Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. С. Семенов, О графах и кольцах Ли, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 3, 449–459

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2505>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 17:32:10

УДК 519.1

О ГРАФАХ И КОЛЬЦАХ ЛИ

Ю. С. Семёнов

По конечному ориентированному графу Γ естественным образом строятся конечномерные градуированные нильпотентные кольца Ли $\mathfrak{l}(\Gamma)$ и $\mathfrak{g}(\Gamma)$, связанные соответственно с поддеревьями и связными подграфами в Γ . Предложены также различные варианты этих конструкций. Кроме того, указано вложение колец Ли вида $\mathfrak{l}(\Gamma)$ в присоединенные кольца Ли конечномерных ассоциативных колец, также определяемых графом Γ .

Библиография: 4 названия.

Введение

По-видимому, все нильпотентные конечномерные алгебры Ли невозможно классифицировать в полном объеме. В настоящей работе предлагается несколько достаточно естественных конструкций, позволяющих связать с конечным ориентированным графом нильпотентное градуированное кольцо (алгебру) Ли. В действительности эти кольца с точностью до изоморфизма не зависят от ориентации графа.

Идея построения таких колец Ли возникла при работе над доказательством изоморфизма целочисленных гомологий свободной нильпотентной группы класса 2 с r свободными порождающими и свободного нильпотентного кольца Ли класса 2 с тем же числом свободных порождающих (см. [1]).

Изложим кратко основные полученные результаты. Пусть Γ – конечный ориентированный граф, под которым подразумевается симплициальный 1-комплекс, т.е. кратные ребра и петли не допускаются. Множества Γ^0 и Γ^1 – это множества вершин и ребер графа Γ соответственно.

Обозначим через $\mathcal{T}(\Gamma)$ множество всех поддеревьев в Γ (связных подграфов без циклов). В частности, в $\mathcal{T}(\Gamma)$ есть деревья, которые являются вершинами или ребрами, соединяющими две вершины. Отметим, что если Γ распадается в объединение своих связных компонент $\Gamma_1 \sqcup \dots \sqcup \Gamma_m$, то

$$\mathcal{T}(\Gamma) = \mathcal{T}(\Gamma_1) \sqcup \dots \sqcup \mathcal{T}(\Gamma_m).$$

Обозначим через $\mathfrak{l}(\Gamma)$ свободный $\mathbb{Z}$ -модуль с базисом $\mathcal{T}(\Gamma)$, т.е. элементами $\mathfrak{l}(\Gamma)$ являются целочисленные линейные комбинации деревьев из $\mathcal{T}(\Gamma)$. Пусть $T_1, T_2 \in \mathcal{T}(\Gamma)$ и $T_1 \cap T_2 = \emptyset$. В этом случае $E(T_1, T_2)$ обозначает множество ориентированных ребер, идущих из T_1 в T_2 (при этом $E(T_1, T_2) \cap E(T_2, T_1) = \emptyset$). Если $e \in E(T_1, T_2) \sqcup E(T_2, T_1)$,

то под $T_1 \#_e T_2$ подразумевается связная сумма деревьев T_1, T_2 над e , т.е. дерево, получаемое присоединением к T_1 и T_2 ребра e . Обратим внимание, что $T_1 \#_e T_2 = T_2 \#_e T_1$, а число вершин в $T_1 \#_e T_2$ равно сумме числа вершин в T_1 и T_2 .

Определим операцию умножения $[T_1, T_2]$ на деревьях $T_1, T_2 \in \mathcal{I}(\Gamma)$ следующим образом:

$$[T_1, T_2] = \begin{cases} \sum_{e \in E(T_1, T_2)} T_1 \#_e T_2 - \sum_{e \in E(T_2, T_1)} T_1 \#_e T_2, & \text{если } T_1 \cap T_2 = \emptyset, \\ 0, & \text{если } T_1 \cap T_2 \neq \emptyset, \end{cases}$$

и распространим эту операцию по линейности на $\mathcal{I}(\Gamma)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Введенное умножение превращает $\mathcal{I}(\Gamma)$ в кольцо Ли.*

Помимо доказательства этого предложения в первом разделе мы отмечаем такие свойства кольца $\mathcal{I}(\Gamma)$, как нильпотентность и градуированность, рассматриваем некоторые примеры, показываем функториальность этой конструкции (предложение 2). Если граф Γ связан и имеет n вершин, то степень нильпотентности $\mathcal{I}(\Gamma)$ в точности равна n (предложение 3). Кроме того, предлагается ряд обобщений кольца $\mathcal{I}(\Gamma)$. В частности, при построении можно брать не деревья, а связные подграфы в Γ , что приводит к более общему кольцу $\mathfrak{g}(\Gamma)$, содержащему $\mathcal{I}(\Gamma)$ в качестве подкольца (см. п. 1.6.1).

Однако центральную роль для нас играет кольцо $\mathcal{I}(\Gamma)$, поскольку во втором разделе мы связываем с графом Γ определенное конечномерное ассоциативное кольцо $\mathcal{A}(\Gamma)$ и строим, следуя идеям [1], вложение именно кольца $\mathcal{I}(\Gamma)$ в соответствующее $\mathcal{A}(\Gamma)$ присоединенное кольцо Ли (предложение 4).

