p = 2$, $q = 1$, $\beta = \gamma = 3/2$, получим следующую оценку:

$$\alpha_k^{(2,5)}(\varepsilon) = \frac{O(\varepsilon^{-1} \ln k)}{k^3}. \quad (25)$$

Для изучения асимптотики слагаемого

$$\begin{aligned} \alpha_k^{(2,6)}(\varepsilon) = & -\frac{b_2^{(4)}}{32\pi^2} \sum_{m=N, m \neq k} \frac{(2k+1)(2m+1)}{(m-k)^2(m+k+1)^2} \frac{(m^2 - k^2)}{k^{1/2}m^{1/2}} \\ & \times \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} q'(\alpha) \frac{\cos \alpha \cos(m-k)\alpha}{\sin \alpha} d\alpha \end{aligned}$$

(так как $m+k \gg 1$) заметим, что

$$\begin{aligned} & \frac{(2k+1)(2m+1)}{(m-k)^2(m+k+1)^2} \frac{(m^2 - k^2)}{k^{1/2}m^{1/2}} \\ & = \frac{4km}{(m-k)(m+k)k^{3/2}m^{3/2}} + O\left(\frac{k^{-3/2}m^{-3/2}}{|m-k|}\right) + O\left(\frac{k^{-1/2}m^{-1/2}}{|m-k|(m+k)^2}\right). \end{aligned} \quad (26)$$

Далее обозначим через $\hat{\alpha}_k^{(2,6)}(\varepsilon)$ часть $\alpha_k^{(2,6)}(\varepsilon)$, соответствующую первому слагаемому в правой части (26), а через $\hat{\hat{\alpha}}_k^{(2,6)}(\varepsilon)$ – второму и третьему. Тогда из леммы 1 и оценки (20) следует, что

$$\hat{\hat{\alpha}}_k^{(2,6)}(\varepsilon) = O(k^{-5/2}). \quad (27)$$

Для изучения $\hat{\alpha}_k^{(2,6)}(\varepsilon)$ положим $m-k = l$ и

$$\hat{b}_l = \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{q'(\alpha) \cos \alpha \cos l\alpha}{\sin \alpha} d\alpha$$

и представим его в следующем виде:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_k^{(2,6)}(\varepsilon) = & -\frac{b_2^{(4)}}{8\pi^2} \sum_{l=1}^{[k^\sigma]} \frac{\hat{b}_l(\varepsilon)}{k^{1/2}l} \left[\frac{(k+l)^{-1/2}}{(2k+l)} - \frac{(k-l)^{-1/2}}{(2k-l)} \right] \\ & + \frac{b_2^{(4)}}{8\pi^2} \sum_{l=[k^\sigma]+1}^{k-N} \frac{\hat{b}_l(\varepsilon)}{k^{1/2}l} \frac{(k-l)^{-1/2}}{l(2k-l)} - \frac{b_2^{(4)}}{8\pi^2} \sum_{l=[k^\sigma]+1}^{\infty} \frac{\hat{b}_l(\varepsilon)}{k^{1/2}l} \frac{(k+l)^{-1/2}}{l(2k+l)} \\ & = \gamma_1(k, \varepsilon) + \gamma_2(k, \varepsilon) + \gamma_3(k, \varepsilon), \end{aligned} \quad (28)$$

где $0 < \sigma < 1$, значение которого выбираем в дальнейшем.

Исследуем $\gamma_1(k, \varepsilon)$. Применяя формулу Тейлора для функции

$$f(x) = \frac{(1+2x)^{-1/2}}{1+x} - \frac{(1-2x)^{-1/2}}{1-x}$$

при $x = l/(2k)$ и оценку (20) при $n = 1$, получаем, что

$$\gamma_1(k, \varepsilon) = O(\varepsilon^{-1} k^{-3}). \quad (29)$$

В силу (20) нетрудно убедиться, что

$$\gamma_2(k, \varepsilon) = \frac{O(\varepsilon^{-1})}{k^{2+2\sigma}} + \frac{O(1)}{k^{2+\sigma}}, \quad \gamma_3(k, \varepsilon) = \frac{O(\varepsilon^{-1})}{k^{2+2\sigma}} + \frac{O(1)}{k^{2+\sigma}}. \quad (30)$$

