Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Солонуха, О существовании решений нелинейных параболических вариационных неравенств с односторонними ограничениями, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 3, 460–476

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2506>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 03:05:25

УДК 517.9

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ С ОДНОСТОРОННИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

О. В. Солонуха

Доказаны достаточные условия существования решения “сильного” нелинейного вариационного неравенства параболического типа. Теория применена для параболических уравнений с односторонними краевыми условиями. В качестве примера показано существование решения “сильного” параболического вариационного неравенства с p -лапласианом в соболевском пространстве $L_p(0, T; W_p^1(\Omega))$, $p \in [2, \infty)$.

Библиография: 13 названий.

Введение. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса $C^{1,1}$, ν – внешняя нормаль к $\partial\Omega$, $Q = (0, T) \times \Omega$, $\Gamma_T = (0, T) \times \partial\Omega$. Рассматривается параболическое уравнение с односторонними краевыми условиями:

$$\partial_t y - \sum_{1 \leq i \leq n} \partial_i a_i(t, x, y, \nabla y) + a_0(t, x, y, \nabla y) = f \quad \text{п.в. на } Q, \quad (1)$$

$$y(0, x) = 0 \quad \text{п.в. на } \Omega, \quad (2)$$

$$y \geq 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \nu_A} \geq 0, \quad y \frac{\partial y}{\partial \nu_A} = 0 \quad \text{п.в. на } \Gamma_T, \quad (3)$$

где

$$\nabla y = (\partial_1 y, \dots, \partial_n y), \quad \frac{\partial y}{\partial \nu_A} = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i(t, x, y, \nabla y) \cos(x_i, \nu).$$

При некоторых условиях на a_i данной задаче соответствует вариационное неравенство

$$\begin{aligned} & \int_Q \partial_t y (\xi - y) \, dx \, dt + \sum_{1 \leq i \leq n} \int_Q a_i(t, x, y, \nabla y) \partial_i (\xi - y) \, dx \, dt \\ & + \int_Q a_0(t, x, y, \nabla y) (\xi - y) \, dx \, dt \geq \int_Q f (\xi - y) \, dx \, dt \quad \forall \xi \in K, \end{aligned} \quad (4)$$

которое можно получить из (1)–(3), интегрируя по частям (см. [1, § 2.9]). Здесь $K = \{y \in X : y|_{\partial\Omega} \geq 0, y|_{t=0} = 0\}$, $X = L_p(0, T; W_p^1(\Omega))$ с $p \in [2, \infty)$.

Элемент $y \in K$, имеющий производную по времени в смысле распределений $\partial_t y \in X^*$, называют “сильным” обобщенным решением задачи (1)–(3), если y удовлетворяет вариационному неравенству (4).

Еще раз подчеркнем, что данная постановка задачи требует наличия производной по t у решения. Снять данное ограничение можно, рассматривая “слабую” постановку задачи: найти $y \in K$ такое, что

$$\int_Q \partial_t \xi (\xi - y) dx dt + \sum_{1 \leq i \leq n} \int_Q a_i(t, x, y, \nabla y) \partial_i (\xi - y) dx dt + \int_Q a_0(t, x, y, \nabla y) (\xi - y) dx dt \geq \int_Q f(\xi - y) dx dt \quad \forall \xi \in K \cap W, \quad (5)$$

где $W = \{\zeta \in X : \partial_t \zeta \in X^*\}$, $X^* = L_q(0, T; (W_p(\Omega))^*)$, $q^{-1} + p^{-1} = 1$.

Очевидно, что каждое решение “сильного” вариационного неравенства (4) является решением “слабого” вариационного неравенства (5). Обратно, если $y \in K$ – решение неравенства (5) и $\partial_t y \in X^*$, то y – решение (4).

Подобные задачи впервые были рассмотрены в конце 60-х годов Г. Стампаккья и Ж.-Л. Лионсом [2], тогда же Х. Брезис [3] предложил достаточные условия существования “слабого” (т.е. удовлетворяющего (4)) и “сильного” (т.е. удовлетворяющего (5)) решений. Доказательство, предложенное в [3], использовало свойство псевдомонотонности для получения “слабого” решения, а также линейность операторов и дополнительное “регуляризационное” условие для перехода к “сильному” решению.

Односторонние ограничения часто встречаются в задачах физики, биологии, экономики и т.п. (см., например, [1], [4, гл. 3, 5], а также имеющуюся там библиографию, [5]). При этом основная трудность исследования эволюционных вариационных неравенств связана с тем, что оператор дифференцирования ∂_t определен на подпространстве W , плотно вложенном в базовое пространство X .

Данная статья посвящена существованию решений “сильных” нелинейных параболических вариационных неравенств. В работе сняты ограничения псевдомонотонности и линейности благодаря использованию свойств операторов с $(X; W)$ -полуограниченной вариацией. В частности, доказано существование “сильного” обобщенного решения односторонней задачи, заданной параболическим вариационным неравенством с p -лапласианом (пример 2). Эта задача была сформулирована Ж. -Л. Лионсом в виде нерешенной проблемы ([1, § 2.9]).

Используемый в работе класс радиально непрерывных отображений с $(X; W)$ -полуограниченной вариацией был введен Ю. А. Дубинским [6] при исследовании достаточных условий существования обобщенных решений параболических уравнений и является подклассом обобщенно псевдомонотонных на W операторов. В 90-х годах подклассы одно- и многозначных псевдомонотонных на W операторов исследовались В. С. Мельником [7], там же приведены теоремы существования Λ -слабых решений вариационных неравенств с многозначными операторами, частным случаем которых являются “слабые” параболические нелинейные вариационные неравенства.

Работа состоит из трех разделов. В первом перечислены рассматриваемые классы операторов и сформулирована задача в абстрактном рефлексивном банаховом пространстве. Второй раздел содержит теорему существования решения “сильного” параболического вариационного неравенства. В третьем разделе теория применена для изучения параболической задачи с односторонними краевыми условиями, а также введен критерий принадлежности оператора $A: L_p(0, T; W_p^1(\Omega)) \rightarrow L_q(0, T; (W_p^1(\Omega))^*)$ классу радиально непрерывных операторов с $(X; W)$ -полуограниченной вариацией. Абстрактные результаты иллюстрируют три примера: в первом используется линейный

непсевдомонотонный оператор, во втором – нелинейный монотонный оператор (p -лапласиан), в третьем – нелинейный и непсевдомонотонный оператор.

1. Определения и постановка задачи. Пусть V – рефлексивное банахово пространство, V^* – дуально сопряженное к нему относительно гильбертова пространства H , $T \in (0, +\infty)$, $1 < p_1 \leq p_0 < +\infty$. Тогда $X = L_{p_1}(0, T; V) \cap L_{p_0}(0, T; H)$ – также рефлексивное банахово пространство, $X^* = L_{q_1}(0, T; V^*) + L_{q_0}(0, T; H)$ – сопряженное к нему при $q_1^{-1} + p_1^{-1} = q_0^{-1} + p_0^{-1} = 1$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – каноническая двойственность $X \times X^*$. Введем рефлексивное банахово пространство $W = \{y \in X : \partial_t y \in X^*\}$ с нормой $\|y\|_W = \|y\|_X + \|\partial_t y\|_{X^*}$. Кроме того, будем рассматривать полунорму $\|\cdot\|'_W$, определенную для всех $y \in X$, непрерывную относительно $\|\cdot\|_X$ и компактную относительно $\|\cdot\|_{W^1}$. Пусть G – полугруппа, генератором которой является оператор ∂_t , K – выпуклое замкнутое подмножество V , причем $0 \in K$ и K удовлетворяет условию согласования

$$G(s)K \subset K \quad \forall s \geq 0. \quad (6)$$

Мы рассматриваем условие существования

$$y \in K = \{\zeta \in X : \zeta(t) \in K \text{ почти всюду, } \zeta|_{t=0} = 0\}, \quad (7)$$

удовлетворяющего нестационарному вариационному неравенству

$$\langle \partial_t y, \xi - y \rangle + \langle A(y), \xi - y \rangle \geq \langle f, \xi - y \rangle \quad \forall \xi \in K. \quad (8)$$

По построению K – выпуклое замкнутое подмножество X^2 .

