Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Арутюнов, Накрывание нелинейных отображений на конусе в окрестности аномальной точки, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 4, 483–497

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2507>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 13:33:12

УДК 518.9

НАКРЫВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ НА КОНУСЕ В ОКРЕСТНОСТИ АНОРМАЛЬНОЙ ТОЧКИ

А. В. Арутюнов

Работа посвящена теоремам об обратной функции для гладких нелинейных отображений, заданных на выпуклом конусе банахова пространства в окрестности аномальной точки. Доказана соответствующая теорема о накрывании. Вывод этих теорем основан на полученной теореме Банаха об открытом отображении для выпуклого конуса банахова пространства. Получены достаточные условия касания к множеству нулей нелинейного отображения без априорных предположений нормальности.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. Пусть X и Y – банаховы пространства, $K \subseteq X$ – выпуклый замкнутый конус, $F: X \rightarrow Y$ – отображение, которое дважды непрерывно дифференцируемо по Фреше [1] в окрестности заданной точки $x_0 \in X$. Пусть $y_0 = F(x_0)$ и $\varphi: [0, 1] \rightarrow Y$ – непрерывная кривая в Y , начинающаяся в точке y_0 : $\varphi(0) = y_0$. Пусть также в Y задано семейство подмножеств $\Gamma(r)$, зависящее от скалярного параметра $r \geq 0$, причем это семейство возрастает по включению, т.е. $\Gamma(r_1) \subset \Gamma(r_2) \quad \forall r_1 < r_2$, и $\Gamma(0) = \{0\}$.

Обозначим через $B_r(x) = \{\xi \in X : \|\xi - x\| \leq r\}$ замкнутый шар в X радиуса r с центром в точке x . Аналогичный шар в Y также будем обозначать через $B_r(y)$. Положим $B_r = B_r(0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение F Γ -накрывает в точке x_0 по кривой φ относительно конуса K , если существует число $r_0 > 0$ такое, что для любого $r \in [0, r_0]$ выполняется

$$\varphi(r) + \Gamma(r) \subseteq F(B_r(x_0) \cap (x_0 + K)). \quad (1)$$

Если $\varphi(r) \equiv y_0$, то будем говорить, что F Γ -накрывает в точке x_0 относительно K (опуская словосочетание “по кривой φ ”). Мы изучим критерии линейно-квадратичных Γ -накрываний в точке, т.е. когда

$$\Gamma(r) = (B_{br} \cap \tilde{C}) + B_{br^2}, \quad (2)$$

где $\tilde{C}$ – заданный замкнутый выпуклый конус из Y и $b > 0$. Условия Γ -накрывания интересны не только сами по себе. Они имеют различные приложения (теория экстремальных задач, управляемость, устойчивость решений уравнений и их зависимость от начальных данных и т.д.).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-00193.

Наряду с Γ -накрыванием определим еще один вид накрывания, который назовем линейным. А именно, скажем, что отображение F *линейно накрывает* в окрестности V точки x_0 относительно конуса K с коэффициентом b , если

$$\exists r_0 > 0: F(x) + B_{br} \subseteq F(B_r(x) \cap (x_0 + K)) \quad \forall r \in [0, r_0], \quad \forall x \in V \cap (x_0 + K).$$

Принципиальное отличие линейного накрывания от Γ -накрывания заключается в том, что в (1) участвуют окрестности только одной точки x_0 , а в линейном накрывании – окрестности всех точек $x \in V \cap (x_0 + K)$.

Наиболее изучен случай линейного накрывания. Линейное накрывание в окрестности точки x_0 относительно конуса K гарантируется выполнением условия Робинсона $F'(x_0)(K) = Y$ (это обобщение условия Люстерника $F'(x_0)(X) = Y$ (см. [1]) на случай конусов). Действительно, из условия Робинсона вытекает (см. [2]) существование такого $a > 0$, что $\forall y \in Y \exists x \in K: F'(x_0)x = y, \|x\| \leq a\|y\|$. Для доказательства линейного накрывания исходного нелинейного отображения F в окрестности точки x_0 осталось к линейно накрывающему линейному оператору $F'(x_0)$ применить теорему Милютина [3, теорема 1.3], гарантирующую, что если к линейно накрывающему отображению с коэффициентом b прибавить любое отображение с константой Липшица $c < b$, то их сумма будет линейно накрывающим отображением с коэффициентом $b - c$.

Если условие Робинсона нарушается (в этом случае точка x_0 называется *анормальной*), то линейное накрывание, вообще говоря, невозможно. Е. Р. Аваковым в [4] доказан следующий результат: пусть $K = X$, образ первой производной $\text{Im } F'(x_0)$ является замкнутым топологически дополняемым подпространством и¹ $\exists h \in X: F'(x_0)h = 0, F''(x_0)[h, h] \in \text{Im } F'(x_0), \text{Im } F'(x_0) + F''(x_0)[h, \text{Ker } F'(x_0)] = Y$. Тогда отображение F Γ -накрывает в точке x_0 , где семейство $\Gamma(r)$ определяется в силу (2) при $\tilde{C} = \text{Im } F'(x_0)$.

В настоящей работе этот результат обобщается на случай конуса, т.е. когда $K \neq X$. Предлагаемый вывод теоремы о накрывании относительно конуса K основан на описанном выше подходе, использующем цитированную теорему Милютина о возмущении линейно накрывающего отображения. Для его реализации вначале докажем конусную теорему Банаха.

2. Теорема Банаха для конуса. Пусть X и Y – банаховы пространства, $K \subseteq X$ – выпуклый замкнутый конус, $A: X \rightarrow Y$ – линейный ограниченный оператор. Положим $C = A(K)$. Обозначим через $\text{Lin } C$ линейную оболочку конуса C , а через $\text{ri } C$ относительную внутренность C . Будем предполагать, что подпространство $\text{Lin } C$ замкнуто и $\text{ri } C \neq \emptyset$. (Эти предположения автоматически выполняются, если Y конечномерно.) Спрашивается, верно ли, что

$$\exists a > 0: \quad \forall y \in C \quad \exists x \in K: Ax = y, \quad \|x\| \leq a\|y\|? \quad (3)$$

Иными словами, справедливо ли конусное обобщение теоремы Банаха об открытом отображении? Если не предполагать замкнутость конуса C , то соответствующий контрпример строится тривиально. Поэтому предположим, что конус C замкнут. Если, кроме того, конус C конечнопорожденный, т.е. является выпуклой оболочкой конечного

¹Здесь и ниже для произвольного подмножества $\tilde{X}$ запись $F''(x_0)[h, \tilde{X}]$ обозначает множество, полученное объединением векторов $F''(x_0)[h, \xi]$ по всем $\xi \in \tilde{X}$.