Таким образом, из (27)–(30) заключаем, что

$$\alpha_k^{(2,6)}(\varepsilon) = O(k^{-5/2}) + O(k^{-(\sigma+2)}) + O(\varepsilon^{-1} k^{-(2+2\sigma)}) + O(\varepsilon^{-1} k^{-3}). \quad (31)$$

Теперь изучим слагаемые в $\alpha_k^2(\varepsilon)$, содержащие члены $(m^3 - k^3)k^{-5/2}m^{-5/2}$ в (17), обозначив их через $\alpha_k^{(2,7)}(\varepsilon)$. Один раз интегрируя по частям интегралы в слагаемых с множителями $\sin(m + k + l)\alpha$ и $\cos(m + k + l)\alpha$, $l = 0, 1, 2$, затем используя оценку (19) и лемму 1, убеждаемся, что они имеют порядок $O(\varepsilon^{-2} k^{-7/2})$. А для слагаемого $(m^3 - k^3)k^{-5/2}m^{-5/2} \sin^{-1} \alpha \cos \alpha \cos(m - k)\alpha$ в (17) из оценки (20) и леммы 1 получим оценку порядка $O(k^{-5/2})$. Таким образом,

$$\alpha_k^{(2,7)}(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-2} k^{-7/2}) + O(k^{-5/2}). \quad (32)$$

Итак, остается оценить слагаемые $\alpha_k^2(\varepsilon)$ при $\sin(m - k)\alpha$ и $\sin(m - k)\alpha \sin^{-2} \alpha$ в (17). Обозначив их соответственно $\alpha_k^{(2,8)}(\varepsilon)$ и $\alpha_k^{(2,9)}(\varepsilon)$, после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} \alpha_k^{(2,8)}(\varepsilon) &= -\frac{1}{32\pi^2} \sum_{m=N, m \neq k}^{\infty} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{q'(\alpha) \sin(m - k)\alpha}{(m - k)^2} d\alpha \\ &\quad \times \left\{ \frac{\tau_0}{k^{1/2}m^{1/2}} + \frac{\tau_1 k^{1/2}m^{1/2}}{m + k} + \frac{\tau_2(m + k)}{k^{3/2}m^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tau_3}{(m + k)k^{1/2}m^{1/2}} + \frac{\tau_4(m^3 + k^3)}{k^{3/2}m^{3/2}(m + k)^2} \right\} + O\left(\frac{1}{k^{5/2}}\right) \\ &= \sum_{i=0}^4 A_i(k, \varepsilon) + O\left(\frac{1}{k^{5/2}}\right), \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \alpha_k^{(2,9)}(\varepsilon) &= -\frac{1}{32\pi^2} \sum_{m=N, m \neq k}^{\infty} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{q'(\alpha) \sin(m - k)\alpha}{\sin^2 \alpha (m - k)^2} d\alpha \\ &\quad \times \left\{ \frac{\xi_1}{(m + k)k^{1/2}m^{1/2}} + \frac{\xi_2(m^3 + k^3)}{k^{3/2}m^{3/2}(m + k)^2} \right\} + O\left(\frac{\ln \varepsilon}{k^{5/2}}\right) \\ &= \sum_{i=1}^2 B_i(k, \varepsilon) + O\left(\frac{\ln \varepsilon}{k^{5/2}}\right), \end{aligned} \quad (34)$$

где τ_i, ξ_i – постоянные, причем (см. (18) и (11))

$$\tau_0 = 2a_1 + 4a_2 = \frac{1}{\pi}. \quad (35)$$

Отметим, что в $O(k^{-5/2})$ и $O(k^{-5/2} \ln \varepsilon)$ включены слагаемые из (17), которые после преобразования оценены с помощью леммы 1 и оценок (19). Асимптотика каждой суммы в (33) и (34) ($A_i(k, \varepsilon)$ и $B_i(k, \varepsilon)$) изучаются по следующей схеме. Полагаем $m - k = l$; сумма разбивается на три слагаемых: в первом слагаемом индекс суммирования l меняется от $-[k^\sigma]$ до $[k^\sigma]$ и $l \neq 0$, во втором $-N - k \leq l \leq -[k^\sigma] - 1$, в третьем $-[k^\sigma] + 1 \leq l \leq \infty$, $0 < \sigma < 1$, и исследуется асимптотика каждого слагаемого. Отметим, что число σ выбирается из условия, чтобы при $k \rightarrow \infty$ иметь порядок убывания $o(k^{-2})$.