Автор выражает признательность профессору Ю. А. Бахтуруину за полезные замечания.

1. Кольца Ли, ассоциированные с графами

1.1. Доказательство предложения 1. Доказательство совсем элементарно и сводится к рутинной проверке тождества Якоби. Равенство $[T_1, T_2] = -[T_2, T_1]$ очевидно следует из определения умножения, поскольку при перестановке T_1 и T_2 множества ребер $E(T_1, T_2)$ и $E(T_2, T_1)$ переходят друг в друга.

Тождество Якоби достаточно проверить для трех деревьев T_1, T_2 и T_3 таких, что

$$T_1 \cap T_2 = T_2 \cap T_3 = T_3 \cap T_1 = \emptyset.$$

Действительно, если, например, $T_3 \cap T_1 \neq \emptyset$, то любое дерево вида $T_1 \#_e T_2$ (или $T_3 \#_e T_2$) нетривиально пересекается с T_3 (с T_1), и тождество Якоби выполнено тривиальным образом.

Рассмотрим

$$[[T_1, T_2], T_3] + [[T_2, T_3], T_1] + [[T_3, T_1], T_2] \quad (1)$$

и, в частности, первое слагаемое этой суммы. Тогда

$$[[T_1, T_2], T_3] = \sum_{e \in E(T_1, T_2)} [T_1 \#_e T_2, T_3] - \sum_{e \in E(T_2, T_1)} [T_1 \#_e T_2, T_3]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{e \in E(T_1, T_2) \\ f \in E(T_1, T_3)}} (T_1 \#_e T_2) \#_f T_3 + \sum_{\substack{e \in E(T_1, T_2) \\ f \in E(T_2, T_3)}} (T_1 \#_e T_2) \#_f T_3 \\
&\quad - \sum_{\substack{e \in E(T_1, T_2) \\ f \in E(T_3, T_1)}} (T_1 \#_e T_2) \#_f T_3 - \sum_{\substack{e \in E(T_1, T_2) \\ f \in E(T_3, T_2)}} (T_1 \#_e T_2) \#_f T_3 \\
&\quad - \sum_{\substack{e \in E(T_2, T_1) \\ f \in E(T_1, T_3)}} (T_1 \#_e T_2) \#_f T_3 - \sum_{\substack{e \in E(T_2, T_1) \\ f \in E(T_2, T_3)}} (T_1 \#_e T_2) \#_f T_3 \\
&\quad + \sum_{\substack{e \in E(T_2, T_1) \\ f \in E(T_3, T_1)}} (T_1 \#_e T_2) \#_f T_3 + \sum_{\substack{e \in E(T_2, T_1) \\ f \in E(T_3, T_2)}} (T_1 \#_e T_2) \#_f T_3. \quad (2)
\end{aligned}$$

Остальные два слагаемых в (1) записываются аналогичным образом. В результате получится 24 группы слагаемых, которые, как нетрудно убедиться, попарно сократятся. Например, в $[[T_3, T_1], T_2]$ есть группа слагаемых

$$- \sum_{\substack{f \in E(T_1, T_3) \\ e \in E(T_1, T_2)}} (T_1 \#_f T_3) \#_e T_2 = - \sum_{\substack{e \in E(T_1, T_2) \\ f \in E(T_1, T_3)}} (T_1 \#_e T_2) \#_f T_3,$$

сокращающаяся с первой группой слагаемых в правой части (2).

1.2. Простейшие свойства кольца $\mathfrak{l}(\Gamma)$. Пусть $\Gamma = \Gamma_1 \sqcup \dots \sqcup \Gamma_m$, где Γ_j – связанная компонента графа Γ . Поскольку между различными связными компонентами нет ни одного ребра, имеет место разложение $\mathfrak{l}(\Gamma)$ в прямую сумму колец Ли:

$$\mathfrak{l}(\Gamma) = \bigoplus_{j=1}^m \mathfrak{l}(\Gamma_j).$$

С другой стороны,

$$\mathfrak{l}(\Gamma) = \bigoplus_{k=1}^n \mathfrak{l}_k(\Gamma),$$

где $\mathbb{Z}$ -подмодуль $\mathfrak{l}_k(\Gamma)$ порождается всеми деревьями, у которых ровно k вершин, n – число вершин в графе Γ . Из определения умножения в $\mathfrak{l}_k(\Gamma)$ непосредственно вытекает, что

$$[\mathfrak{l}_i(\Gamma), \mathfrak{l}_j(\Gamma)] \subseteq \mathfrak{l}_{i+j}(\Gamma),$$

т.е., во-первых, кольцо Ли $\mathfrak{l}(\Gamma)$ градуировано, а, во-вторых, оно нильпотентно степени $\leq n = |\Gamma^0|$ (в предложении 3 будет доказано, что для связного графа Γ степень нильпотентности кольца Ли $\mathfrak{l}(\Gamma)$ в точности равна n – числу вершин Γ). В частности, $\mathbb{Z}$ -подмодули

$$\mathfrak{j}_p(\Gamma) = \bigoplus_{k=p}^n \mathfrak{l}_k(\Gamma), \quad p = 2, \dots, n,$$

– это идеалы кольца $\mathfrak{l}(\Gamma)$.