числа лучей, то существование искомого a доказывается несложно². В общем же случае даже в предположении замкнутости и конечномерности C ответ на поставленный вопрос отрицателен, что показывает следующий

ПРИМЕР 1. Пусть $X = l_2$, $K = (x^1, x^2, \dots) \in l_2 : x^i \geq 0 \ \forall i$ – неотрицательный ортант в l_2 , $Y = \mathbb{R}^3$. Выберем в $\mathbb{R}^3$ последовательность векторов d_i следующим образом: $d_i = (q_i, 1)$. Здесь q_i – двумерный единичный вектор из $\mathbb{R}^2$, составляющий с осью абсцисс угол $2\pi(1 - (i + 1)^{-1})$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Тогда $|d_i| = \sqrt{2} \ \forall i$, $d_i \rightarrow d_0$.

Определим линейный непрерывный оператор A на единичных ортах $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (единица на i -м месте) по формуле $Ae_i = i^{-1}d_i$, т.е. $Ax = \sum_{i=1}^{\infty} i^{-1}x^i d_i$. Через C обозначим выпуклую коническую оболочку векторов d_i , $i = 0, 1, \dots$.

Непосредственно проверяется, что $A(K) = C$, конус C замкнут и в каждый вектор d_i оператором A переводится единственный вектор из K – это вектор ie_i . Следовательно, (3) не выполняется.

Отметим, что пример 1 можно модифицировать (эту идею предложил М. Ф. Сухинин) так, что (3) нарушается уже при $X = \mathbb{R}^4$. В то же время справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. Для любого $y_0 \in \text{ri } C$ существуют такие (зависящие от y_0) $\delta > 0$ и $a > 0$, что

$$\forall y \in \text{cone } B_\delta(y_0) \cap C \quad \exists x \in K : Ax = y, \quad \|x\| \leq a\|y\|. \quad (4)$$

Здесь $\text{cone } B = \bigcup_{\alpha \geq 0} \alpha B$ – коническая оболочка множества B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта теорема может быть выведена из теоремы 1 из [5, с. 136], однако мы приведем прямое доказательство. Для произвольного $y \in C$ рассмотрим задачу

$$\|x\| \rightarrow \inf, \quad Ax = y, \quad x \in K$$

(y – параметр). Через $p(y)$ обозначим инфимум в ней. По построению $p(y) < \infty \ \forall y \in C$ и, кроме того, функция p , очевидно, выпукла. Докажем, что p ограничена сверху на некотором не пустом, открытом относительно $\text{Lin } C$ подмножестве. Для этого, вначале, докажем утверждение, являющееся модификацией леммы из [6, с. 260].

ЛЕММА 1. Пусть B – замкнутый шар, лежащий в $\text{int } C$, и $\mathcal{B} = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} \alpha B$ – объединение множеств αB по всем $\alpha \in (0, 1]$. Пусть множество D всюду плотно в $\mathcal{B}$. Тогда произвольный $y \in \text{int } B$, $y \neq 0$, можно разложить в ряд так, что

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} y_i, \quad y_i \in D, \quad \|y_i\| \leq 3\|y\|2^{-i}. \quad (5)$$

² Действительно, если конус C конечнопорожденный, то, не теряя общности, можно считать, что $Y = \mathbb{R}^n$, а $\mathbb{R}^n$ представимо в виде конечного объединения острых (т.е. не содержащих ненулевых подпространств) конечнопорожденных конусов Y_i . (В качестве Y_i можно взять всевозможные ортанты). Каждый из конусов $C_i = C \cap Y_i$ также является острым и по теореме Г. Вейля конечнопорожденным. Пусть I это множество индексов i , для которых $C_i \neq \{0\}$. Пусть $i \in I$, а $e_{i,1}, \dots, e_{i,l}$ – все единичные ребра конуса C_i . В силу его остроты $\exists \delta_i > 0$, $y_i : \langle y_i, e_{i,j} \rangle > \delta_i \ \forall j$, $|y_i| = 1$. Выберем $x_{i,j} \in K : Ax_{i,j} = e_{i,j}$ и $\alpha : \|x_{i,j}\| \leq \alpha \ \forall i, j$. Пусть $y \in Y_i$. Тогда $y = \sum_j \lambda_j e_{i,j}$, где $\lambda_j \geq 0$. Умножая это равенство скалярно на y_i , имеем $\sum_j \lambda_j \leq |y|/\delta_i$. Положим $x = \sum_j \lambda_j x_{i,j}$. Тогда $Ax = y$, $\|x\| \leq \alpha \sum_j \lambda_j \leq |y|/\alpha \delta_i$. Поэтому для $a = \alpha \max_{i \in I} \delta_i^{-1}$ имеет место (3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что для любого $\eta \in \text{int } \mathcal{B}$, $\eta \neq 0$, выполняется

$$\exists \xi \in D: 0 \neq \eta - \xi \in \text{int } \mathcal{B}, \quad \|\eta - \xi\| \leq \frac{1}{2}\|\eta\|. \quad (6)$$

Очевидно, $\eta - \frac{3}{4}\eta = \frac{1}{4}\eta \in \text{int } \mathcal{B}$. Поэтому в D найдется такой достаточно близкий к $\frac{3}{4}\eta$ вектор $\xi \in D$, что $0 \neq \eta - \xi \in \text{int } \mathcal{B}$, $\|\frac{3}{4}\eta - \xi\| \leq \frac{1}{4}\|\eta\|$. Очевидно,

$$\|\eta - \xi\| \leq \frac{1}{4}\|\eta\| + \left\| \frac{3}{4}\eta - \xi \right\| \leq \frac{1}{4}\|\eta\| + \frac{1}{4}\|\eta\| = \frac{1}{2}\|\eta\|$$

и, значит, для ξ выполняется (6).