Итак, для первого слагаемого $A_0(k, \varepsilon)$ в (33) с учетом значения τ_0 из (35), полагая

$$b_{m-k}(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} q'(\alpha) \sin(m-k)\alpha \, d\alpha,$$

будем иметь

$$\begin{aligned} A_0(k, \varepsilon) &= -\frac{1}{16\pi^3} \sum_{l=1}^{[k^\sigma]} \frac{b_l(\varepsilon)}{l^2 k^{1/2}} \left[\frac{1}{\sqrt{k+l}} - \frac{1}{\sqrt{k-l}} \right] \\ &\quad + \frac{1}{16\pi^3} \sum_{l=[k^\sigma]+1}^{k-N} \frac{b_l(\varepsilon)}{l^2 k^{1/2} \sqrt{k-l}} - \frac{1}{16\pi^3} \sum_{l=[k^\sigma]+1}^{\infty} \frac{b_l(\varepsilon)}{k^{1/2} \sqrt{k+l}} \\ &= a_1^{(0)}(k, \varepsilon, \sigma) + a_2^{(0)}(k, \varepsilon, \sigma) + a_3^{(0)}(k, \varepsilon, \sigma). \end{aligned} \quad (36)$$

Изучим асимптотику $a_1^{(0)}(k, \varepsilon, \sigma)$. Отметим, что это слагаемое содержит главный член асимптотики α_k . Пусть $q \in C^2[0, \pi]$; тогда

$$b_l(\varepsilon) = \frac{O(\varepsilon)}{l} + \frac{O(1)}{l}. \quad (37)$$

Из формулы Тейлора для функции $f(x) = (1+x)^{-1/2} - (1-x)^{-1/2}$ при $x = l/k$ следует, что $f(l/k) = -l/k + O(l^2/k^2)$, откуда из (36), (37) получим

$$a_1^{(0)}(k, \varepsilon, \sigma) = \frac{1}{32\pi^3 k^2} \int_0^\pi q'(\alpha)(\pi - \alpha) \, d\alpha + \frac{O(\varepsilon^2)}{k^2} + \frac{O(1)}{k^{2+\sigma}} + \frac{O(\ln k)}{k^3}.$$

Мы здесь воспользовались следующими соотношениями:

$$\left[\int_0^\varepsilon + \int_{\pi-\varepsilon}^\pi \right] q'(\alpha)(\pi - \alpha) \, d\alpha = O(\varepsilon^2), \quad \sum_{l=[k^\sigma]+1}^{\infty} \frac{b_l}{k^2 l} = \frac{O(1)}{k^{2+\sigma}}, \quad \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin l\alpha}{l} = \frac{\pi - \alpha}{2},$$

$0 < \alpha < 2\pi$, и равномерной сходимостью последнего ряда на отрезке $[\varepsilon, \pi - \varepsilon]$. Далее, используя равенство (37), нетрудно убедиться, что

$$a_2^{(0)}(k, \varepsilon, \sigma) = \frac{O(1)}{k^{1+2\sigma}}, \quad a_3^{(0)}(k, \varepsilon, \sigma) = \frac{O(1)}{k^{1+2\sigma}};$$

следовательно, в силу (36) для $A_0(k, \varepsilon)$ с учетом замечания 2 получим следующую асимптотику:

$$A_0(k, \varepsilon) = \frac{1}{32\pi^3 k^2} \int_0^\pi q'(\alpha)(\pi - \alpha) \, d\alpha + \frac{O(\varepsilon^2)}{k^2} + \frac{O(1)}{k^{1+2\sigma}}. \quad (38)$$

Для второго слагаемого в (33) имеем

$$\begin{aligned}
 A_1(k, \varepsilon) &= -\frac{\tau_1 k^{1/2}}{32\pi^2} \sum_{l=1}^{[k^\sigma]} \frac{b_l(\varepsilon)}{l^2} \left[\frac{\sqrt{k+l}}{2k+l} - \frac{\sqrt{k-l}}{2k-l} \right] \\
 &\quad + \frac{\tau_1 k^{1/2}}{32\pi^2} \sum_{l=[k^\sigma]+1}^{k-N} \frac{b_l(\varepsilon)}{l^2} \frac{\sqrt{k-l}}{2k-l} - \frac{\tau_1 k^{1/2}}{32\pi^2} \sum_{l=[k^\sigma]+1}^{\infty} \frac{b_l(\varepsilon)}{l^2} \frac{\sqrt{k+l}}{2k+l} \\
 &= \sum_{i=1}^3 a_i^{(1)}(k, \varepsilon, \sigma).
 \end{aligned} \tag{39}$$