1.3. Примеры.

ПРИМЕР 1. Пусть граф Γ имеет n вершин и ни одного ребра. Тогда $\mathfrak{l}(\Gamma) \cong \mathbb{Z}^n$ – абелево кольцо Ли.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим более содержательный пример. Пусть $\Gamma = \Gamma(n)$ – полный ориентированный граф с n вершинами и $\binom{n}{2}$ ребрами. Для определенности будем считать, что вершины занумерованы натуральными числами от 1 до n , а началом ориентированного ребра, которое соединяет i -ю и j -ю вершины, служит вершина с меньшим номером. Подсчитаем $\mathbb{Z}$ -ранг $\mathfrak{l}(\Gamma)$. Любое дерево с k вершинами однозначно определяет некоторое подмножество мощности k в множестве вершин графа Γ . Число деревьев в Γ с фиксированными k вершинами находится по известной формуле Кэли (см. [2], а также, например, [3], [4]) и равно k^{k-2} . Отсюда

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Z}} \mathfrak{l}(\Gamma) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k^{k-2}.$$

ПРИМЕР 3. Пусть $\mathrm{ut}(n+1, \mathbb{Z})$ – кольцо Ли верхних строго треугольных матриц порядка $n+1$ над $\mathbb{Z}$ со стандартным базисом E_{ij} , $1 \leq i < j \leq n+1$. Рассмотрим граф $\Lambda(n)$ следующего вида:

Изоморфизм между кольцами $\mathfrak{l}(\Lambda(n))$ и $\mathrm{ut}(n+1, \mathbb{Z})$ строится следующим образом. Пусть T_{ij} , $1 \leq i \leq j \leq n$, – поддерево в $\Lambda(n)$ с вершинами в точках i, j . Поставим ему в соответствие матрицу $E_{i,j+1}$ и продолжим это отображение по $\mathbb{Z}$ -линейности на $\mathfrak{l}(\Lambda(n))$. Нетрудно убедиться, что это и будет нужный изоморфизм.

1.4. Фунториальность. Рассмотрим категорию конечных ориентированных графов $\mathcal{FG}$, морфизмами в которой являются вложения графов (сохраняющие отношение инцидентности и ориентацию). Пусть Γ, Φ – два конечных ориентированных графа и $\iota: \Gamma \rightarrow \Phi$ – вложение. Мы будем отождествлять Γ с его образом при вложении ι , т.е. записывать $\Gamma \subseteq \Phi$. Легко видеть, что если $\Gamma \subseteq \Phi$, то множество деревьев $\mathcal{T}(\Gamma)$ является подмножеством в $\mathcal{T}(\Phi)$. Обозначим $\mathfrak{j}(\Gamma, \Phi)$ $\mathbb{Z}$ -подмодуль в $\mathfrak{l}(\Phi)$, порожденный всеми деревьями из дополнения $\mathcal{T}(\Phi) \setminus \mathcal{T}(\Gamma)$. Он является идеалом в $\mathfrak{l}(\Phi)$, что непосредственно вытекает из определения умножения деревьев.

Более того, точна следующая последовательность:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{j}(\Gamma, \Phi) \longrightarrow \mathfrak{l}(\Phi) \xrightarrow{\pi} \mathfrak{l}(\Gamma) \longrightarrow 0, \quad (3)$$

где $\pi = \pi_{\Gamma}^{\Phi}$ – это эпиморфизм, для которого

$$\pi(T) = \begin{cases} 0, & \text{если } T \in \mathcal{T}(\Phi) \setminus \mathcal{T}(\Gamma), \\ T, & \text{если } T \in \mathcal{T}(\Gamma). \end{cases}$$

Укажем достаточно простое условие расщепимости последовательности (3). Пусть из того, что две произвольные вершины $v_1, v_2 \in \Gamma \subseteq \Phi$ соединены ребром в графе Φ ,

вытекает, что это ребро принадлежит подграфу Γ (соответствующее вложение графов назовем *полным*). Тогда $\mathbb{Z}$ -линейное отображение $s: \mathfrak{l}(\Gamma) \rightarrow \mathfrak{l}(\Phi)$ такое, что $s(T) = T \forall T \in \mathcal{T}(\Gamma)$, является вложением колец Ли, расщепляющим (3), т.е. $\pi s = 1_{\mathfrak{l}(\Gamma)}$.