Возьмем произвольный $y \in B$, $y \neq 0$, и для него построим искомое разложение. Положим $\eta = y$. В силу (6) существует такой $y_1 = \xi$, что

$$y_1 \in D, \quad 0 \neq y - y_1 \in \text{int } \mathcal{B}, \quad \|y - y_1\| \leq 2^{-1}\|y\|.$$

Далее, взяв в (6) $\eta = y - y_1$, выберем $y_2 = \xi \in D$ так, что

$$0 \neq y - y_1 - y_2 \in \text{int } \mathcal{B}, \quad \|y - y_1 - y_2\| \leq 2^{-1}\|y - y_1\| \leq 2^{-2}\|y\|.$$

И вообще, построив $y_1, \dots, y_{i-1}$, положим $\eta = y - \sum_{l=1}^{i-1} y_l$. В силу (6) выберем $y_i = \xi \in D$ так, что

$$0 \neq y - \sum_{l=1}^i y_l \in \text{int } \mathcal{B}, \quad \left\| y - \sum_{l=1}^i y_l \right\| \leq \frac{1}{2} \left\| y - \sum_{l=1}^{i-1} y_l \right\| \leq \frac{1}{2} \cdot 2^{-(i-1)}\|y\| = 2^{-i}\|y\|.$$

Процесс построения последовательности $\{y_i\}$ описан. По построению имеем $\|y - \sum_{l=1}^i y_l\| \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$, т.е. ряд $\sum_i y_i$ сходится. Оценим нормы y_i . Имеем $\|y_1\| \leq \|y - y_1\| + \|y\| \leq 2^{-1}3\|y\|$,

$$\|y_i\| \leq \left\| \sum_{l=1}^i y_l - y \right\| + \left\| y - \sum_{l=1}^{i-1} y_l \right\| \leq 2^{-i}\|y\| + 2^{-(i-1)}\|y\| = 2^{-i}3\|y\|,$$

т.е. это разложение является искомым. Лемма доказана.

Вернемся к доказательству ограниченности функции p . Для натуральных i положим $C_i = \{y : y = Ax, x \in K, \|x\| \leq i\|y\|\}$. Тогда $\cup_i C_i = C$. Рассмотрим банахово пространство $\text{Lin } C$. По теореме Бэра существует такое натуральное N , что C_N всюду плотно в некотором замкнутом шаре B пространства $\text{Lin } C$, принадлежащем $\text{ri } C$ (ведь $\text{ri } C \neq \emptyset$). Положим $D = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} \alpha(C_N \cap B)$. Очевидно, D всюду плотно в $\mathcal{B} = \cup_{\alpha \in (0,1]} \alpha B$.

Возьмем произвольное $y \in \text{ri } B$, $y \neq 0$. По лемме 1 существует разложение (5). По построению $y_i \in D \implies \exists x_i \in K: Ax_i = y_i, \|x_i\| \leq N\|y_i\|; \|y_i\| \leq 3\|y\|2^{-i} \implies \|x_i\| \leq 3N\|y\|2^{-i} \forall i$. Поэтому ряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ сходится к некоторому x , причем $x \in K$ в силу замкнутости K . Применяя почленно к ряду $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ непрерывный оператор A , получаем $Ax = \sum_{i=1}^{\infty} y_i = y$. Кроме того, $\|x\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| \leq 3N\|y\|$. Таким образом, $\forall y \in \text{ri } B \exists x \in K: Ax = y, \|x\| \leq 3N\|y\|$, и, значит, на шаре $\text{ri } B$ функция p ограничена сверху числом $3N$ (ведь $p(0) = 0$). Таким образом, на конусе C функция p конечна, выпукла и ограничена сверху на не пустом относительно открытом подмножестве. Поэтому p непрерывна на $\text{ri } C$ и, значит, для каждой точки $y_0 \in \text{ri } C$ она ограничена в ее относительной окрестности. Отсюда непосредственно вытекает справедливость (4) для некоторых $a > 0, \delta > 0$. Теорема доказана.

Приведем следствия теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть конус C содержит замкнутое подпространство Y_1 . Тогда $\exists a > 0: \forall y \in Y_1 \quad \exists x \in K: Ax = y, \|x\| \leq a\|y\|$. Таким образом, классическая теорема Банаха об открытом отображении формально следует из теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $x_0 \in K: Ax_0 = y_0 \in \text{ri } C$. Тогда существуют такие (зависящие от x_0) $\delta > 0$ и $a > 0$, что

$$\forall \xi \in B_\delta(x_0) \cap K \quad \forall y \in B_\delta(y_0) \cap \text{Lin } C \quad \exists x \in K: Ax = y, \quad \|x - \xi\| \leq a\|y - A\xi\|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу замкнутости $\text{Lin } C$, не теряя общности, будем считать, что $Y = \text{Lin } C \implies y_0 \in \text{int } C$. Возьмем $\delta > 0$, отвечающее y_0 в силу теоремы 1. Выберем $\varepsilon > 0$ так, что $A(B_\varepsilon(x_0)) \subseteq B_\delta(y_0)$. Для произвольных фиксированных $y \in B_\delta(y_0)$, $\xi \in B_\varepsilon(x_0)$ рассмотрим задачу минимизации по переменной x

$$\|x - \xi\| \rightarrow \inf, \quad Ax = y, \quad x \in K$$

(ξ, y – параметры). Инфимум в ней обозначим через $p_\xi(y)$. Каждая из функций p_ξ выпукла и в силу теоремы 1 эти функции p_ξ ограничены равномерно по $\xi \in B_\varepsilon(x_0)$ на открытом множестве $B_\delta(y_0)$. Поэтому (см. [7, с. 22, 23]) в $(\delta/2)$ -окрестности y_0 все функции p_ξ удовлетворяют условию Липшица с одной и той же константой Липшица a . Из очевидных соотношений $p_\xi(A\xi) = 0 \quad \forall \xi \in B_\varepsilon(x_0) \cap K \implies p_\xi(y) = |p_\xi(y) - p_\xi(A\xi)| \leq a\|y - A\xi\|$ получаем требуемое. Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть пространство Y конечномерно. Тогда для любого замкнутого выпуклого конуса $\tilde{C}$ такого, что $\tilde{C} \setminus \{0\} \subset \text{ri } C$, выполняется

$$\exists a > 0: \forall y \in \tilde{C} \quad \exists x \in K: Ax = y, \quad \|x\| \leq a\|y\|. \quad (7)$$

Это следствие теоремы 1 и компактности единичной сферы конечномерного пространства.

Следующий пример показывает, что в следствии 3 предположение о конечномерности Y существенно.