Применяя формулу Тейлора для функции

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+2x}}{1+x} - \frac{\sqrt{1-2x}}{1-x}$$

при $x = l/(2k)$, получаем, что

$$f\left(\frac{l}{2k}\right) = \frac{l^3}{4k^3} + O\left(\frac{l^4}{k^4}\right).$$

Поэтому, используя (20) при $\varphi(\alpha) = 1$ для первого слагаемого в (39), находим

$$a_1^{(1)}(k, \varepsilon, \sigma) = \frac{O(\varepsilon)}{k^{3-\sigma}}.$$

Для второго и третьего слагаемых в (39), воспользуясь оценкой (20), легко установим, что

$$a_2^{(1)}(k, \varepsilon, \sigma) = \frac{O(\varepsilon)}{k^{2\sigma}} + \frac{O(1)}{k^{3\sigma}} + \frac{O(\varepsilon)}{k^2}, \quad a_3^{(1)}(k, \varepsilon, \sigma) = \frac{O(\varepsilon)}{k^{2\sigma}} + \frac{O(1)}{k^{3\sigma}}.$$

Таким образом, с учетом замечания 2 (так как $\sigma \in (0, 1)$) находим, что

$$A_1(k, \varepsilon) = \frac{O(\varepsilon)}{k^{2\sigma}} + \frac{O(1)}{k^{3\sigma}} + \frac{O(\varepsilon)}{k^2}. \tag{40}$$

Далее, производя совершенно аналогичные выкладки как при исследовании $A_1(k, \varepsilon)$, замечая при этом, что

$$f(x) = \frac{1+x}{(1+2x)^{3/2}} - \frac{1-x}{(1-2x)^{3/2}}$$

для $A_2(k, \varepsilon)$ и

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)\sqrt{1+2x}} - \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-2x}}$$

для $A_3(k, \varepsilon)$, с учетом замечания 2 находим

$$A_2(k, \varepsilon) = O\left(\frac{1}{k^3}\right) + \frac{O(\varepsilon)}{k^{2+2\sigma}} + \frac{O(1)}{k^{2+3\sigma}}, \quad A_3(k, \varepsilon) = O\left(\frac{1}{k^3}\right) + \frac{O(\varepsilon)}{k^{2+2\sigma}} + \frac{O(1)}{k^{2+3\sigma}}. \tag{41}$$

Теперь изучим слагаемое $B_1(k, \varepsilon)$ из (34). Оно совпадает с $A_3(k, \varepsilon)$ (см. (33) и (34)), разница лишь в том, что в знаменателе под интегралом появляется $\sin^2 \alpha$. Следовательно, используя оценку (20) при $n = 2$, нетрудно убедиться, что

$$B_1(k, \varepsilon) = \frac{O(\ln \varepsilon)}{k^{2+\sigma}}. \quad (42)$$

Для того, чтобы изучить поведение $A_4(k, \varepsilon)$ и $B_2(k, \varepsilon)$ при $k \rightarrow \infty$, воспользуемся следующим равенством:

$$\frac{m^3 + k^3}{k^{3/2}m^{3/2}(m+k)^2} = -\frac{1}{k^{1/2}m^{3/2}(m+k)} + \frac{m^{1/2}}{m^{3/2}(m+k)} + \frac{k^{1/2}}{m^{3/2}(m+k)}. \quad (43)$$

Тогда части $A_4(k, \varepsilon)$ и $B_2(k, \varepsilon)$, соответствующие первому слагаемому в (43), совпадают с $A_3(k, \varepsilon)$ и $B_1(k, \varepsilon)$ соответственно. А для частей $A_4(k, \varepsilon)$ и $B_2(k, \varepsilon)$, соответствующих второму и третьему слагаемым, применяя общую схему исследования (при этом, используя равенство (37) и оценку (19) соответственно), в силу сказанного выше с учетом (41) и (42) получаем

$$A_4(k, \varepsilon) = \frac{O(1)}{k^3} + \frac{O(1)}{k^{2+2\sigma}}, \quad B_2(k, \varepsilon) = \frac{O(\ln \varepsilon)}{k^{5/2}} + \frac{O(\ln \varepsilon)}{k^{2+\sigma}}. \quad (44)$$

Отметим, что $A_4(k, \varepsilon)$ в (44) не зависит от ε из замечания 2.