Пусть $\Gamma \subseteq \Phi \subseteq \Delta$. Очевидно, что композиция морфизмов $\pi_\Gamma^\Phi \pi_\Phi^\Delta$ равна π_Γ^Δ . Если $\text{id}: \Gamma \rightarrow \Gamma$ – тождественное вложение, то соответствующий гомоморфизм колец Ли π является тождественным. Это означает, что доказано следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Соответствие $\Gamma \rightarrow \mathfrak{l}(\Gamma)$ является контравариантным функтором из категории конечных ориентированных графов $\mathcal{F}\mathcal{O}\mathcal{G}$ в категорию нильпотентных колец Ли.*

В качестве следствия докажем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть Γ – связный граф с n вершинами. Тогда степень нильпотентности кольца $\mathfrak{l}(\Gamma)$ в точности равна n .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем в Γ максимальное дерево M . В виду эпиморфизма $\mathfrak{l}(\Gamma) \rightarrow \mathfrak{l}(M)$ достаточно доказать утверждение для кольца $\mathfrak{l}(M)$. Пусть $v_1, \dots, v_n$ – все вершины M , выписанные в таком порядке, что для всех $k = 1, \dots, n-1$ вершина v_{k+1} соединена ребром с поддеревом, порожденным в M вершинами $v_1, \dots, v_k$ (это всегда можно сделать в силу связности M). Индукцией по k легко получить, что в кольце $\mathfrak{l}(M)$ левонормированный коммутатор $[[[v_1, v_2], \dots], v_k]$ равен с точностью до знака ± 1 дереву, порожденному в M вершинами $v_1, \dots, v_k$. В частности, при $k = n$ получим $[[[v_1, v_2], \dots], v_n] = \pm M \neq 0$, что и требовалось доказать.

1.5. Изменение ориентации ребер. Покажем, что на самом деле кольцо $\mathfrak{l}(\Gamma)$ с точностью до изоморфизма не зависит от выбора ориентации графа Γ . Достаточно показать, что при замене ориентации одного ребра f на противоположную соответствующие кольца изоморфны. Пусть Γ – исходный граф, а Γ^* – граф, в котором ребро f ориентировано в противоположную сторону. Между множествами деревьев $\mathcal{T}(\Gamma)$ и $\mathcal{T}(\Gamma^*)$ имеется естественный изоморфизм; дерево T , рассматриваемое как дерево в Γ^* , обозначим T^* . Пусть $\mathbb{Z}$ -линейное отображение $\varphi: \mathfrak{l}(\Gamma) \rightarrow \mathfrak{l}(\Gamma^*)$ действует на элементах базиса по следующему правилу:

$$\varphi(T) = \begin{cases} -T^*, & \text{если } f \in T, \\ T^*, & \text{если } f \notin T. \end{cases}$$

Равенство $[\varphi(T_1), \varphi(T_2)] = \varphi([T_1, T_2])$ очевидно, если $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$ или ребро f не принадлежит ни T_1 , ни T_2 , ни множеству ребер $E(T_1, T_2) \sqcup E(T_2, T_1)$. Поэтому нужно рассмотреть лишь два случая. Если f принадлежит, скажем, дереву T_1 , то $[\varphi(T_1), \varphi(T_2)] = [-T_1^*, T_2^*]$. С другой стороны, f будет принадлежать любому дереву вида $T_1 \#_e T_2$, и значит, $\varphi(T_1 \#_e T_2) = -T_1^* \#_e T_2^*$, т.е. $[\varphi(T_1), \varphi(T_2)] = \varphi([T_1, T_2])$ и в этом случае.

Пусть теперь f принадлежит, например, $E(T_1, T_2)$. Тогда противоположно ориентированное ребро f^* будет принадлежать $E(T_2^*, T_1^*)$. При этом

$$\begin{aligned} \varphi([T_1, T_2]) &= \sum_{e \in E(T_1, T_2)} \varphi(T_1 \#_e T_2) - \sum_{e \in E(T_2, T_1)} \varphi(T_1 \#_e T_2) \\ &= \varphi(T_1 \#_f T_2) + \sum_{\substack{e \in E(T_1, T_2) \\ e \neq f}} \varphi(T_1 \#_e T_2) - \sum_{e \in E(T_2, T_1)} \varphi(T_1 \#_e T_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -T_1^* \#_{f^*} T_2^* + \sum_{e \in E(T_1^*, T_2^*)} T_1^* \#_e T_2^* - \sum_{\substack{e \in E(T_2^*, T_1^*) \\ e \neq f^*}} T_1^* \#_e T_2^* \\
&= [T_1^*, T_2^*] = [\varphi(T_1), \varphi(T_2)].
\end{aligned}$$

1.6. Модификации конструкции.

1.6.1. *Кольцо $\mathfrak{g}(\Gamma)$.* В предложенной конструкции можно везде заменить деревья (т.е. связные подграфы *без циклов*) на связные подграфы. При этом все рассуждения проходят точно так же, как и в случае деревьев. Будем обозначать множество связных подграфов в Γ через $\mathcal{G}(\Gamma)$, а соответствующее кольцо Ли через $\mathfrak{g}(\Gamma)$.