ПРИМЕР 2. Суть конструкции такова. Пусть Y – бесконечномерное гильбертово пространство, а $\tilde{C}$ и C – ненулевые замкнутые выпуклые конусы в нем, причем $B_\delta(\tilde{C} \cap S) \subset C$ для некоторого $\delta > 0$. Здесь S – единичная сфера, а $B_\delta(M)$ – δ -окрестность множества M . Предположим, что существует определенная на C конечная неотрицательная положительно-однородная выпуклая функция p , которая непрерывна на $C \setminus \{0\}$, однако неограничена на $\tilde{C} \cap S$. Доопределив функцию p вне C как $+\infty$, рассмотрим в гильбертовом пространстве $X = Y \times \mathbb{R}^1$ ее надграфик $K = \{x: x = (y, \alpha), y \in C, \alpha \geq p(y)\}$. Очевидно, K – выпуклый замкнутый конус. Определим линейный непрерывный оператор проектирования $A: X \rightarrow Y$ формулой $Ax = y, x = (y, y^0), y \in Y, y^0 \in \mathbb{R}^1$. Тогда $A(K) = C$. В то же время для конуса $\tilde{C}$ условие (7) нарушается, так как по построению $|x| \geq p(y) \quad \forall y \in C \quad \forall x \in K: Ax = y$, а по предположению функция p неограничена на $\tilde{C} \cap S$. Нам осталось построить искомые конусы $C, \tilde{C}$ и функцию p . Сделаем это.

Итак, пусть Y – гильбертово пространство с ортонормированным базисом $e_0, e_1, \dots$. Конус C определим так:

$$C = \{y: y = \alpha(e_0 + e), \alpha \geq 0, e \in Y, \langle e, e_0 \rangle = 0, |e| \leq 1\}. \quad (8)$$

Очевидно, конус C выпуклый и замкнутый. Выберем число $\beta \in (-1, 0)$ так, что $2\beta^2 > 1$. Положим $g_n = \beta e_0 + e_n$, $G_n = \{y \in Y : \langle y, g_n \rangle \geq 0\}$, $n = 1, 2, \dots$. Используя определение β , непосредственной проверкой получаем, что $C \cap G_i \cap G_j = \{0\} \forall i \neq j$. Для $y \in C$ положим $p(y) = \max_{n \geq 0} (n \langle g_n, y \rangle)$, где $g_0 = 0$. Функция p определена корректно и конечна на C , так как в силу сказанного выше для любого $y \in C$ неравенство $\langle g_n, y \rangle > 0$ выполняется не более, чем для одного натурального n . Ясно, что функция p положительно-однородна, выпукла и непрерывна на C в каждой точке $y \neq 0$.

Выберем $\gamma < 1$ так, что $\beta + \gamma > 0$, и определим конус $\tilde{C} = \{y : y = \alpha(e_0 + e), \alpha \geq 0, e \in Y, \langle e, e_0 \rangle = 0, |e| \leq \gamma\}$. Легко видеть, что $B_\delta(\tilde{C} \cap S) \subset C$ для $\delta = \frac{1}{2}(1-\gamma)(1+\gamma^2)^{-1/2}$. В то же время для векторов $y_n = (1+\gamma^2)^{-1/2}(e_0 + \gamma e_n)$ имеем $y_n \in \tilde{C} \cap S$, $p(y_n) = n(1+\gamma^2)^{-1/2}(\beta + \gamma) \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$. Искомые $C, \tilde{C}, p$ построены.

Следующий результат понадобится ниже.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть линейный непрерывный оператор $A: X \rightarrow Y$ линейно накрывает в некоторой окрестности V точки $x_0 \in K$ относительно конуса K с коэффициентом $b > 0$. Тогда существует $r_0 > 0$ такое, что $\forall r \in (0, r_0]$ и для любого отображения $f: V \rightarrow Y$, для которого $\|f(x_0)\| < br/2$ и выполнено условие Липшица с константой $b/2$, уравнение $Ax = Ax_0 + f(x)$ имеет решение $x \in K \cap B_r(x_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим отображение F по формуле $F(x) = Ax - Ax_0 - f(x) + f(x_0)$. По теореме Милютина (теорема 1.3 из [3]) отображение F линейно накрывает в окрестности x_0 относительно конуса K с коэффициентом $b/2$. Поэтому, так как $F(x_0) = 0$, то существует $r_0 > 0$, не зависящее от f , такое, что $F(K \cap B_r(x_0)) \supseteq B_{br/2} \forall r \in (0, r_0]$. Следовательно, эквивалентное исходному уравнение $F(x) = f(x_0)$ имеет решение $x \in K \cap B_r(x_0)$. Предложение доказано.

3. Теорема о накрывании. Далее предполагается, что в окрестности точки x_0 отображение $F: X \rightarrow Y$ дважды непрерывно дифференцируемо по Фреше и $F''(\cdot)$ липшицево. Положим $C = F'(x_0)(K)$. Также предполагается, что подпространство $Y_1 = \text{Lin } C$ замкнуто и $\text{ri } C$ не пусто. (Эти предположения автоматически выполняются, если Y конечномерно.)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $h \in K$. Скажем, что отображение F 2-регулярно в точке x_0 относительно K по направлению h , если

$$Y_1 + F''(x_0)[h, \text{Ker } F'(x_0) \cap K] = Y. \quad (9)$$

ТЕОРЕМА 2. Предположим, что $h \in K$ и отображение F 2-регулярно в точке x_0 относительно конуса K по направлению h , причем $\|h\| < 1$. Тогда для любых векторов $l, m \in \text{ri } C$ найдутся такие $\delta > 0, b > 0$, что отображение F Γ -накрывает в точке x_0 по кривой φ относительно конуса K . Здесь

$$\varphi(r) = y_0 + rF'(x_0)h + r^2 \left(\frac{1}{2}F''(x_0)[h, h] + m \right), \quad (10)$$

а Γ определяется по формуле (2) при $\tilde{C} = \text{cone } B_\delta(l) \cap Y_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Важное место играет следующее простое соображение: если вектор $\tilde{y}$ лежит в относительной внутренности выпуклого конуса C , то произвольный вектор $y \in \text{Lin } C$ представим в виде $y = \tilde{y} - \alpha \tilde{y}$ для некоторых $\tilde{y} \in C$, $\alpha \geq 0$. Перейдем к строгим рассуждениям.

Пусть для удобства $F(x_0) = 0$, $x_0 = 0$. Положим $Q = \frac{1}{2}F''(x_0)$. По лемме Адамара в окрестности x_0 справедливо представление: $F(x) = F'(x_0)x + Q[x, x] + R(x)[x, x]$, где при каждом фиксированном ξ $R(\xi)$ – квадратичное отображение, причем $R(0) = 0$ и $R(\cdot)$ липшицево в окрестности нуля.