Теперь с учетом замечания 2 из равенств (33) и (34) и оценок (38), (40)–(42), (44) заключаем, что

$$\begin{aligned} \alpha_k^{(2,8)}(\varepsilon) &= \frac{1}{32\pi^3 k^2} \int_0^\pi q'(\alpha)(\pi - \alpha) d\alpha \\ &\quad + \frac{O(\varepsilon)}{k^2} + \frac{O(1)}{k^{1+2\sigma}} + \frac{O(\varepsilon)}{k^{2\sigma}} + \frac{O(1)}{k^{3\sigma}} + \frac{O(1)}{k^{5/2}} + \frac{O(\varepsilon)}{k^{2+2\sigma}}, \quad 0 < \sigma < 1, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\alpha_k^{(2,9)}(\varepsilon) = \frac{O(\ln \varepsilon)}{k^{5/2}} + \frac{O(\ln \varepsilon)}{k^{2+\sigma}}, \quad 0 < \sigma < 1. \quad (46)$$

Положим $\sigma = 3/4$. Тогда, так как

$$\alpha_k^{(2)} = \sum_{i=1}^9 \alpha_k^{(2,i)}(\varepsilon),$$

то из оценок (21)–(25), (31), (32), (45), (46) вытекает утверждение леммы 4.

Теперь если положим $\varepsilon = k^{-\delta}$, $2/3 < \gamma < 3/4$, то в силу равенства (13) из лемм 2–4 получим

$$\alpha_k = \frac{1}{32\pi^3 k^2} \int_0^\pi q'(\alpha)(\pi - \alpha) d\alpha + o\left(\frac{1}{k^2}\right). \quad (47)$$

Преобразуем интеграл в (47). Так как

$$\int_0^\pi q'(\alpha)(\pi - \alpha) d\alpha = \int_0^\pi q(\alpha) d\alpha - \pi q(0),$$

а из формул (5), (7) и определения вектора $\tilde{\omega}$ получаем, что

$$q(0) = 2\pi \int_{\mathbb{S}^2} V^2(\omega_0) d\omega_0,$$

то

$$\begin{aligned} \int_0^\pi q(\alpha) d\alpha &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \frac{V(\omega_0)V(T(\omega_0)\tilde{\omega})}{\sin \alpha} d\omega_0 \sin \alpha d\psi d\alpha \\ &= \int_{\mathbb{S}^2} \int_{\mathbb{S}^2} \frac{V(\omega_0)V(\omega)}{\sqrt{1-(\omega, \omega_0)^2}} d\omega d\omega_0 \end{aligned}$$

(в последнем равенстве мы воспользовались тем, что $\sin \alpha = \sqrt{1-(\omega, \omega_0)^2}$ заменой переменных $\omega = T(\omega_0)\tilde{\omega}$ с якобианом равным 1). Таким образом, из (47) и последних преобразований следует теорема 2, а из нее – доказательство теоремы 1.

В работе [7, теорема 3] при $V \in C^2(\mathbb{S}^2)$ была доказана оценка $\alpha_k = o(k^{-1})$, которую при этих же условиях на V легко усилить, а именно, имеет место

ЛЕММА 5. При $k \gg 1$ и $V \in C^2(\mathbb{S}^2)$

$$\alpha_k = O(k^{-\lambda}), \quad \lambda > 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $q \in C^2[0, \pi]$ (в силу формулы (7) гладкости q и V совпадают) леммы 2 и 3 справедливы. При доказательстве леммы 4 условие, что $q \in C^3[0, \pi]$, т.е. оценку (20), использовали лишь при уточнении асимптотики слагаемых $\alpha_k^{(2,4)}(\varepsilon)$ (см. (24)), $\alpha_k^{(2,6)}(\varepsilon)$ (см. (31)) и $A_1(k, \varepsilon)$ (см. (40)). Пусть $q \in C^2[0, \pi]$. Тогда, используя оценку

$$\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} q'(\alpha) [\sin \alpha \sin(m+k)\alpha + \cos(m+k)\alpha] d\alpha = \frac{O(1)}{m+k}$$