В работе рассмотрены нулевые начальные условия $y|_{t=0} = 0$, которые входят в определение множества K . В силу непрерывности вложения $W \subset C(0, T; H)$ и линейности оператора ∂_t можно рассматривать произвольные начальные условия $y|_{t=0} = u \in K$, где K удовлетворяет условию согласования (6). В таком случае задача будет рассматриваться на множестве $K = \{\zeta \in X : \zeta(t) \in K \text{ почти всюду, } \zeta|_{t=0} = u\}$ и должен существовать $y_0 \in K \cap W$ такой, что $y_0|_{t=0} = u$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Оператор $A: X \rightarrow X^*$ *ограничен*, если образ ограниченного множества ограничен. Оператор A называется *локально ограниченным*, если для любого $y \in X$ существуют $N > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $\|A(\xi)\|_{X^*} \leq N$ для всех $\|\xi - y\|_X \leq \varepsilon$. Оператор называется *квазиограниченным*, если для любого $k_1 > 0$ существует $N = N(k_1) < \infty$ такой, что $\|A(y)\|_{X^*} \leq N$ при $\|y\|_X \leq k_1$ и $\langle A(y), y - y_0 \rangle \leq k_1 \|y - y_0\|_{X^3}$.

¹Например, при $p_0 = p_1 = p \geq 2$ вполне достаточно рассматривать в качестве $\|\cdot\|'_W$ норму пространства $L_2(0, T; H)$ или $L_{\tilde{p}}(0, T; \tilde{V})$, где вложение $V \subset \tilde{V}$ компактно, $\tilde{V} \subset H$, $2 \leq \tilde{p} \leq p$.

²Как известно (теорема 2.9.1 из [1]), из выполнения условия (6) следует существование для любого $y \in K$ последовательности $W \cap K \ni \zeta_i \rightarrow y$ в X , для которой $\lim_{i \rightarrow \infty} \langle \partial_t \zeta_i, \zeta_i - y \rangle \leq 0$. Достаточно использовать именно это свойство при выделении выпуклого замкнутого множества K вместо (6), (7).

³Здесь $y_0 \in X \cap W$ – фиксированный элемент для всех $y \in X$. В большинстве работ (см. [1], [8], [9]) предполагается, что $y_0 = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Оператор $A: X \rightarrow X^*$ называется

- 1) *обобщенно псевдомонотонным* [8], если для любой последовательности $y_n \rightarrow y$ слабо в X , $A(y_n) \rightarrow w$ слабо в X^* , такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle A(y_n), y_n - y \rangle \leq 0$, справедливо, что $w = A(y)$ и $\langle A(y_n), y_n \rangle \rightarrow \langle w, y \rangle$;
- 2) *обобщенно псевдомонотонным на W* , если для произвольной последовательности $y_n \rightarrow y$ слабо в W , $A(y_n) \rightarrow w$ слабо в X^* при $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle A(y_n), y_n - y \rangle \leq 0$ справедливо, что $w = A(y)$ и $\langle A(y_n), y_n \rangle \rightarrow \langle A(y), y \rangle$ (последнее может выполняться на подпоследовательности);
- 3) *монотонным*, если $\langle A(y_1) - A(y_2), y_1 - y_2 \rangle \geq 0$ для любых $y_1, y_2 \in X$;
- 4) *максимально монотонным*, если оператор является монотонным и его график не содержится в графике другого монотонного оператора;
- 5) *деминепрерывным*, если он непрерывен из сильной топологии X в слабую топологию X^* ;
- 6) *радиально непрерывным*, если он деминепрерывен на произвольном аффинном подпространстве размерности 1^4 ;
- 7) *оператором с полуограниченной вариацией*, если для всех $\{y_n\}$ ($n = 1, 2, \|y_n\|_X \leq R$) существует непрерывная функция C такая, что

$$\langle A(y_1) - A(y_2), y_1 - y_2 \rangle \geq -C(R; \|y_1 - y_2\|'_X),$$

где $\tau^{-1}C(R, \tau h) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow +0$ для всех $R, h > 0$, $\|\cdot\|'_X$ — компактная полунорма относительно $\|\cdot\|_X$;

- 8) *оператором с (X, W) -полуограниченной вариацией*, если для всех $\{y_n\}$ ($n = 1, 2, \|y_n\|_X \leq R$) существует непрерывная функция C такая, что

$$\langle A(y_1) - A(y_2), y_1 - y_2 \rangle \geq -C(R; \|y_1 - y_2\|'_W), \quad (9)$$

где $\tau^{-1}C(R, \tau h) \rightarrow +0$ при $\tau \rightarrow 0$ для всех $R, h > 0$, $\|\cdot\|'_W$ — компактная полунорма относительно $\|\cdot\|_W$ и непрерывная относительно $\|\cdot\|_X$;

- 9) *псевдомонотонным (псевдомонотонным на W)*, если для любой последовательности $y_n \rightarrow y$, слабо сходящейся в X (в W), при $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle A(y_n), y_n - y \rangle \leq 0$ для всех $\xi \in X$ справедлива оценка $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle A(y_n), y_n - \xi \rangle \geq \langle A(y), y - \xi \rangle$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Оператор $A: X \rightarrow X^*$ *коэрцитивен на $K \cap W$* , если существуют $y_0 \in K \cap W$ и функция $\gamma: \mathbb{R}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ такие, что $\gamma(s) \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$ и $\langle A(y), y - y_0 \rangle \geq \gamma(\|y\|_X)\|y - y_0\|_X$ для $y \in K$. (Ниже $y_0 \in K \cap W$ совпадает с элементом, используемым в определении квазиограниченности.)

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Очевидно, что обобщенно псевдомонотонный оператор является обобщенно псевдомонотонным на W , псевдомонотонный оператор является псевдомонотонным на W .

ЛЕММА 1. Для квазиограниченных операторов свойства псевдомонотонности на W и обобщенной псевдомонотонности на W совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы аналогично доказательству предложения 4 в [8] для ограниченных обобщенно псевдомонотонных операторов.

⁴Очевидно, каждый деминепрерывный оператор радиально непрерывен.

ЛЕММА 2. Пусть $A: \text{Dom}(A) = X \rightarrow X^*$ – радиально непрерывный оператор с $(X; W)$ -полуограниченной вариацией. Тогда A обобщенно псевдомонотонен на W .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из предложения 4.2.2 в [7].

ЛЕММА 3. Пусть $A: X \rightarrow X^*$ – оператор с $(X; W)$ -полуограниченной вариацией и областью определения $\text{Dom}(A) = X$. Тогда A квазиограничен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\|\cdot\|'_W$ – непрерывная полунорма относительно $\|\cdot\|_X$, то $\langle A(y_1) - A(y_2), y_1 - y_2 \rangle \geq -\tilde{C}(R; \|y_1 - y_2\|_X)$, где непрерывная функция $\tilde{C}$ удовлетворяет условию: $\tau^{-1}\tilde{C}(R, \tau h) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow +0$ для всех $R, h > 0$. В лемме 2 [10] доказано, что такие операторы квазиограничены.

2. Достаточные условия разрешимости вариационных неравенств. В дальнейшем нам потребуются следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 1 [6, теорема 2.1]. Пусть X – рефлексивное банахово пространство, $A: X \rightarrow X^*$ – радиально непрерывный, коэрцитивный оператор с $(X; W)$ -полуограниченной вариацией. Тогда непусто и слабо компактно множество решений задачи Коши

$$\partial_t y + A(y) = f, \quad y|_{t=0} = 0.$$

ТЕОРЕМА 2 [7, замечание 4.2.3]. Пусть $[\cdot]_V$ – некоторая полунорма на V . Положим $[y]_X^{p_1} = \int_0^T [y(\tau)]_V^{p_1} d\tau$. Утверждение теоремы 1 сохранится, если вместо коэрцитивности оператора A выполнено следующее условие:

существуют $\lambda_0 > 0$, $\beta > 0$, $\hat{\gamma} > 0$ и $\alpha \in \mathbb{R}^1$ такие, что $\forall y \in X$

$$[y]_X + \lambda_0 \|y\|_{L_{p_0}(0, T; H)} \geq \beta \|y\|_X, \quad (10)$$

$$\langle A(y), y \rangle \geq \hat{\gamma} [y]_X^{p_1} + \alpha. \quad (11)$$

В теоремах 1, 2 рассмотрено $y_0 = 0$. Если $W \cap K \ni y_0 \neq 0$, то необходимо сделать сдвиг системы координат.