По условию $l \in \text{ri } C$. Поэтому по теореме 1 существуют такие $a_1 > 0$, $\delta > 0$, что для $\tilde{C} = \text{cone } B_\delta(l) \cap Y_1$ выполняется

$$\forall \tilde{y} \in \tilde{C} \quad \exists \chi(\tilde{y}) \in K: F'(x_0)\chi(\tilde{y}) = \tilde{y}, \quad \|\chi(\tilde{y})\| \leq a_1 \|\tilde{y}\|. \quad (11)$$

Возьмем $\tilde{y} \in \tilde{C}$, $y \in Y$ и для $\varepsilon > 0$ будем решать уравнение

$$F(x) = \varepsilon(F'(x_0)h + \tilde{y}) + \varepsilon^2(Q[h, h] + m + y), \quad x \in K.$$

Его решение будем искать в виде $x = x(\varepsilon) = \varepsilon \hat{x}(\varepsilon, x_1, x_2, \tilde{y})$, где $\hat{x}(\varepsilon, x_1, x_2, \tilde{y}) = h + \chi(\tilde{y}) + \varepsilon x_1 + x_2$, $x_1 \in K$, $x_2 \in K_2$. Здесь $K_2 = K \cap \text{Ker } L_1$, $L_1 = F'(x_0)$, $L_1: K \rightarrow Y_1$.

Очевидно, $x(\varepsilon) \in K$. Имеем

$$F(\varepsilon h + \varepsilon \chi(\tilde{y}) + \varepsilon^2 x_1 + \varepsilon x_2) = \varepsilon(L_1 h + \tilde{y}) + \varepsilon^2(Q[h, h] + m + y). \quad (12)$$

Возьмем $\bar{x}_1 \in K: L_1 \bar{x}_1 = m$. Нам достаточно доказать существование таких r_1, r_2 , $\varepsilon_0 > 0$, что для любых $y \in Y$, $\tilde{y} \in \tilde{C}: \|y\| \leq r_2$, $\|\tilde{y}\| \leq r_2$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ уравнение (12) имеет решение $x_1 \in K$, $x_2 \in K_2$, для которого

$$\|x_1 - \bar{x}_1\| \leq r_1, \quad \|x_2\| \leq r_1, \quad \|\hat{x}(\varepsilon, x_1, x_2, \tilde{y})\| < 1.$$

Удовлетворяющие этим неравенствам $x_1, x_2, y, \tilde{y}, \varepsilon$ назовем *допустимыми*.

По условию $\|h\| < 1$. Поэтому найдутся такие положительные r_1, r_2, ε_0 , что $a_1 r_2 + \varepsilon_0(\|m\| + r_1) + r_2 < 1 - \|h\|$. По условию $\bar{x}_1 \in K$, $L_1 \bar{x}_1 = m \in \text{ri } C$. Поэтому в силу следствия 2 к теореме 1 сужение отображения L_1 на K линейно накрывает в пересечении K с окрестностью $\bar{x}_1$. Определим линейный оператор $L_2: K_2 \rightarrow Y$ формулой $L_2 x_2 = 2Q[h, x_2]$. Рассмотрим банахово факторпространство Y/Y_1 и факторотображение $\pi: Y \rightarrow Y/Y_1$. В силу (9) $\pi L_2(K_2) = Y/Y_1$ и, значит, в силу следствия 1 к теореме 1 оператор $\pi \circ L_2$ линейно накрывает на K_2 . Из сказанного несложно получаем, что линейный оператор $A: K \times K_2 \rightarrow Y$, определенный по формуле $A(x_1, x_2) = L_1 x_1 + L_2 x_2$, линейно накрывает в некоторой окрестности точки $(\bar{x}_1, 0)$.

Исследуем уравнение (12). Подставляя в (12) представление для F , вычитая из обеих частей равенства $\varepsilon L_1 h + \varepsilon^2 Q[h, h]$ и учитывая (11), после деления на ε^2 получаем

$$A(x_1, x_2) = m + f(x_1, x_2; \tilde{y}, y, \varepsilon). \quad (13)$$

Здесь

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2; \tilde{y}, y, \varepsilon) = & y - 2Q[h, \varepsilon x_1] - Q[\varepsilon x_1 + x_2]^2 \\ & - Q[2(h + \varepsilon x_1 + x_2) + \chi(\tilde{y}), \chi(\tilde{y})] - R(x(\varepsilon))[h + \chi(\tilde{y}) + \varepsilon x_1 + x_2]^2 \end{aligned}$$

и использовано обозначение $Q[x]^2 = Q[x, x]$.

В окрестности точки $(\bar{x}_1, 0)$ отображение A линейно накрывает с некоторым коэффициентом $b > 0$. Уменьшая положительные r_1, r_2 и ε_0 , в силу (11), используя явный вид функции f , добьемся того, что для любых допустимых $x_1, x_2, \tilde{y}, y, \varepsilon$ выполняется $\|f(\bar{x}_1, 0; \tilde{y}, y, \varepsilon)\| < br_1/2$ и при этом константа Липшица функций $f(\cdot; \tilde{y}, y, \varepsilon)$ по переменным x_1, x_2 на множестве $\mathcal{X} = \{x_1 \in K, x_2 \in K_2 : \|x_1 - \bar{x}_1\| + \|x_2\| \leq r_1\}$ не превышает $b/2$.

Таким образом, так как $m = A(\bar{x}_1, 0)$, для уравнения (13) в точке $(\bar{x}_1, 0)$ выполнены все условия предложения 1. Из него вытекает, что для любых допустимых $\tilde{y}, y, \varepsilon$ уравнение (13) имеет решение $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$. При этом по построению $\|\hat{x}(\varepsilon, x_1, x_2, \tilde{y})\| < 1$. Теорема доказана.

Основной частный, но наиболее употребительный случай теоремы 2 – это когда вектор $h \in K$ удовлетворяет условиям

$$F'(x_0)h = 0, \quad (-F''(x_0)[h, h]) \in \text{ri } C. \quad (14)$$

Тогда берем $m = -\frac{1}{2}F''(x_0)[h, h]$, откуда $\varphi(r) \equiv y_0$ и мы получаем Γ -накрывание в точке x_0 вдоль конуса K .