Пусть $\Phi \in \mathcal{G}(\Gamma)$ и пусть $b_1(\Phi) = |\Phi^1| - |\Phi^0| + 1$ – первое число Бетти графа Φ . Если $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \emptyset$, то $b_1(\Phi_1 \#_e \Phi_2) = b_1(\Phi_1) + b_1(\Phi_2)$, что позволяет ввести еще одну градуировку на кольце $\mathfrak{g}(\Gamma)$ помимо градуировки по числу вершин:

$$\mathfrak{g}(\Gamma) = \bigoplus_{q \geq 0} \mathfrak{g}_q(\Gamma),$$

где $\mathbb{Z}$ -подмодуль $\mathfrak{g}_q(\Gamma)$ порожден всеми $\Phi \in \mathcal{G}(\Gamma)$ с условием $b_1(\Phi) = q$. В частности, подкольцо $\mathfrak{g}_0(\Gamma)$ – это в точности кольцо $\mathfrak{l}(\Gamma)$.

1.6.2. *Случай бесконечного графа Γ .* Можно не ограничиваться конечными графами Γ (однако по-прежнему требуется, чтобы деревья $T \in \mathcal{T}(\Gamma)$ или подграфы $\Phi \in \mathcal{G}(\Gamma)$ были конечными). В этом случае кольца $\mathfrak{g}(\Gamma)$ и $\mathfrak{l}(\Gamma)$ будут, по крайней мере, *локально* нильпотентными.

1.6.3. *Кольца Ли и размеченные графы.* Пусть R – коммутативное ассоциативное кольцо, Γ – ориентированный граф и $\lambda: \Gamma^1 \rightarrow R$ – функция меток ребер. Используя ранее введенные обозначения, определим $\mathfrak{g}(\Gamma, \lambda, R)$ как свободный R -модуль с базисом $\mathcal{G}(\Gamma)$ и умножением, задаваемым на элементах базиса по правилу

$$[\Phi_1, \Phi_2] = \begin{cases} \sum_{e \in E(\Phi_1, \Phi_2)} \lambda(e) \Phi_1 \#_e \Phi_2 - \sum_{e \in E(\Phi_2, \Phi_1)} \lambda(e) \Phi_1 \#_e \Phi_2, & \text{если } \Phi_1 \cap \Phi_2 = \emptyset, \\ 0, & \text{если } \Phi_1 \cap \Phi_2 \neq \emptyset. \end{cases}$$

Это умножение превращает $\mathfrak{g}(\Gamma, \lambda, R)$ в кольцо Ли над R , что доказывается совершенно аналогично предложению 1. Фунториальность $\mathfrak{g}(\Gamma, \lambda, R)$ по Γ имеет место при условии, что при вложении ориентированных графов сохраняются метки ребер. Кольцо $\mathfrak{g}(\Gamma)$ – это не что иное, как $\mathfrak{g}(\Gamma, \lambda_1, \mathbb{Z})$, где $\lambda_1 \equiv 1$. Если имеется вложение колец $R_1 \hookrightarrow R_2$, то естественно рассматривать $\mathfrak{g}(\Gamma, \lambda, R_1)$ как подкольцо Ли в $\mathfrak{g}(\Gamma, \lambda, R_2)$ (расширение кольца скаляров).

Однако отметим, что если Γ – связный граф с n вершинами, то, вообще говоря, степень нильпотентности кольца $\mathfrak{g}(\Gamma, \lambda, R)$ может быть и строго меньше n , например, в случае, когда все метки ребер нулевые.

2. Об одном вложении кольца $\mathfrak{l}(\Gamma)$

Цель данного раздела – построить вложение кольца Ли $\mathfrak{l}(\Gamma)$ в присоединенное кольцо Ли некоторого конечномерного ассоциативного кольца.

2.1. Кольцо $\mathcal{A}(\Gamma)$. Пусть Γ – конечный ориентированный граф. Рассмотрим следующее ассоциативное кольцо с единицей $\mathcal{A}(\Gamma)$, связанное с графом Γ . Как $\mathbb{Z}$ -модуль $\mathcal{A}(\Gamma)$ свободно порождается всеми элементами вида $a(E, V)$, где E, V – некоторые подмножества множеств ориентированных ребер Γ^1 и вершин Γ^0 соответственно. Умножение в $\mathcal{A}(\Gamma)$ задается на базисных элементах по формуле (где $E(V_1, V_2)$ обозначает множество всех ориентированных ребер с началом в V_1 и концом в V_2):

$$a(E_1, V_1) a(E_2, V_2) = a(E_1 \cup E_2 \cup E(V_1, V_2), V_1 \sqcup V_2),$$

если $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, иначе произведение полагается равным 0. Несложно проверяется ассоциативность умножения:

$$\begin{aligned} & (a(E_1, V_1) a(E_2, V_2)) a(E_3, V_3) \\ &= a(E_1, V_1) (a(E_2, V_2) a(E_3, V_3)) \\ &= a(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E(V_1, V_2) \cup E(V_1, V_3) \cup E(V_2, V_3), V_1 \sqcup V_2 \sqcup V_3) \end{aligned}$$