Как указано в п. 1, $K = \{\zeta \in X: \zeta(t) \in \mathbf{K} \text{ п.в.}, \zeta|_{t=0} = 0\}$, где $\mathbf{K}$ – выпуклое замкнутое множество, для которого справедливо условие согласования (6). Зафиксируем оператор двойственности $J(y) = \{w \in X^*: \langle w, y \rangle = \|y\|_X^2 = \|w\|_{X^*}^2\}$. Для строго выпуклых пространств данный оператор однозначно определен (предложение 2.2.3 [1]). Поскольку для любого рефлексивного банахова пространства можно предложить эквивалентную норму, относительно которой пространство и его сопряженное строго выпуклы (теорема 2.2.5 [1]), ниже будем считать, что X и X^* строго выпуклы.

Введем условие “регулярности” [1], [3]⁵:

$$\begin{aligned} &\text{для любых } \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], y \in K \text{ и некоторого } g \in X^* \text{ уравнение} \\ &\partial_t y_\varepsilon + A(y_\varepsilon) + \varepsilon^{-1} J(y_\varepsilon - y) = g \text{ имеет решение } y_\varepsilon \in K \cap W. \end{aligned} \quad (12)$$

⁵Здесь g одинаково для всех $y \in K, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть X – рефлексивное банахово пространство. Предположим, что $A : X \rightarrow X^*$ – радиально непрерывный оператор с (X, W) -полуограниченной вариацией, причем выполнены условие “регулярности” (12) и одно из следующих условий:

- i) K ограничено;
- ii) A коэрцитивен на $K \cap W$;
- iii) A удовлетворяет условиям (10), (11).

Тогда вариационное неравенство (8) имеет непустое, слабо компактное в W и в X множество решений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для простоты приведем доказательство в случае сепарабельного пространства X . Кроме того, будем считать, что $y_0 = 0$. Иначе можно рассматривать задачу относительно переменных $\tilde{y} = y - y_0$. Поскольку $y_0 \in K \cap W$, то данный сдвиг сохраняет свойства операторов A и ∂_t в новой системе координат. При этом сдвиге $0 \in K$.

Пусть $\{h_k\}_{k=1}^\infty$ – базис в $W_0 = \{y \in W : y|_{t=0} = 0\}$. Рассмотрим последовательность конечномерных подпространств $X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_n \subset \dots \subset W \subset X$, где $X_n = \text{span}\{h_1, \dots, h_n\}$. Напомним, что линейная оболочка $\{h_k\}_{k=1}^\infty$ плотна в X . Пусть $(\partial_t + A)_n(y) = \sum_{1 \leq k \leq n} \langle (\partial_t + A)(y), h_k \rangle h_k$ и $f_n = \sum_{1 \leq k \leq n} \langle f, h_k \rangle h_k$. Оператор $(\partial_t + A)_n : X_n \rightarrow X_n$ непрерывный с полуограниченной вариацией, т.е. для каждого n существует элемент $y_n \in K \cap X_n$, удовлетворяющий вариационному неравенству

$$\langle (\partial_t + A)_n(y_n), y_n - \xi \rangle \leq \langle f_n, y_n - \xi \rangle \quad \forall \xi \in K \cap X_n. \quad (13)$$

В случае ограниченного множества K это утверждение следует из теоремы 1 в [10], в случае ii) – из теоремы 2 [10], в случае iii) – из теоремы 1 [11] с компенсационным оператором $\langle G(y), y \rangle := \lambda_0 \|y\|_{L_{p_0}(0, T; H)}^{p_1}$. При этом множество $\{y_n\}$ ограничено. В случае i) ограниченность множества $\{y_n\}$ следует из принадлежности его ограниченному множеству K . В случае ii) для доказательства ограниченности $\{y_n\}$ воспользуемся коэрцитивностью оператора A . Подставим $\xi = 0 \in K$ в (13). Тогда

$$\begin{aligned} \|y_n\|_X \|f_n\|_{X_n^*} &\geq \langle f_n, y_n \rangle \geq \langle (\partial_t + A)_n(y_n), y_n \rangle = \langle \partial_t y_n + A(y_n), y_n \rangle \\ &\geq \frac{1}{2} \|y_n(T)\|_H^2 + \gamma(\|y_n\|_X) \|y_n\|_X, \end{aligned}$$

т.е. $\gamma(\|y_n\|_X) \leq \|f\|_{X^*} - (2\|y_n\|_X)^{-1} \|y_n(T)\|_H^2$. Поскольку $\gamma(s) \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, последнее неравенство доказывает ограниченность множества $\{y_n\}$. В случае iii) согласно теореме 1 [11] решения вариационного неравенства принадлежат ограниченному множеству, выделение которого использует коэрцитивность оператора $A + G$, т.е. так же, как и в случае ii) не зависит от n . Из ограниченного множества $\{y_n\}$ согласно теореме Банаха–Алаоглу можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность, которую не нарушая общности также обозначим $y_n \rightarrow y$ слабо в X . В соответствии с условием “регулярности” для $y = y_n \in K \cap X_n$ и произвольного $\varepsilon > 0$ существует решение уравнения (12) $y_\varepsilon^n \in K \cap W$. Обозначим проекцию y_ε^n на X_n через $y_{\varepsilon n}$. Вследствие деминепрерывности операторов существует последовательность $g_n \rightarrow g$ слабо в X^* такая, что

$$(\partial_t + A)(y_{\varepsilon n}) + \varepsilon^{-1} J(y_{\varepsilon n} - y_n) = g_n. \quad (14)$$

Согласно (13)

$$\begin{aligned} & \langle \partial_t y_{\varepsilon n} + A(y_{\varepsilon n}) - f_n, y_{\varepsilon n} - y_n \rangle \\ &= \langle \partial_t y_n + A(y_n) - f_n, y_{\varepsilon n} - y_n \rangle + \langle A(y_{\varepsilon n}) - A(y_n) + \partial_t y_{\varepsilon n} - \partial_t y_n, y_{\varepsilon n} - y_n \rangle \\ &\geq -C(R; \|y_{\varepsilon n} - y_n\|'_W). \end{aligned}$$

С другой стороны, $y_{\varepsilon n}$ удовлетворяют (14), т.е.

$$\begin{aligned} \langle \partial_t y_{\varepsilon n} + A(y_{\varepsilon n}) - f_n, y_{\varepsilon n} - y_n \rangle &= \langle g_n - \varepsilon^{-1} J(y_{\varepsilon n} - y_n) - f_n, y_{\varepsilon n} - y_n \rangle \\ &= \langle g_n - f_n, y_{\varepsilon n} - y_n \rangle - \varepsilon^{-1} \|y_{\varepsilon n} - y_n\|_X^2. \end{aligned}$$

Из этих двух оценок следует, что

$$\varepsilon^{-1} \|y_{\varepsilon n} - y_n\|_X^2 \leq \|g_n - f_n\|_{X^*} \|y_{\varepsilon n} - y_n\|_X + C(R; \|y_{\varepsilon n} - y_n\|'_W),$$

т.е.

$$\varepsilon^{-1} \|y_{\varepsilon n} - y_n\|_X \leq \|g_n - f_n\|_{X^*} + \|y_{\varepsilon n} - y_n\|_X^{-1} C(R; \|y_{\varepsilon n} - y_n\|'_W). \quad (15)$$

Напомним, что g одинаково для всех y_n . В силу слабой сходимости $g_n \rightarrow g$ существует оценка, которая не зависит от n и ε : $\|g_n - f_n\|_{X^*} \leq C_1 < \infty$.

Покажем ограниченность в совокупности множества $\{y_{\varepsilon n}\}$. В случае i) это непосредственно вытекает из принадлежности их ограниченному множеству K . В случае ii) используем коэрцитивность A :

$$\begin{aligned} & \langle \partial_t y_{\varepsilon n} + A(y_{\varepsilon n}) + \varepsilon^{-1} J(y_{\varepsilon n} - y_n), y_{\varepsilon n} \rangle \\ &\geq \gamma(\|y_{\varepsilon n}\|_X) \|y_{\varepsilon n}\|_X + \varepsilon^{-1} (\|y_{\varepsilon n} - y_n\|_X^2 - \|y_{\varepsilon n} - y_n\|_X \|y_n\|_X). \end{aligned}$$

Очевидно, для всех $\varepsilon > 0$ при достаточно больших $\|y_{\varepsilon n}\|_X$ второе слагаемое положительно. Получена равномерная коэрцитивность, которая доказывает ограниченность множества решений уравнения (14).