Пусть выполняется (14). Тогда из (9) вытекает, что

$$F'(x_0)(K) + F''(x_0)[h, K \cap \text{Ker } F'(x_0)] = Y$$

и, значит, это условие, предложенное Е. Р. Аваковым, эквивалентно (9). Действительно, пусть имеет место (9). Возьмем $y \in Y$. В силу (9) $\exists y_1 \in Y_1, \tilde{x} \in \text{Ker } L_1 \cap K : y = y_1 + 2Q[h, \tilde{x}]$. (Мы используем обозначения, введенные при доказательстве теоремы 2.) Но так как $m = -2Q[h, h]$ лежит в относительной внутренней конуса C , то вектор $y_1 \in \text{Lin } C$ представим в виде $y_1 = c - \alpha m$ для некоторых $c \in C, \alpha \geq 0$. Поэтому $y_1 = c + 2Q[h, \alpha h]$. Выберем $x_1 \in K : L_1 x_1 = c$ и положим $x_2 = \tilde{x} + \alpha h$. Очевидно, $y = A(x_1, x_2)$. Равенство $A(K \times K_2) = Y$ доказано. При $K = X$ условия Γ -накрывания в смысле теоремы 2 получены в [8], а также при иных предположениях в [9].

ТЕОРЕМА 2'. Пусть пространство Y конечномерно. Предположим, что $h \in K$ и отображение F 2-регулярно в точке x_0 относительно конуса K по направлению h , причем $\|h\| < 1$. Тогда для любого замкнутого выпуклого конуса $\tilde{C}$ такого, что $\tilde{C} \setminus \{0\} \subset \text{ri } C$, и любого вектора $m \in \text{ri } C$ найдется такое $b > 0$, что отображение F Γ -накрывает в точке x_0 по кривой φ относительно конуса K . Здесь семейство Γ определяется по формуле (2), а кривая φ – по формуле (10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы получается дословным повторением доказательства теоремы 2, в которой лишь конус $\text{cone } B_\delta(l) \cap Y_1$ заменен на $\tilde{C}$, а ссылка на теорему 1 – ссылкой на следствие 3 к ней.

4. Теорема об обратной функции и другие приложения. Всякая теорема о накрывании по сути является теоремой об обратной функции, понимаемой как утверждение, гарантирующее существование решения нелинейного уравнения в окрестности заданного решения, причем с заданной оценкой. Реализуя это соображение, приведем соответствующую теорему об обратной функции, порожденную теоремой 2. Итак, будем решать уравнение $F(x) = y$ относительно неизвестного $x \in (x_0 + K)$ для y , принадлежащих окрестности точки y_0 .

Через $\rho(y, \tilde{C})$ обозначим расстояние от точки y до множества $\tilde{C}$. Отметим, что если $\tilde{C}$ – выпуклый конус, то по теореме двойственности для задачи о кратчайшем расстоянии [1, с. 276]

$$\rho(y; \tilde{C}) = \sup\{\langle y^*, y \rangle, \quad y^* \in \tilde{C}^0, \quad \|y^*\| \leq 1\}, \quad (15)$$

где $\tilde{C}^0 = \{y^* \in Y^* : \langle y^*, y \rangle \leq 0 \forall y \in \tilde{C}\}$ – поляр конуса $\tilde{C}$.

Предположим, что подпространство $Y_1 = \text{Lin } C$ замкнуто, топологически дополняемо и $\text{ri } C \neq \emptyset$.

ТЕОРЕМА 3 (об обратной функции). *Предположим, что $h \in K$, отображение F 2-регулярно в точке x_0 относительно конуса K по направлению h и выполняется (14). Тогда для любого $l \in \text{ri } C$ найдутся такие положительные α, β , что*

$$\begin{aligned} \forall y \in Y: \|y - y_0\| \leq \alpha \quad \exists x = x(y) \in (x_0 + K): F(x(y)) = y, \\ \|x(y) - x_0\| \leq \text{const}(\|y - y_0\| + \rho(y - y_0; \tilde{C})^{1/2}), \quad \tilde{C} = \text{cone } B_\beta(l) \cap Y_1. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь и ниже использованная запись означает существование константы const , для которой справедливо выписанное неравенство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем обозначения и предположения, введенные при доказательстве теоремы 2. Соотношения (14) положительно однородны по h . Поэтому, не теряя общности, будем считать, что $\|h\| < 1$. Возьмем $\delta > 0$, отвечающее векторам h, l в силу теоремы 2 при $m = -Q[h, h]$. Положим $\tilde{C} = \text{cone } B_\beta(l) \cap Y_1, \beta = \frac{1}{3}\delta, \rho(y) = \rho(y; \tilde{C})$. По условию $l \in \text{ri } \tilde{C}$. Поэтому $\exists a_1 > 0: \langle y^*, l \rangle \leq -a_1 \quad \forall y^* \in Y_1^* \cap \tilde{C}^0: \|y^*\| = 1$. Покажем, что

$$y_1 + tl \in \tilde{C} \quad \forall t \geq \tilde{\rho}(y_1) = a_1^{-1} \rho(y_1) \quad \forall y_1 \in Y_1. \quad (17)$$

Действительно, пусть $y \in Y_1$. Тогда $y \in \tilde{C} \iff \langle y^*, y \rangle \leq 0 \quad \forall y^* \in Y_1^* \cap \tilde{C}^0$. В то же время для $y^* \in Y_1^* \cap \tilde{C}^0, \|y^*\| = 1$ и $t \geq \tilde{\rho}(y_1)$ имеем

$$\langle y^*, y_1 + tl \rangle \leq \langle y^*, y_1 \rangle + \rho(y_1) a_1^{-1} \langle y^*, l \rangle \leq \langle y^*, y_1 \rangle - \rho(y_1) \leq 0$$

в силу (15), что и доказывает (17).

Положим $D = \text{cone } B_\delta(l) \cap Y_1$. По теореме 2 существуют такие $r_1 > 0, r_2 > 0, \varepsilon_0 \leq 1$, что для любых $y_2 \in Y, \tilde{y} \in D: \|y_2\| \leq r_2, \|\tilde{y}\| \leq r_2, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ уравнение

$$F(x) = y = \varepsilon \tilde{y} + \varepsilon^2 y_2, \quad (18)$$

имеет решение $x \in (x_0 + K): \|x - x_0\| \leq \varepsilon r_1$.