в том случае, когда $V_1 \cap V_2 = V_1 \cap V_3 = V_2 \cap V_3 = \emptyset$ (если это не так, то получается 0). Единицей кольца $\mathcal{A}(\Gamma)$ является элемент $a(\emptyset, \emptyset) = 1$. Заметим, что

$$\text{rk}_{\mathbb{Z}} \mathcal{A}(\Gamma) = 2^{|\Gamma^0| + |\Gamma^1|}.$$

Из определения следует, что $a(E, V) = a(E, \emptyset) a(\emptyset, V)$, и элементы $a(E, \emptyset)$ всегда лежат в центре кольца $\mathcal{A}(\Gamma)$. В дальнейшем элементы вида $a(E, \emptyset)$ будем обозначать просто через $a(E)$ (в частности, $a(\{e\}, \emptyset) = a(e)$ для любого ребра e), а элементы вида $a(\emptyset, V)$ через $a(V)$.

Пусть граф Γ обладает дополнительным свойством: вершинам можно приписать метки $1, 2, \dots, n = |\Gamma^0|$ так, что началом любого ориентированного ребра является вершина с меньшей меткой. Другими словами, Γ является подграфом полного графа $\Gamma(n)$, который рассматривался нами в примере 2. Это ограничение совершенно не существенно, так как этого всегда можно добиться путем изменения ориентации некоторых ребер, что приводит к изоморфному кольцу Ли $\mathfrak{l}(\Gamma)$ (см. п. 1.5).

Покажем, что имеется вложение

$$\alpha: \mathfrak{l}(\Gamma) \longrightarrow [\mathcal{A}(\Gamma)] \quad (4)$$

($[\mathcal{A}(\Gamma)]$ – присоединенное кольцо Ли). Для определения α нам понадобятся элементы $\mu(T)$ (называемые *метками деревьев*) для каждого дерева $T \in \mathcal{T}(\Gamma)$, которые в общем виде представляются в виде произведения $a(e_1) \cdots a(e_p)$ ($e_1, \dots, e_p$ – некоторые ребра, зависящие от T). К описанию этих элементов мы и приступаем.

2.2. Метки деревьев. Будем считать, что вершины $v_1, \dots, v_n$ графа Γ упорядочены в соответствии с естественным порядком индексов, а ориентированные ребра $e = e_{ij}$, которые соединяют вершины v_i и v_j , – лексикографически, т.е. $e_{ij} < e_{kl}$, если либо $j < l$, либо $j = l$, но при этом $i < k$. Пусть, как и раньше, T – некоторое дерево в $\mathcal{T}(\Gamma)$. Добавление к T еще одного ребра определяет в Γ некоторый цикл (простую петлю) Z . Фиксируем на нем ориентацию в соответствии с направлением, которое указывает старшее ребро цикла. Если f – произвольное ребро цикла Z , то оно также определяет на Z

некоторую ориентацию. Назовем ребро f *положительным* относительно Z , если эта ориентация совпадает с той, которую мы выбрали.

Определим теперь метку $\mu(T)$ дерева T . Обозначим через $[T]$ подграф в Γ , порожденный всеми вершинами дерева T . Положим $\mu(T) = \prod_e a(e)$, где произведение берется по всем ребрам $e \in [T] \setminus T$, которые положительны относительно возникающих при их добавлении циклов.

ПРИМЕРЫ. Пусть $\Gamma = \Gamma(n)$ – полный граф и T – звездное дерево с ребрами e_{1i} , $i = 2, \dots, n$. Тогда все дополнительные ребра положительны относительно соответствующих циклов, поэтому

$$\mu(T) = \prod_{1 < i < j \leq n} a(e_{ij})$$

– произведение, взятое по всем дополнительным ребрам. Напротив, если $T = \Lambda(n)$ – простая цепь с ребрами $e_{i,i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$, из примера 3, то ни одно дополнительное ребро не является положительным и $\mu(T) = 1$.

2.3. Построение вложения. Положим

$$\alpha(T) = a(T^0) \mu(T) \prod_{e \in T} (a(e) - 1) \quad (5)$$

и продолжим это отображение по линейности на $\mathfrak{l}(\Gamma)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Отображение α задает вложение кольца Ли $\mathfrak{l}(\Gamma)$ в присоединенное кольцо Ли $[\mathcal{A}(\Gamma)]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим, что выполняется равенство

$$\alpha([T_1, T_2]) = \alpha(T_1)\alpha(T_2) - \alpha(T_2)\alpha(T_1). \quad (6)$$

Если $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$, то T_1 и T_2 имеют общую вершину, и в силу равенства (5) обе части (6) равны 0. Пусть $T_1 \cap T_2 = \emptyset$. Нам нужно показать, что

$$\sum_{e \in E(T_1, T_2)} \alpha(T_1 \#_e T_2) - \sum_{e \in E(T_2, T_1)} \alpha(T_1 \#_e T_2) = \alpha(T_1)\alpha(T_2) - \alpha(T_2)\alpha(T_1). \quad (7)$$