Рассмотрим случай iii)⁶. В пространстве $X_t = L_{p_1}(0, t; V) \cap L_{p_0}(0, t; H)$ введем полунорму $[y]_{X_t}^{p_1} = \int_0^t [y(\tau)]_V^{p_1} d\tau$. В силу уравнения (14) и оценки (11)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} \|y_{\varepsilon n} - y_n\|_{X_t}^2 + \frac{1}{2} \|y_{\varepsilon n}(t)\|_H^2 + \gamma[y_{\varepsilon n}]_{X_t}^{p_1} + \alpha \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \langle J(y_{\varepsilon n} - y_n), y_{\varepsilon n} - y_n \rangle_{X_t} + \frac{1}{2} \|y_{\varepsilon n}(t)\|_H^2 + \langle A(y_{\varepsilon n}), y_{\varepsilon n} \rangle_{X_t} \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \langle J(y_{\varepsilon n} - y_n), -y_n \rangle_{X_t} + \langle g, y_{\varepsilon n} \rangle_{X_t}. \end{aligned}$$

Учтем, что $\langle J(u), v \rangle \leq \langle J(u), u \rangle = \|u\|^2$ для всех u, v (см. предложение 2.2.2 в [1]), и подставим $u = y_{\varepsilon n} - y_n, v = -y_n$:

$$\frac{1}{\varepsilon} \|y_{\varepsilon n} - y_n\|_{X_t}^2 + \frac{1}{2} \|y_{\varepsilon n}(t)\|_H^2 + \gamma[y_{\varepsilon n}]_{X_t}^{p_1} + \alpha \leq \frac{1}{\varepsilon} \|y_{\varepsilon n} - y_n\|_{X_t}^2 + \langle g, y_{\varepsilon n} \rangle_{X_t}.$$

⁶Подобная оценка использовалась в замечании 4.2.3 [7] при изучении разрешимости параболических уравнений.

Сократим первые слагаемые и используем неравенства Коши и Юнга, а также оценку (10):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|y_{\varepsilon n}(t)\|_H^2 + \gamma [y_{\varepsilon n}]_{X_t}^{p_1} + \alpha &\leq \frac{1}{\beta} \|g\|_{X_t^*} ([y_{\varepsilon n}]_{X_t} + \lambda_0 \|y_{\varepsilon n}\|_{L_{p_0}(0,t;H)}) \\ &\leq \frac{\gamma}{2} [y_{\varepsilon n}]_{X_t}^{p_1} + \frac{1}{q_1 \beta q_1} \left(\frac{2}{p_1 \gamma} \right)^{q_1/p_1} \|g\|_{X_t^*}^{q_1} + \frac{\lambda_0}{2\beta} (\|g\|_{X_t^*}^2 + \|y_{\varepsilon n}\|_{L_{p_0}(0,t;H)}^2). \end{aligned}$$

Тогда

$$\|y_{\varepsilon n}(t)\|_H^2 + \gamma [y_{\varepsilon n}]_{X_t}^{p_1} \leq 2C_2(1 + \|y_{\varepsilon n}\|_{L_{p_0}(0,t;H)}^2),$$

где $C_2 = \max\{q_1^{-1}\beta^{-q_1}(p_1\gamma/2)^{-q_1/p_1}\|g\|_{X_t^*}^{q_1} - \alpha + \lambda_0(2\beta)^{-1}\|g\|_{X_t^*}^2; \lambda_0(2\beta)^{-1}\}$. Отбросив второе слагаемое в левой части, применим лемму Гронуолла: $\|y_{\varepsilon n}(t)\|_H^{p_0} \leq 2C_2 e^{2C_2 t}$. Следовательно, $\|y_{\varepsilon n}(t)\|_H$, $[y_{\varepsilon n}]_{X_t}$ и $\|y_{\varepsilon n}\|_{X_t}$ ограничены в совокупности для любого $t \in (0, T]$.

Таким образом, решения (14) $\{y_{\varepsilon n}\}$ ограничены в X и в топологии, индуцированной $\|\cdot\|'_W$ (непрерывная относительно X). Из ограниченного множества $\{y_{\varepsilon n}\}$ выделим два подмножества $\{y_{\varepsilon n}\} = \{y_{\varepsilon m}\} \cup \{y_{\varepsilon k}\}$ такие, что $\|y_{\varepsilon m} - y_m\|_X \geq \text{const} > 0$ и $\|y_{\varepsilon k} - y_k\|_X \rightarrow 0$. Тогда в оценке (15) $\|y_{\varepsilon m} - y_m\|_X^{-1} C(R; \|y_{\varepsilon m} - y_m\|'_W) \leq C_3$ в силу ограниченности сомножителей, а для второй подпоследовательности $\|y_{\varepsilon k} - y_k\|_X^{-1} \times C(R; \|y_{\varepsilon k} - y_k\|'_W) \rightarrow 0$ согласно свойствам функции C . В силу (15) получаем не зависящую от ε и n оценку $\varepsilon^{-1} \|y_{\varepsilon n} - y_n\|_X \leq C_4 < \infty$. То есть,

$$\|y_{\varepsilon n} - y_n\|_X \leq \varepsilon C_4 (\|f\|_{X^*}; \|g\|_{X^*}) \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (16)$$

Оператор A квазиограничен (лемма 3). Кроме того,

$$\langle A(y_{\varepsilon n}), y_{\varepsilon n} \rangle \leq \langle f_{\varepsilon n}, y_{\varepsilon n} \rangle - \frac{1}{2} \|y_{\varepsilon n}(T)\|_H^2 \leq \|f\|_{X^*} \|y_{\varepsilon n}\|_X.$$

Значит, множество $\{A(y_{\varepsilon n})\}$ ограничено: $\|A(y_{\varepsilon n})\|_{X^*} \leq C_5 < \infty$. Выделим из множества $\{A(y_{\varepsilon n})\}$ слабо сходящуюся в X^* подпоследовательность. Одновременно из уравнения (14) следует, что существует не зависящая от n и ε константа $C_6 < \infty$ такая, что

$$\|\partial_t y_{\varepsilon n}\|_{X^*} \leq \|g_n - A(y_{\varepsilon n})\|_{X^*} + \varepsilon^{-1} \|y_{\varepsilon n} - y_n\|_X \leq C_6 (\|f\|_{X^*}; \|g\|_{X^*}). \quad (17)$$

То есть множество производных $\{\partial_t y_{\varepsilon n}\}$ также ограничено. Следовательно, можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность; без ограничения общности $y_{\varepsilon n} \rightarrow \zeta$ слабо в W . Вследствие слабой сходимости $y_n \rightarrow y$ в X и сходимости по норме (16) имеем, что $y_{\varepsilon n} \rightarrow y$ слабо в X . В силу единственности слабого предела $\zeta \equiv y$. Таким образом, $y_{\varepsilon n} \rightarrow y$ слабо в W .

Перенумеруем полученную последовательность как $\{y_m\}$. Не нарушая общности можно считать, что $\partial_t y_m \rightarrow \partial_t y$ и $A(y_m) \rightarrow w$ слабо в X^* (в противном случае можно перейти к подпоследовательностям). Докажем, что $\lim_{m \rightarrow \infty} \langle A(y_m), y_m - y \rangle \leq 0$.