Обозначим через π_1 и π_2 непрерывные операторы проектирования Y на Y_1 и на некоторое замкнутое подпространство Y_2 , дополняющее Y_1 , соответственно. Отображения $\tilde{\rho}, \pi_1, \pi_2$ непрерывны и $\tilde{\rho}(0) = 0$. Поэтому $\exists \alpha > 0$:

$$(\tilde{\rho}(\pi_1 y) 2r_2^{-1} \|l\|)^{1/2} + 2r_2^{-1} \|\pi_1 y\| + (\|\pi_2 y\| 2r_2^{-1})^{1/2} \leq \varepsilon_0 \quad \forall y: \|y\| \leq \alpha. \quad (19)$$

Взяв произвольный вектор $y \in B_\alpha$, представим его в виде

$$y = \varepsilon \tilde{y} + \varepsilon^2 y_2, \quad y_2 = -r_2(2\|l\|)^{-1}l + w, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned}\varepsilon = \varepsilon(y) &= \max\{\tilde{\rho}(\pi_1 y) 2r_2^{-1} \|l\|^{1/2}, \quad 2r_2^{-1} \|\pi_1 y\|, \quad (\|\pi_2 y\| 2r_2^{-1})^{1/2}\}, \\ w = \varepsilon^{-2} \pi_2 y &\in Y_2, \quad \tilde{y} = \varepsilon^{-1} (\pi_1 y + \varepsilon^2 r_2 (2\|l\|)^{-1} l).\end{aligned}\quad (21)$$

При этом, если $l = 0$, то выражение $l\|l\|^{-1}$ условимся считать равным нулю. Докажем, что

$$\varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad \tilde{y} \in D, \quad \|\tilde{y}\| \leq r_2, \quad \|y_2\| \leq r_2. \quad (22)$$

Действительно, первое неравенство непосредственно вытекает из (19). Далее, если $l \neq 0$, то в силу (21) $\varepsilon^2 r_2 (2\|l\|)^{-1} \geq \tilde{\rho}(\pi_1 y)$, откуда в силу (17) $\tilde{y} \in D$. Если же $l = 0$, то $D = Y_1 \implies \tilde{y} \in D$. Далее, в силу (21) $\|\pi_1 y\| \varepsilon^{-1} \leq r_2/2 \implies \|\tilde{y}\| \leq r_2/2 + \varepsilon r_2/2 \leq r_2$. Наконец, в силу (21) $\|\pi_2 y\| \varepsilon^{-2} \leq r_2/2 \implies \|w\| \leq r_2/2$, что (см. (20)) дает последнее неравенство из (22).

Таким образом, в силу (20)–(22) уравнение (18) имеет решение $x \in (x_0 + K)$: $\|x - x_0\| \leq \varepsilon r_1$. Последнее неравенство в силу (21) и с учетом того, что $\tilde{\rho}(\pi_1 y) \leq \tilde{\rho}(y) + \text{const} \|\pi_2 y\|$, $\|\pi_2 y\| \leq \text{const} \rho(y) \quad \forall y$, доказывает оценку из (16). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть конус C есть прямая сумма конечнопорожденного конуса C_1 и замкнутого подпространства Y_1 , т.е. $C = C_1 + Y_1$, причем $\|c_1\| \leq \text{const} \|c_1 + y_1\| \quad \forall c_1 \in C_1, y_1 \in Y_1$. Тогда теоремы 2 и 3 справедливы при $\tilde{C} = C$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть для вектора $h \in K$ отображение F 2-регулярно в точке x_0 относительно K по направлению h , однако условие (14) нарушается. В этом случае уравнение $F(x) = y$ также имеет решения $x \in x_0 + K$, но уже не в окрестности точки y_0 , а ($m \in \text{ri } C$ задано) в окрестности кривой (10). При этом также справедлива линейно-корневая оценка, аналогичная (16). Соответствующая точная формулировка приведена в [10].

В [11] для уравнения с конечномерным образом Y получены условия, идентичные 2-регулярности, и их аналоги высших порядков, гарантирующие накрывание вдоль лучей. Одним из главных отличий результатов [11] от приведенных здесь является то, что в [11] доказана лишь локальная открытость соответствующего отображения, но без оценок типа (16).

ТЕОРЕМА 3'. Пусть пространство Y конечномерно. Предположим, что $h \in K$, отображение F 2-регулярно в точке x_0 относительно конуса K по направлению h и выполняется (14). Тогда для любого замкнутого выпуклого конуса $\tilde{C}: \tilde{C} \setminus \{0\} \subset \text{ri } C$ найдется положительное α , для которого выполняется (16).

Это утверждение вытекает из теорем 3, 2' и соображений компактности, применительно к единичной сфере конечномерного пространства.

Перейдем к теореме о неявной функции. Пусть Z – банахово пространство и $F: X \times Z \rightarrow Y$ – отображение, которое дважды непрерывно дифференцируемо по Фреше в окрестности точки (x_0, z_0) , а его вторая производная липшицева. Положим $y_0 = F(x_0, z_0)$. Рассмотрим уравнение $F(x, z) = y$ относительно неизвестного x и в окрестности точки (x_0, y_0, z_0) будем искать его решение $x = x(y, z)$. Положим

$$C = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, z_0)(K)$$

и пусть $Y_1 = \text{Lin } C$ замкнуто, топологически дополняемо и $\text{ri } C \neq \emptyset$.

ТЕОРЕМА 4 (о неявной функции). *Предположим, что $h \in K$, отображение F 2-регулярно в точке (x_0, z_0) относительно конуса K по направлению h , т.е. отображение $F(\cdot, z_0): X \rightarrow Y$ 2-регулярно в точке x_0 относительно конуса K по направлению h , и*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, z_0)h = 0, \quad \left(-\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, z_0)[h, h]\right) \in \text{ri } C.$$

Тогда для любых $l \in \text{ri } C$, $q \in Z$ найдутся такие $\alpha, \beta > 0$, что

$$\begin{aligned} \forall y, z: \|y - y_0\| + \|z - z_0\| < \alpha \quad \exists x = x(y, z) \in (x_0 + K): F(x(y, z), z) = y, \\ \|x(y, z) - x_0\| \leq \text{const} \left(\|y - y_0\| + \|z - z_0\| + \left\| \pi_2 \left(y - y_0 - \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, z_0)(z - z_0) \right) \right\| \right. \\ \left. + \rho((\pi_1(y - y_0), z - z_0), \text{cone } B_\beta(v)) \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь $v = (l + \pi_1(\partial F/\partial z)(x_0, z_0)q, q) \in Y \times Z$, а π_1 и π_2 (как и выше) – непрерывные операторы проектирования Y на Y_1 и на замкнутое подпространство Y_2 , дополняющее Y_1 , соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для простоты $y_0 = 0, z_0 = 0$. Превратим $Y \times Z$ в банахово, определив в нем норму как сумму норм в Y и Z . Будем решать систему уравнений $F(x, z) = y, z = \mu$ относительно неизвестных (x, z) в окрестности точки $((x_0, z_0), (y_0, \mu_0))$, где $\mu_0 = z_0$. Для этого рассмотрим отображение $\mathcal{F}: X \times Z \rightarrow Y \times Z$, $\mathcal{F}(x, z) = (F(x, z), z)$. Очевидно, $(h, 0_z) \in \text{Ker } \mathcal{F}'(x_0, z_0)$;

$$-\mathcal{F}''(x_0, z_0)[(h, 0_z), (h, 0_z)] = (m, 0_z) \in \text{ri } W.$$

Здесь

$$m = -\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, z_0)[h, h], \quad W = \mathcal{F}'(x_0, z_0)(K \times Z),$$