вместо (20) для $\alpha_k^{(2,4)}(\varepsilon)$, равенство (37) вместо (20) для $\alpha_k^{(2,6)}(\varepsilon)$ и $A_1(k, \varepsilon)$, учитывая замечание 2, находим, что

$$\alpha_k^{(2,4)}(\varepsilon) = \frac{O(1) \ln k}{k^2}, \quad \alpha_k^{(2,6)}(\varepsilon) = \frac{O(\varepsilon^{-1})}{k^{2+\sigma}} + \frac{O(\varepsilon^{-1})}{k^{5/2-\sigma}}, \quad A_1(k, \varepsilon) = \frac{O(1)}{k^{2\sigma}}. \quad (48)$$

Из лемм 2 и 3 и оценок для $\alpha_k^{(2,i)}(\varepsilon)$, $i = 1, \dots, 9$, с учетом (48) и замечания 2 получим

$$\alpha_k = O(\varepsilon^3 \ln k) + \frac{O(\varepsilon^{3/2})}{k^{3/2}} + \frac{O(1) \ln k}{k^2} + \frac{O(\varepsilon^{-1})}{k^{2+\sigma}} + \frac{O(1)}{k^{2\sigma}} + \frac{O(\varepsilon^{-2})}{k^{7/2}},$$

откуда, полагая $\sigma = 3/4$ и $\varepsilon = k^{-\gamma}$, $2/3 < \gamma < 3/4$, получим доказательство леммы 5.

Теперь в силу этой леммы и теоремы 1 работы [7] заключаем, что справедлива

ТЕОРЕМА 3. Пусть V – оператор умножения, вообще говоря, на комплексную функцию из класса $C^2(\mathbb{S}^2)$ в пространстве $L_2(\mathbb{S}^2)$. Тогда для собственных чисел оператора L справедливо тождество

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=-k}^k [\mu_{ki} - k(k+1) - c_0] = 2c_1, \quad (49)$$

постоянные c_0 и c_1 определены в (2), причем ряд в (49) сходится абсолютно.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из формул (2), (49) и теоремы 2 следует, что регуляризованный след возмущения оператора Лапласа на $\mathbb{S}^2$ равен удвоенному коэффициенту главного члена второй поправки теории возмущений, который является дисперсией от возмущения V .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Guillemin B. Some spectral results for the Laplace operator with potential on the n -sphere // Adv. in Math. 1978. V. 27. P. 273–286.
- [2] Widom H. The Laplace operator with potential on the 2-sphere // Adv. in Math. 1979. V. 31. P. 63–66.
- [3] Садовнический В. А., Дубровский В. В. Классическая формула регуляризованного следа для собственных чисел оператора Лапласа–Бельтрами с потенциалом на сфере // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319. № 1. С. 61–62.
- [4] Подольский В. Е. Формула регуляризованного следа оператора Лапласа–Бельтрами с нечетным потенциалом на сфере S^2 // Матем. заметки. 1994. Т. 56. № 1. С. 71–77.
- [5] Фазуллин З. Ю. Регуляризованный след оператора Лапласа–Бельтрами // Международная конференция по комплексному анализу и смежным вопросам. Тезисы докл. Нижний Новгород, 1997. С. 80–81.
- [6] Бобров А. Н. След оператора Лапласа–Бельтрами с потенциалом на поверхности Пуля // Докл. РАН. 1999. Т. 368. № 2. С. 154–156.
- [7] Садовнический В. А., Фазуллин З. Ю. Формула первого регуляризованного следа для возмущения оператора Лапласа–Бельтрами // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 3. С. 402–409.
- [8] Садовнический В. А., Дубровский В. В., Поречков О. А. Формула первого регуляризованного следа оператора Лапласа–Бельтрами с негладким потенциалом на двумерной сфере // Докл. РАН. 2002. Т. 382. № 1. С. 11–14.
- [9] Садовнический В. А., Фазуллин З. Ю. Кластерная асимптотика собственных чисел возмущения оператора Лапласа на сфере S^2 // Докл. РАН. 2003. Т. 391. № 4. С. 456–459.
- [10] Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: ИЛ, 1952.
- [11] Сегё Г. Ортогональные многочлены. М.: ГИФМЛ, 1962.
- [12] Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990.

(В. А. Садовнический) Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
(З. Ю. Фазуллин) Башкирский государственный университет, г. Уфа
E-mail: fazullinzu@mail.ru

Поступило
18.11.2003
Исправленный вариант
08.07.2004