Рассмотрим $\xi \in X_m \cap K$ такой, что $\|\xi - y\|_X < \delta$. Поскольку $W \subset X$ плотно и справедливо условие согласования (6), такой элемент существует для произвольного $\delta > 0$ при достаточно большом m . Тогда в силу оценок (13), (17)

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \langle A(y_m), y_m - y \rangle &\leq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \langle \partial_t y_m + A(y_m), \xi - y \rangle \\ &\quad + \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \langle \partial_t y_m + A(y_m), y_m - \xi \rangle - \varliminf_{m \rightarrow \infty} \langle \partial_t y_m - \partial_t y, y_m - y \rangle \\ &\leq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \|\partial_t y_m + A(y_m)\|_{X^*} \|\xi - y\|_X + \langle f, y - \xi \rangle \\ &\leq \delta(\|f\|_{X^*} + C_6). \end{aligned}$$

В силу произвольности $\delta > 0$ получаем, что $\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \langle A(y_m), y_m - y \rangle \leq 0$. Для обобщенно псевдомонотонного на W оператора A из этой оценки следует, что $\langle A(y_m), y_m \rangle \rightarrow \langle w, y \rangle$, $w = A(y)$ и y удовлетворяет неравенству (8):

$$\begin{aligned} \langle \partial_t y + A(y), \xi - y \rangle &= \lim_{m \rightarrow \infty} \langle \partial_t y_m + A(y_m), \xi_m - y_m \rangle \\ &\geq \lim_{m \rightarrow \infty} \langle f_m, \xi_m - y_m \rangle = \langle f, \xi - y \rangle, \end{aligned}$$

где $\xi_m = \sum_{1 \leq k \leq m} \langle \xi, h_k \rangle h_k$. Одновременно из оценки (17) получили, что для решения неравенства справедлива оценка

$$\|\partial_t y\|_{X^*} \leq C_6(\|f\|_{X^*}; \|g\|_{X^*}). \quad (18)$$

Докажем слабую компактность множества решений на W . Пусть $y_n \in K$ – решение (8), $y_n \rightarrow y$ слабо в W . В силу замкнутости множества K $y \in K$, а вследствие квазиограниченности оператора A и оценки

$$\langle A(y_n), y_n \rangle \leq \langle f, y_n \rangle - \|\partial_t y_n\|_{X^*} \|y_n - y\|_X \leq \|f\|_{X^*} \|y_n\|_X$$

множество $\{A(y_n)\}$ ограничено, т.е. можно выбрать подпоследовательность $A(y_n) \rightarrow \chi$ слабо в X^* . Тогда

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle A(y_n), y_n - y \rangle \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle f - \partial_t y_n, y_n - y \rangle \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \langle -\partial_t y, y_n - y \rangle = 0.$$

Для обобщенно псевдомонотонного на W оператора A отсюда следует, что $\langle A(y_n), y_n \rangle \rightarrow \langle \chi, y \rangle$, $\chi = A(y)$ и предел y является решением (8).

Теперь докажем слабую компактность решений в X . Пусть $y_n \in K$ – решение (8), $y_n \rightarrow y$ слабо в X ; y_n также удовлетворяют неравенству

$$\langle \partial_t \xi + A(y_n), y_n - \xi \rangle \leq \langle f, y_n - \xi \rangle \quad \forall \xi \in K \cap W.$$

Снова рассмотрим $\xi = y_0 = 0$. Тогда $\langle A(y_n), y_n \rangle \leq \|f\|_{X^*} \|y_n\|_X$. В силу квазиограниченности оператора A множество $\{A(y_n)\}$ ограничено. Согласно оценке (18) множество производных $\{\partial_t y_n\}$ также ограничено: $\|\partial_t y_n\|_{X^*} \leq C_6(\|f\|_{X^*}; \|g\|_{X^*})$. То есть можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность: $y_m \rightarrow y$ слабо в W . Аналогично предыдущему абзацу y – решение неравенства (8).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теоремы 2 и 3 останутся справедливыми, если существует $\hat{\lambda}_0 > 0$ такое, что вместо (11) справедливо условие

$$\langle A(y), y \rangle + \hat{\lambda}_0 \|y\|_{L_{p_0}(0, T; H)}^2 \geq [y]_X^{p_1} + \alpha. \quad (19)$$

3. Применение к параболическим задачам с односторонними краевыми условиями. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса $C^{1,1}$, ν – внешняя нормаль к $\partial\Omega$, $Q = [0, T] \times \Omega$, $\Gamma_T = (0, T) \times \partial\Omega$. Для простоты рассмотрим $p = p_1 = p_0 \in [2, +\infty)$, $1/q + 1/p = 1$, $X = L_p(0, T; W_p^1(\Omega))$, $L_p(Q) \equiv L_p(0, T; L_p(\Omega))$ и $W = \{y \in L_p(0, T; W_p^1(\Omega)) : \partial_t y \in L_q(0, T; (W_p^1(\Omega))^*)\}$. Как известно [11], $W \subset C(0, T; L_{\tilde{p}}(\Omega))$ непрерывно при $\tilde{p} \in [2, p]$. Обозначим также

$$\|\nabla y(t)\|_{L_p(\Omega)}^p \equiv \sum_{1 \leq i \leq n} \|\partial_i y(t)\|_{L_p(\Omega)}^p, \quad \|\nabla y\|_{L_p(Q)}^p \equiv \sum_{1 \leq i \leq n} \|\partial_i y\|_{L_p(Q)}^p.$$

Рассматривается параболическое уравнение (1) с нулевыми начальными условиями (2) и односторонними краевыми условиями (3), где функции a_i удовлетворяют следующим условиям:

A1. УСЛОВИЕ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ⁷. Функции $a_i(t, x, y, \xi)$, $i = 0, \dots, n$, измеримы по $(t, x) \in Q$ и непрерывны по y, ξ для почти всех $(t, x) \in Q$ (условия Каратеодори). Кроме того, существуют $c > 0$, $h \in L_q(Q)$ такие, что

$$|a_i(t, x, \xi_0, \xi)| \leq c \sum_{0 \leq j \leq n} |\xi_j|^{p-1} + h(t, x), \quad i = 0, \dots, n. \quad (20)$$

A2. УСЛОВИЕ СИЛЬНОЙ ЭЛЛИПТИЧНОСТИ⁸. Для $(t, x) \in Q$, $y \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ существует функция $\Upsilon: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}_+^1$ ($\Upsilon(y) > 0$ при $y \neq 0$) такая, что

$$\sum_{1 \leq i \leq n} (a_i(t, x, y, \xi) - a_i(t, x, y, \eta))(\xi_i - \eta_i) \geq \Upsilon(y) \sum_{1 \leq i \leq n} |\xi_i - \eta_i|^p.$$

A3. Функции $a_i(t, x, y, \xi)$, $i = 1, \dots, n$, локально липшицевы по y , а $a_0(t, x, \xi_0, \xi)$ локально липшицевы по ξ_j , $j = 0, \dots, n$, с константами Липшица Ψ_i и Ψ_j^0 :⁹

$$|a_i(t, x, y + y_\delta, \xi) - a_i(t, x, y, \xi)| \leq \Psi_i(t, x, y, \xi) |\delta y| \quad \text{для всех } |\delta y| \leq \varepsilon(y),$$

$$|\Psi_i(t, x, \xi_0, \xi)| \leq \hat{\Psi} \sum_{0 \leq l \leq n} |\xi_l|^{p-2} + h_\Psi(t, x), \quad (21)$$

$$|a_0(t, x, \xi + \delta \xi_j) - a_0(t, x, \xi)| \leq \Psi_j^0(t, x, \xi) |\delta \xi_j| \quad \text{для всех } |\delta \xi_j| \leq \varepsilon(\xi_j),$$

$$|\Psi_j^0(t, x, \xi_0, \xi)| \leq \hat{\Psi} \sum_{0 \leq l \leq n} |\xi_l|^{p-2} + h_\Psi(t, x), \quad (22)$$

где $\hat{\Psi} > 0$, $h_\Psi \in L_{q'}(Q)$, $q' = p/(p-2)$ при $p > 2$, и $q' = \infty$ при $p = 2$; $\delta \xi_i \in \mathbb{R}^{n+1}$ – вектор с ненулевой координатой только в позиции $i \in 0, \dots, n$.

⁷Условие A1 может быть уточнено в зависимости от отношения между степенью суммируемости p и размерностью n области Ω (для эллиптических задач данное исследование приведено, например, в [12]).

⁸Условие может нарушаться в конечном числе точек $y \in \mathbb{R}$.

⁹При необходимости можно подобрать более точные константы и функции, оценивающие a_i , Ψ_i и Ψ_i^0 в формулах (20)–(22).

А4. УСЛОВИЕ КОЭРЦИТИВНОСТИ. Существуют $c_0 > 0$ и $g_1 \in L_1(\Omega)$ такие, что

$$\sum_{0 \leq i \leq n} a_i(t, x, \xi_0, \xi) \xi_i \geq c_0 \sum_{0 \leq i \leq n} |\xi_i|^p - g_1(t, x).$$

А4'. УСЛОВИЕ НЕПОЛНОЙ КОЭРЦИТИВНОСТИ. Существуют $c_0 > 0$ и $g_1 \in L_1(\Omega)$ такие, что

$$\sum_{0 \leq i \leq n} a_i(x, \xi_0, \xi) \xi_i \geq c_0 \sum_{1 \leq i \leq n} |\xi_i|^p - g_1(t, x).$$

В силу условия А1 задаче (1)–(3) можно поставить в соответствие вариационное неравенство (4) (подробно переход показан в [1, § 2.9]). Покажем, что при данных условиях “сильное” обобщенное решение задачи (1)–(3) существует¹⁰.