Поскольку в $\mathcal{A}(\Gamma)$ выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} a(T_1^0)a(T_2^0) &= a(T_1^0 \sqcup T_2^0) \prod_{e \in E(T_1, T_2)} a(e), \\ a(T_2^0)a(T_1^0) &= a(T_1^0 \sqcup T_2^0) \prod_{e \in E(T_2, T_1)} a(e), \end{aligned}$$

то (7) вытекает из равенства

$$\begin{aligned} &\sum_{e \in E(T_1, T_2)} (a(e) - 1) \mu(T_1 \#_e T_2) - \sum_{e \in E(T_2, T_1)} (a(e) - 1) \mu(T_1 \#_e T_2) \\ &= \mu(T_1)\mu(T_2) \prod_{e \in E(T_1, T_2)} a(e) - \mu(T_2)\mu(T_1) \prod_{e \in E(T_2, T_1)} a(e). \end{aligned} \quad (8)$$

Отметим, что в силу определения $\mu(T)$ любую метку $\mu(T_1 \#_e T_2)$ можно представить как произведение $\mu(T_1)\mu(T_2)\rho(e)$, где $\rho(e)$ состоит из произведения элементов вида $a(f)$, соответствующих некоторым ребрам f из $E(T_1, T_2) \sqcup E(T_2, T_1)$ (конкретный вид $\rho(e)$ определен ниже, в лемме 1), т.е. $\mu(T_1 \#_e T_2)$ всегда “делится” на $\mu(T_1)\mu(T_2)$.

Таким образом, (8) следует из равенства

$$\sum_{e \in E(T_1, T_2)} (a(e) - 1)\rho(e) - \sum_{e \in E(T_2, T_1)} (a(e) - 1)\rho(e) = \prod_{e \in E(T_1, T_2)} a(e) - \prod_{e \in E(T_2, T_1)} a(e), \quad (9)$$

которое мы и рассмотрим, но сначала сделаем некоторое отступление от доказательства предложения.

2.4. Упорядочение множества $E(T_1, T_2) \sqcup E(T_2, T_1)$. Пусть $e, f \in E(T_1, T_2) \sqcup E(T_2, T_1)$ и $Z = Z(e, f)$ – цикл, который получается присоединением к T_1, T_2 ребер e, f . Скажем, что $e \prec f$, если при положительном обходе Z (т.е. в направлении старшего ребра этого цикла) после прохождения ребра e мы оказываемся в дереве T_2 . Если это не так, то будем говорить, что $e \succ f$.

Покажем, что введенное отношение действительно является отношением порядка на множестве $E(T_1, T_2) \sqcup E(T_2, T_1)$, т.е. если $e \prec f$, $f \prec h$, то и $e \prec h$. Предположим, что $h \prec e$. Рассмотрим объединение всех ребер из $Z(e, f)$, $Z(f, h)$, $Z(h, e)$. Это некоторый граф $\Phi = \Phi(e, f, h) \subseteq \Gamma$, все вершины которого, кроме двух вершин степени 3, имеют степень 2, причем граф Φ остается связным при удалении произвольного ребра. Любое ребро b графа Φ входит ровно в два из указанных выше трех циклов. Если $e \prec f$, $f \prec h$, $h \prec e$, то при последовательном положительном обходе всех трех циклов ребро b будет проходиться ровно два раза: один раз в соответствии с ориентацией ребра b , другой раз – в противоположном направлении. Пусть b – старшее ребро в графе Φ (относительно порядка всех ребер графа Γ). Очевидно, что b – старшее ребро в обоих циклах, которым оно принадлежит. Поскольку положительный обход цикла всегда происходит в направлении старшего ребра цикла, мы получаем противоречие со сделанным предположением, т.е. $e \prec h$.

Таким образом, можно упорядочить все ребра из $E(T_1, T_2) \sqcup E(T_2, T_1)$. Выпишем их в порядке возрастания: $e_1 \prec \dots \prec e_t$. Обозначим

$$\rho_{21}(e) = \prod_{\substack{f \succ e \\ f \in E(T_2, T_1)}} a(f), \quad \rho_{12}(e) = \prod_{\substack{f \prec e \\ f \in E(T_1, T_2)}} a(f). \quad (10)$$

ЛЕММА 1. В ранее введенных обозначениях $\rho(e) = \rho_{21}(e)\rho_{12}(e)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если ребро e фиксировано (скажем, $e \in E(T_1, T_2)$), то $a(f)$ входит в метку $\rho(e)$ в двух случаях, а именно, если $f \succ e$, $f \in E(T_2, T_1)$ или $f \prec e$, $f \in E(T_1, T_2)$ (в этих случаях ребро f положительно ориентировано относительно возникающего цикла $Z = Z(e, f)$).

Разложение $\rho(e) = \rho_{21}(e)\rho_{12}(e)$ будем называть *полярным*.