Введем оператор $A: L_p(0, T; W_p^1(\Omega)) \rightarrow (L_p(0, T; W_p^1(\Omega)))^*$ по формуле

$$\langle A(y), z \rangle = \sum_{1 \leq i \leq n} \int_Q a_i(x, y, \nabla y) \partial_i z \, dx \, dt + \int_Q a_0(x, y, \nabla y) z \, dx \, dt. \quad (23)$$

Данный оператор деминепрерывен и ограничен как оператор Немыцкого.

ЛЕММА 4. Пусть справедливы условия А1, А4. Тогда оператор A , заданный формулой (23), коэрцитивен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $y_0 = 0$. Из условия А4 получим, что

$$\langle A(y), y \rangle \geq c_0 \|y\|_{L_p(0, T; W_p^1(\Omega))}^p - \|g_1\|_{L_1(Q)}.$$

ЛЕММА 5. Пусть справедливы условия А1, А4'. Тогда оператор A , заданный формулой (23), удовлетворяет условиям (10), (11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем в качестве $[y]_X^p = \int_0^T \|\nabla y(\tau)\|_{L_p(\Omega)}^p \, d\tau$. Как известно, это выражение задает полунорму, причем в силу регулярности границы

$$\int_{\Omega} |y|^p \, dx \leq C(n, p, \Omega) \left(\sum_{1 \leq i \leq n} \int_{\Omega} |\partial_i y|^p \, dx + \left| \int_{\Omega} |y|^2 \, dx \right|^{p/2} \right)$$

(следствие неравенства Фридрихса, см. [13, лемма 2.1.36]). Следовательно, существуют $\lambda_0 = \lambda_0(n, p, \Omega) > 0$ и $\beta = \beta(n, p, \Omega) > 0$ такие, что справедлива оценка (10) для произвольного $y \in L_p(0, T; W_p^1(\Omega))$. А в силу условия А4'

$$\langle A(y), y \rangle \geq c_0 [y]_X^p - \|g_1\|_{L_1(Q)}.$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть справедливы условия А1–А3. Тогда A , заданный формулой (23), – оператор $c(X, W)$ -полуограниченной вариацией.

¹⁰В доказательствах используются методы, разработанные для задач эллиптического типа (см. [6], [12], [9]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем вспомогательные функции:

$$\begin{aligned} H_1(t, x, y, \nabla y, \nabla \xi) &= \sum_{1 \leq i \leq n} (a_i(t, x, y, \nabla y) - a_i(t, x, y, \nabla \xi)) \partial_i(y - \xi), \\ H_2(t, x, y, \xi, \nabla \xi) &= \sum_{1 \leq i \leq n} (a_i(t, x, y, \nabla \xi) - a_i(t, x, \xi, \nabla \xi)) \partial_i(y - \xi), \\ H_3(t, x, y, \xi) &= (a_0(t, x, y, \nabla y) - a_0(t, x, \xi, \nabla \xi))(y - \xi), \\ H(t, x, y, \xi, \nabla y, \nabla \xi) &= H_1(t, x, y, \nabla y, \nabla \xi) + H_2(t, x, y, \xi, \nabla \xi) + H_3(t, x, y, \xi). \end{aligned}$$

По построению

$$\begin{aligned} \langle A(y) - A(\xi), y - \xi \rangle &= \int_Q H(t, x, y, \xi, \nabla y, \nabla \xi) dx dt \\ &= \int_Q (H_1(t, x, y, \nabla y, \nabla \xi) + H_2(t, x, y, \xi, \nabla \xi) + H_3(t, x, y, \xi)) dx dt \\ &= \int_Q (H_1(t, x, \xi, \nabla y, \nabla \xi) + H_2(t, x, \xi, y, \nabla y) + H_3(t, x, y, \xi)) dx dt. \end{aligned}$$

Разобьем Q на непересекающиеся подмножества следующим образом: $\xi(t, x) = y(t, x)$, если $(t, x) \in Q_1$; $\xi(t, x) \neq y(t, x)$ и $|y(t, x)| > 0$, если $(t, x) \in Q_2$; а также $y(t, x) = 0$ и $|\xi(t, x)| > 0$, если $(t, x) \in Q_3$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle A(y) - A(\xi), y - \xi \rangle &= \int_{Q_1} H(t, x, y, \xi, \nabla y, \nabla \xi) dx dt \\ &+ \int_{Q_2} (H_1(t, x, y, \nabla y, \nabla \xi) + H_2(t, x, y, \xi, \nabla \xi) + H_3(t, x, y, \xi)) dx dt \\ &+ \int_{Q_3} (H_1(t, x, \xi, \nabla y, \nabla \xi) + H_2(t, x, \xi, y, \nabla y) + H_3(t, x, y, \xi)) dx dt. \end{aligned}$$

Вследствие условия A2 функция H_1 неотрицательна. Если $y = \xi$ почти всюду, то $H_2(t, x, y, \xi, \nabla \xi) = 0$ почти всюду из-за нуля в первом подынтегральном множителе (именно, $a_i(t, x, y, \nabla \xi) - a_i(t, x, \xi, \nabla \xi) = 0$), и $H_3(t, x, y, \xi) = 0$ почти всюду из-за нуля во втором подынтегральном множителе. Таким образом, интеграл на Q_1 неотрицателен.

Проверим интеграл на Q_2 . Первое слагаемое вследствие сильной эллиптичности A2 может быть оценено:

$$\begin{aligned} \int_{Q_2} H_1(t, x, y, \nabla y, \nabla \xi) dx dt &= \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{Q_2} (a_i(t, x, y, \nabla y) - a_i(t, x, y, \nabla \xi)) \partial_i(y - \xi) dx dt \\ &\geq \hat{\Upsilon}(y|_{Q_2}) \|\nabla(y - \xi)\|_{L_p(Q_2)}^p, \end{aligned} \quad (24)$$

где $\hat{\Upsilon}(y)$ — функционал, для которого $\hat{\Upsilon}(y|_{Q_2}) > 0$ при $|y| > 0$ на Q_2 . Для второго слагаемого используем локальную липшецевость коэффициентов:

$$\begin{aligned} &\left| \int_{Q_2} H_2(t, x, y, \xi, \nabla \xi) dx dt \right| \\ &= \left| \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{Q_2} (a_i(t, x, y, \nabla \xi) - a_i(t, x, \xi, \nabla \xi)) \partial_i(y - \xi) dx dt \right| \\ &\leq \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{Q_2} \left| \int_0^1 \Psi_i(t, x, y + \tau(\xi - y), \nabla \xi) d\tau(\xi - y) \partial_i(y - \xi) \right| dx dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{Q_2} \left(\widehat{\Psi} \left(\int_0^1 |y + \tau(\xi - y)|^{p-2} d\tau + \sum_{1 \leq i \leq n} |\partial_i \xi|^{p-2} \right) + h_{\Psi}(t, x) \right) \\
&\quad \times |\xi - y| \sum_{1 \leq i \leq n} |\partial_i(\xi - y)| dx dt \\
&\leq (\widehat{\Psi}(\|y\|_{L_p(Q_2)}^{p-2} + \|\xi\|_{L_p(Q_2)}^{p-2} + \|\nabla \xi\|_{L_p(Q_2)}^{p-2}) + \|h_{\Psi}\|_{L_{q'}(Q_2)}) \\
&\quad \times \|y - \xi\|_{L_p(Q_2)} \|\nabla(y - \xi)\|_{L_p(Q_2)} \\
&\leq \frac{1}{p} \widehat{\Upsilon}(y|_{Q_2}) \|\nabla(y - \xi)\|_{L_p(Q_2)}^p \\
&\quad + \frac{1}{q} \widehat{\Upsilon}^{-q/p}(y|_{Q_2}) (2\widehat{\Psi}^q R_2^p + \|h_{\Psi}\|_{L_{q'}(Q_2)}^q) \|\xi - y\|_{L_p(Q_2)}^q, \tag{25}
\end{aligned}$$

где $\|y\|_{L_p(Q_2)} \leq R_2$, $\|\xi\|_{L_p(Q_2)} \leq R_2$.

Третье слагаемое оценивается аналогично:

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{Q_2} (a_0(t, x, y, \nabla y) - a_0(t, x, \xi, \nabla \xi))(y - \xi) dx dt \right| \\
&\leq \left| \int_{Q_2} (a_0(t, x, y, \nabla y) - a_0(t, x, \xi, \nabla y))(y - \xi) dx dt \right| \\
&\quad + \left| \int_{Q_2} (a_0(t, x, \xi, \nabla y) - a_0(t, x, \xi, \partial_1 \xi, \partial_2 y, \dots, \partial_n y))(y - \xi) dx dt \right| + \dots \\
&\quad + \left| \int_{Q_2} (a_0(t, x, \xi, \partial_1 \xi, \dots, \partial_{n-1} \xi, \partial_n y) - a_0(t, x, \xi, \nabla \xi))(y - \xi) dx dt \right| \\
&\leq \left| \int_{Q_2} \int_0^1 \Psi_0^0(t, x, y + \tau(\xi - y), \nabla y) d\tau (\xi - y)^2 dx dt \right| \\
&\quad + \sum_{1 \leq i \leq n} \left| \int_{Q_2} \int_0^1 \Psi_i^0(t, x, \xi, \nabla y(\xi, \tau_i) + \tau_i \partial_i(\xi - y)) d\tau_i \partial_i(y - \xi)(\xi - y) dx dt \right| \\
&\leq (2\widehat{\Psi} R_2^{p-2} + \|h_{\Psi}\|_{L_{q'}(Q_2)}) \|y - \xi\|_{L_p(Q_2)}^2 \\
&\quad + (\widehat{\Psi} R_2^{p-2} + \|h_{\Psi}\|_{L_{q'}(Q_2)}) \|\nabla(y - \xi)\|_{L_p(Q_2)} \|y - \xi\|_{L_p(Q_2)} \\
&\leq \frac{1}{p} \widehat{\Upsilon}(y|_{Q_2}) \|\nabla(y - \xi)\|_{L_p(Q_2)}^p + (\widehat{\Psi} R_2^{p-2} + \|h_{\Psi}\|_{L_{q'}(Q_2)}) \|y - \xi\|_{L_p(Q_2)}^2 \\
&\quad + \frac{1}{q} \widehat{\Upsilon}^{-q/p}(y|_{Q_2}) (2\widehat{\Psi} R_2^p + \|h_{\Psi}\|_{L_{q'}(Q_2)}^q) \|\xi - y\|_{L_p(Q_2)}^q, \tag{26}
\end{aligned}$$

где $\nabla y(\xi, \tau_i) = (\partial_1 y, \dots, \partial_i y, \partial_{i+1} \xi, \dots, \partial_n \xi)$.

Учитывая, что $(p-2)\widehat{\Upsilon}(y|_{Q_2}) \geq 0$, из оценок (24)–(26) вытекает, что

$$\int_{Q_2} H(t, x, y, \xi, \nabla y, \nabla \xi) dx dt \geq -C(R_2; \|\xi - y\|_{L_p(Q_2)}),$$

где $C(R; r) = (2\widehat{\Psi} R^{p-2} + \|h_{\Psi}\|_{L_{q'}(Q)}) r^2 + (2\widehat{\Psi} R^p + \|h_{\Psi}\|_{L_{q'}(Q)}^q) r^q$.

Таким же образом можно показать, что

$$\int_{Q_3} H(t, x, y, \xi, \nabla y, \nabla \xi) dx dt \geq -C(R_3; \|\xi - y\|_{L_p(Q_3)}),$$

где $\|y\|_{L_p(Q_3)} \leq R_3$, $\|\xi\|_{L_p(Q_3)} \leq R_3$, $R_2 + R_3 \leq R$. Следовательно, оператор A удовлетворяет неравенству (9) с функцией C . Поскольку $q > 1$ и $W \subset L_p(Q)$ компактно, то A – оператор с $(X; W)$ -полуограниченной вариацией.

ТЕОРЕМА 5. Пусть справедливы условия A1–A4 (либо A1–A3, A4'). Тогда задача (1)–(3) имеет “сильное” обобщенное решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно леммам 4, 5 и теореме 4 условия теоремы 1 (теоремы 2) выполнены. Рассмотрим оператор двойственности $J(0) = 0$ и

$$J(y) = \|y\|_{L_p(0,T;W_p^1(\Omega))}^{2-p} \left(\sum_{1 \leq i \leq n} \partial_i(|\partial_i y|^{p-2} \partial_i y) + |y|^{p-2} y \right) \quad \text{для } y \neq 0,$$

см. [4, гл. 1]. Поскольку для любых $\varepsilon > 0$ и $y \in L_p(0, T; W_p^1(\Omega))$ оператор $A + \varepsilon^{-1} J(\cdot - y)$ является ограниченным, деминепрерывным и коэрцитивным оператором с $(X; W)$ -полуограниченной вариацией, для всех $\varepsilon > 0$ и $y \in L_p(0, T; W_p^1(\Omega))$ существует $y_\varepsilon \in K$ такой, что $y_\varepsilon|_{t=0} = 0$ и

$$\begin{aligned} & \int_Q \partial_t y_\varepsilon \xi dx dt + \sum_{1 \leq i \leq n} \int_Q a_i(t, x, y_\varepsilon, \nabla y_\varepsilon) \partial_i \xi dx dt + \int_Q a_0(t, x, y_\varepsilon, \nabla y_\varepsilon) \xi dx dt \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \|y_\varepsilon - y\|_{L_p(0,T;W_p^1(\Omega))}^{2-p} \left(\sum_{1 \leq i \leq n} \int_Q |\partial_i(y_\varepsilon - y)|^{p-2} \partial_i(y_\varepsilon - y) \partial_i \xi dx dt \right. \\ & \left. + \int_Q |y_\varepsilon - y|^{p-2} (y_\varepsilon - y) \xi dx dt \right) = 0 \quad \forall \xi \in L_p(0, T; W_p^1(\Omega)), \end{aligned}$$

т.е. в уравнение (12) подставляем $g = 0$ (здесь рассматривается уравнение с нулевой правой частью и нулевыми краевыми условиями типа Неймана). Следовательно, условия теоремы 3 также удовлетворены.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Аналогичное исследование можно провести для операторов порядка $2m$ (обозрение эллиптического случая приведено в [9]).

ПРИМЕР 1. Рассмотрим задачу

$$\partial_t y - \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} + c_1 \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial y}{\partial x_i} = f \quad \text{п.в. на } Q, \quad (27)$$

$$y(0, x) = 0 \quad \text{п.в. на } \Omega, \quad (28)$$

$$y \geq 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \nu_A} = \sum_{1 \leq i \leq n} \partial_i y \cos(x_i, \nu) \geq 0, \quad y \frac{\partial y}{\partial \nu_A} = 0 \quad \text{п.в. на } \Gamma_T, \quad (29)$$

где $f \in L_2(Q)$. Соответствующее вариационное неравенство имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \partial_t y + A(y), \xi - y \rangle &= \int_Q \partial_t y (y - \xi) dx dt + c_1 \sum_{1 \leq i \leq n} \int_Q \partial_i y (\xi - y) dx dt \\ &+ \sum_{1 \leq i \leq n} \int_Q \partial_i y \partial_i (\xi - y) dx dt \geq \int_Q f (\xi - y) dx dt \quad \forall \xi \in K. \end{aligned}$$

Легко проверить, что предложенный оператор A не является псевдомонотонным. В качестве контрпримера может служить последовательность $y_n(t, x) = \cos(n\pi(t-1)) \times e^{-x/2}$ в пространстве $X = L_2(0, 2; W_2^1(-1, 1))$: $y_n \rightarrow 0$ слабо, $A(y_n) \rightarrow 0$ слабо, а $\langle A(y_n), y_n \rangle = (1/4 - c_1/2)(e - 1/e) < 0$ при $c_1 > 1/2$.