2.5. Продолжение доказательства предложения 4. То, что элементы $\rho(e)$ удовлетворяют (9), вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 2. Пусть $e_1 \prec \dots \prec e_t$ – все ребра из $E(T_1, T_2) \sqcup E(T_2, T_1)$ и

$$S(p) = \sum_{i=1}^p \operatorname{sgn} e_i (\rho(e_i) - \rho(e_i)a(e_i)), \quad p = 1, \dots, t,$$

где $\operatorname{sgn} e_i = -1$, если $e_i \in E(T_1, T_2)$; иначе $\operatorname{sgn} e_i = 1$. Тогда, если $e_p \in E(T_1, T_2)$, то

$$S(p) = - \prod_{e \in E(T_2, T_1)} a(e) + \rho(e_p)a(e_p),$$

а если $e_p \in E(T_2, T_1)$, то

$$S(p) = - \prod_{e \in E(T_2, T_1)} a(e) + \rho(e_p).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по p . При $p = 1$ утверждение непосредственно следует из равенства $\rho(e_1) = \rho_{21}(e_1)$. Пусть уже доказано, что

$$S(p) = - \prod_{e \in E(T_2, T_1)} a(e) + \rho(e_p)a(e_p)$$

(для определенности рассмотрим случай $e_p \in E(T_1, T_2)$; оставшийся случай рассматривается аналогично). Если $e_{p+1} \in E(T_1, T_2)$, то

$$S(p+1) = - \prod_{e \in E(T_2, T_1)} a(e) + \rho(e_p)a(e_p) - \rho(e_{p+1}) + \rho(e_{p+1})a(e_{p+1}).$$

Из полярного разложения $\rho(e)$ вытекает, что $\rho(e_p)a(e_p) = \rho(e_{p+1})$, т.е. шаг индукции сделан. Аналогично исследуется случай, когда $e_{p+1} \in E(T_2, T_1)$. Лемма 2 доказана.

При $p = t$ в любом случае получается

$$S(t) = \prod_{e \in E(T_1, T_2)} a(e) - \prod_{e \in E(T_2, T_1)} a(e).$$

Действительно, если $e_t \in E(T_1, T_2)$, то

$$\rho(e_t)a(e_t) = \prod_{e \in E(T_1, T_2)} a(e),$$

а иначе

$$\rho(e_t) = \prod_{e \in E(T_1, T_2)} a(e).$$

Таким образом, равенство (9), а вместе с ним и гомоморфность отображения α , доказаны.

Убедимся в том, что гомоморфизм α является вложением. Пусть

$$\sum_T n_T \alpha(T) = 0, \quad n_T \in \mathbb{Z}, \quad (11)$$

где сумма берется по всем деревьям T в Γ с фиксированным множеством вершин $T^0 = V$ (легко видеть, что общий случай сводится к этому). Из (11) и определения α следует, что в $\mathcal{A}(\Gamma)$ должно выполняться равенство

$$a(V) \sum_T n_T \mu(T) \prod_{e \in T} (a(e) - 1) = 0. \quad (12)$$

Поскольку

$$\sum_T n_T \mu(T) \prod_{e \in T} (a(e) - 1) = \sum k_i a(E_i),$$

где E_i — это подмножества множества ребер графа Γ , то

$$a(V) \sum k_i a(E_i) = \sum k_i a(V, E_i) = 0$$

тогда и только тогда, когда $\sum k_i a(E_i) = 0$.

Покажем, что в (12) все n_T равны 0. Сократив на $a(V)$, получим

$$\sum_T n_T \mu(T) \prod_{e \in T} (a(e) - 1) = 0, \quad (13)$$

где правая часть рассматривается как элемент коммутативного подкольца $\mathcal{A}^1(\Gamma) \subset \mathcal{A}(\Gamma)$, порожденного всеми $a(e)$. Обратим внимание, что для любого ребра e выполняется $a(e)^2 = a(e)$, и, как легко видеть, это и есть все определяющие соотношения кольца $\mathcal{A}^1(\Gamma)$. В частности, для любого дерева $T \in \mathcal{T}(\Gamma)$ можно определить гомоморфизм колец $\varphi_T: \mathcal{A}^1(\Gamma) \rightarrow \mathbb{Z}$ такой, что

$$\varphi_T(a(e)) = \begin{cases} 0, & \text{если } e \in T, \\ 1, & \text{если } e \notin T. \end{cases}$$

Пусть T — фиксированное дерево, учитываемое в сумме (13). Применим к равенству (13) гомоморфизм φ_T . В любом дереве D , отличном от T , есть ребро f , не входящее в T , и для которого $\varphi_T(a(f) - 1) = 0$. Поскольку $\varphi_T(\mu(T)) = 1$, из равенства (13) вытекает, что $\pm n_T = 0$. Таким образом, α действительно является вложением, и предложение 4 доказано.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кузьмин Ю. В., Семёнов Ю. С. О гомологиях свободной нильпотентной группы класса 2 // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 4. С. 49–82.
- [2] Cayley A. Collected Mathematical Papers. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1889–1897.
- [3] Clarke L. E. On Cayley's formula for counting trees // J. London Math. Soc. 1958. V. 33. P. 471–474.
- [4] Moon J. W. Another proof of Cayley's formula for counting trees // Amer. Math. Monthly. 1963. V. 70. P. 846–847.