Однако линейный оператор A удовлетворяет оценкам

$$\begin{aligned} \langle A(y), y \rangle &\geq \|\nabla y\|_{L_2(Q)}^2 - |c_1| \|y\|_{L_2(Q)} \|\nabla y\|_{L_2(Q)} \geq -\frac{|c_1|^2}{4} \|y\|_{L_2(Q)}^2, \\ \frac{|c_1|^2}{2} \|y\|_{L_2(Q)}^2 + \langle A(y), y \rangle &\geq \frac{1}{2} \|\nabla y\|_{L_2(Q)}^2 = \frac{1}{2} [y]_X^2. \end{aligned}$$

A – радиально непрерывный оператор с $(X; W)$ -полуограниченной вариацией, удовлетворяющий условию (10), (19). Уравнение

$$\begin{aligned} \int_Q \partial_t y_\varepsilon \xi dx dt + \sum_{1 \leq i \leq n} \int_Q \partial_i y \partial_i \xi dx dt + c_1 \sum_{1 \leq i \leq n} \int_Q \partial_i y \xi dx dt \\ + \frac{1}{\varepsilon} \left(\sum_{1 \leq i \leq n} \int_Q \partial_i (y_\varepsilon - y) \partial_i \xi dx dt + \int_Q (y_\varepsilon - y) \xi dx dt \right) = 0, \end{aligned}$$

где $\xi \in L_p(0, T; W_p^1(\Omega))$ имеет решение (по теореме 2 с учетом замечания 2). Таким образом, “сильное” обобщенное решение краевой задачи (27)–(29) существует, см. теорему 5.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим уравнение из § 2.9 [1]

$$\partial_t y - \sum_{1 \leq i \leq n} \partial_i (|\partial_i y|^{p-2} \partial_i y) + c|y|^{p-2} y = f \quad \text{п.в. на } Q,$$

где $\partial y / \partial \nu_A = \sum_{1 \leq i \leq n} |\partial_i y|^{p-2} \partial_i y \cos(x_i, \nu)$, $c \geq 0$, $f \in L_q(Q)$; начально-краевые условия по-прежнему (2), (3). Как показано в [1, § 2.9], данной задаче соответствует вариационное неравенство

$$\langle \partial_t y + \Delta_p(y), \xi - y \rangle \geq \int_Q f (\xi - y) dx dt \quad \forall \xi \in K,$$

где p -лапласиан Δ_p определен формулой

$$\langle \Delta_p(y), \xi \rangle = \sum_{1 \leq i \leq n} \int_Q |\partial_i y|^{p-2} \partial_i y \partial_i \xi dx dt + c \int_Q |y|^{p-2} y \xi dx dt;$$

$\Delta_p: L_p(0, T; W_p^1(\Omega)) \rightarrow (L_p(0, T; W_p^1(\Omega)))^*$ является ограниченным, деминепрерывным и максимально монотонным оператором. Кроме того,

$$\langle \Delta_p(y), y \rangle = \sum_{1 \leq i \leq n} \int_Q |\partial_i y|^p dx dt = \|\nabla y\|_{L_p(Q)}^p + c \|y\|_{L_p(Q)}^p = [y]_X^p + c \|y\|_{L_p(Q)}^p.$$

При $c > 0$ оператор коэрцитивен, а при $c = 0$ выполняется оценка (10), (11). Также отметим, что обобщенное решение имеет следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & \partial_t y_\varepsilon - \sum_{1 \leq i \leq n} \partial_i (|\partial_i y_\varepsilon|^{p-2} \partial_i y_\varepsilon) + c |y_\varepsilon|^{p-2} y_\varepsilon \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \|y_\varepsilon - y\|_{L_p(0, T; W_p^1(\Omega))}^{2-p} \sum_{0 \leq i \leq n} \partial_i (|\partial_i (y_\varepsilon - y)|^{p-2} \partial_i (y_\varepsilon - y)) = 0 \quad \text{п.в. на } Q, \\ & y_\varepsilon(0, x) = 0 \quad \text{п.в. на } \Omega, \\ & \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu_{A_\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon} \|y_\varepsilon - y\|_{L_p(0, T; W_p^1(\Omega))}^{2-p} \sum_{1 \leq i \leq n} |\partial_i (y_\varepsilon - y)|^{p-2} \partial_i (y_\varepsilon - y) \cos(x_i, \nu) \\ & + \sum_{1 \leq i \leq n} |\partial_i y_\varepsilon|^{p-2} \partial_i y_\varepsilon \cos(x, \nu) = 0 \quad \text{п.в. на } \Gamma_T, \end{aligned}$$

$\partial_0 y \equiv y$. По теореме 5 задача имеет “сильное” обобщенное решение.

Заметим, что в [1], [3] существование “сильного” обобщенного решения доказано только для $p = 2, c > 0$.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим уравнение

$$\partial_t y - \sum_{1 \leq i \leq n} \partial_i (|\partial_i y|^{p-2} \partial_i y) + c_1 \sum_{1 \leq i \leq n} |y|^{p-2} \partial_i y + c |y|^{p-2} y = f,$$

заданное почти всюду на Q , с начально-краевыми условиями (2), (3), где $c > 0, c \geq q^{-1}|c_1|^q, f \in L_q(Q)$. Связанная с оператором A производная $\partial y / \partial \nu_A$ и оператор J те же, что и в примере 2. Соответствующее вариационное неравенство имеет вид

$$\langle \partial_t y + A(y), \xi - y \rangle \geq \int_Q f(\xi - y) dx dt \quad \forall \xi \in K,$$

где

$$\langle A(y), \xi \rangle = \langle \Delta_p(y), \xi \rangle + c_1 \sum_{1 \leq i \leq n} \int_Q |y|^{p-2} \partial_i y \xi dx dt,$$

p -лапласиан Δ_p определен в примере 2.

Деминепрерывность оператора A очевидна. Проверим $(X; W)$ -полуограниченность вариации. Достаточно рассмотреть второе слагаемое оператора:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{1 \leq i \leq n} \int_Q (|y|^{p-2} \partial_i y - |\xi|^{p-2} \partial_i \xi)(y - \xi) dx dt \right| \\ & \leq \sum_{1 \leq i \leq n} \int_Q \max(\partial_i y, \partial_i \xi) |y - \xi|^{p-1} dx dt \leq R \|y - \xi\|_{L_p(Q)}^{p-1}, \end{aligned}$$

где $\|y\|_{L_p(0,T;W_p^1(\Omega))} \leq R$, $\|\xi\|_{L_p(0,T;W_p^1(\Omega))} \leq R$. Необходимая оценка получена. A – оператор с $(X; W)$ -полуограниченной вариацией.

Осталось проверить коэрцитивность. Пусть $y_0 = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle A(y), y \rangle &= \|\nabla y\|_{L_p(Q)}^p + c\|y\|_{L_p(Q)}^p + c_1 \sum_{1 \leq i \leq n} \int_Q |y|^{p-2} \partial_i y \xi \, dx \, dt \\ &\geq \frac{1}{q} \|\nabla y\|_{L_p(Q)}^p + \left(c - \frac{|c_1|^q}{q} \right) \|y\|_{L_p(Q)}^p. \end{aligned}$$

При $c > |c_1|^q/q$ оператор A коэрцитивен, при $c = |c_1|^q/q$ – частично коэрцитивен (удовлетворяет условию (10), (11)). Таким образом, согласно теореме 5 задача имеет “сильное” обобщенное решение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
- [2] Lions J. L., Stampacchia G. Variational Inequalities // Comm. Pure Appl. Math. 1967. V. 20. P. 493–519.
- [3] Brésis H. Équations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1968. V. 18. P. 115–175.
- [4] Barbu V. Analysis and Control of Non-Linear Infinite Dimensional Systems. Boston: Acad. Press, 1993.
- [5] Babický V. Destabilization for quazivariational inequalities of reaction–diffusion type // Appl. Math. 2000. V. 45. № 3. P. 161–176.
- [6] Дубинский Ю. А. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Т. 9. М.: ВИНТИ, 1976. С. 5–130.
- [7] Мельник В. С., Згуровский М. З. Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами. Киев: Наукова думка, 1999.
- [8] Browder F. E., Hess P. Nonlinear mappings of monotone type in Banach spaces // J. Funct. Anal. 1972. V. 11. № 2. P. 251–294.
- [9] Скрышник И. В. Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. М.: Наука, 1990.
- [10] Solonoukha O. V. On the stationary variational inequalities with the generalized pseudomonotone operators // Methods Funct. Anal. Topology. 1997. V. 3. № 4. P. 81–95.
- [11] Solonukha O. V. On solvability of monotone type problems with non-coercive set-valued operators // Methods Funct. Anal. Topology. 2000. V. 6. № 1. P. 66–72.
- [12] Лаптев Г. И. Первая краевая задача для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка с двойным вырождением // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 6. С. 1057–1068.
- [13] Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторно-дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.

Национальный технический университет Украины
 “Киевский политехнический институт”, г. Киев
 E-mail: olesya@mses.ntu-kpi.kiev.ua

Поступило
 01.04.2002
 Исправленный вариант
 27.08.2003