а 0_z – нулевой элемент пространства Z . Ясно, что

$$W = \left\{ (y, z) : y = \tilde{y} + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, z_0)z, \quad \tilde{y} \in C, \quad z \in Z \right\}$$

и, значит, $\text{Lin } W$ замкнуто. Поэтому к отображению $\mathcal{F}$ применима теорема 3 об обратной функции, дающая искомое утверждение. При этом использовано следующее соотношение.

Положим $A = (\partial F/\partial x)(x_0, z_0)$, $w = (l + Aq, q)$ и $D = \text{cone } B_\beta(w) \cap \text{Lin } W$, где $\beta > 0$ взято из теоремы 3. Возьмем произвольные y, z . Имеем

$$\rho((y, z), D) \leq \|(y, z) - (y_1, z)\| + \rho((y_1, z), D), \quad \text{где } y_1 = \pi_1 y + \pi_2 A z.$$

Очевидно, $(y_1, z) \in \text{Lin } W$, так как $\pi_2 Az = Az - \pi_1 Az$. Поэтому

$$\begin{aligned}
 \rho((y_1, z), D) &= \rho((y_1, z), \text{cone } B_\beta(w)) = \inf_{t \geq 0} \max(0, \|(y_1, z) - tw\| - t\beta) \\
 &= \inf_{t \geq 0} \max(0, (\|y_1 - t(l + Aq)\| + \|z - tq\| - t\beta)) \\
 &= \inf_{t \geq 0} \max(0, \|\pi_2 A(z - tq) + \pi_1 y - t(\pi_1 Aq + l)\| + \|z - tq\| - t\beta) \\
 &\leq \inf_{t \geq 0} \max(0, (\|\pi_2 A\| + 1)\|z - tq\| + \|\pi_1 y - t(\pi_1 Aq + l)\| - t\beta) \\
 &\leq \inf_{t \geq 0} \max(0, c\|z - tq\| + c\|\pi_1 y - t(\pi_1 Aq + l)\| - t\beta) \\
 &= c\rho((\pi_1 y, z), \text{cone } B_{\tilde{\beta}}(v)), \quad \text{где } c = 1 + \|\pi_2 A\| \geq 1, \quad \tilde{\beta} = \frac{\beta}{c}.
 \end{aligned}$$

Учитывая, что $y - y_1 = \pi_2(y - Az)$, окончательно получаем

$$\rho((y, z), D) \leq \|\pi_2(y - Az)\| + c\rho((\pi_1 y, z), \text{cone } B_{\tilde{\beta}}(v)).$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть пространства Y, Z конечномерны и $\tilde{C}$ – выпуклый замкнутый конус, для которого $\tilde{C} \setminus \{0\} \subset \text{ri } C$. Предположим, что выполнены предположения теоремы 4. Тогда найдутся такие положительные α и β , что для любых $l \in \text{ri } \tilde{C}, q \in Z$ выполняется (23). Справедливость этого утверждения вытекает из теоремы 4 и соображений компактности конечномерной сферы.

Зададимся вопросом: что будет, если в предположениях теоремы о неявной функции условие

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, z_0)[h, h] \in -\text{ri } C$$

нарушается. Оказывается, что в этом случае уравнение $F(x, z) = y$ можно разрешить, но уже не для всех (y, z) , близких к исходной точке (y_0, z_0) . Приведем соответствующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5 (о неявной функции). *Предположим, что $h \in K$, отображение F 2-регулярно в точке (x_0, z_0) относительно конуса K по направлению h и*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, z_0)h = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, z_0)[h, h] \in \text{Lin } C.$$

Тогда для любых $l \in \text{ri } C, q \in Z, \gamma > 0$ найдутся такие $\alpha, \beta > 0$, что

$$\begin{aligned}
 \forall (y, z) \in (y_0, z_0) + \text{cone } B_\beta \left(\left(l + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, z_0)q, q \right) \right) \cap B_\alpha : \\
 \left\| \pi_2 \left(y - y_0 - \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, z_0)(z - z_0) \right) \right\| \\
 \leq \gamma \left(\left\| \pi_1(y - y_0) + \pi_2 \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, z_0)(z - z_0) \right\|^2 + \|z - z_0\|^2 \right) \\
 \exists x = x(y, z) \in (x_0 + K) : F(x(y, z), z) = y, \\
 \|x(y, z) - x_0\| \leq \text{const}(\|y - y_0\| + \|z - z_0\|).
 \end{aligned}$$

Доказательство аналогично доказательству теорем 2, 4.

При $K = X$ теоремы о неявной функции в аномальной точке при аналогичных предположениях доказаны в [4], [8], а также в предположениях иного характера в [12], [9], причем в последней работе в оценке на решение (23) вследствие опечатки на с. 7 в последнем члене, стоящем под корнем и имеющем множитель P_2 , пропущено слагаемое $(\partial F/\partial y)(x_0, y_0)(y - y_0)$. При выполнении условия Робинсона $(\partial F/\partial x)(x_0, z_0)(K) = Y$ теоремы 3, 4 получены в [2]. Отметим, что в теоремах 3, 3' и 4 замкнутость конуса C априори не предполагается и это существенно, так как в приложениях часто C не замкнут. Так, например, в классической задаче оптимального управления вычисления показывают, что в общем положении конус $C \setminus \{0\}$ открыт (при этом Y конечномерно)!

При исследовании структуры множества уровня вида $M = \{x \in x_0 + K : F(x) = F(x_0)\}$ в окрестности точки x_0 большое значение имеет удобное описание конуса касательных к нему в точке x_0 векторов. Напомним, что для множества $M \subset X$ вектор $h \in X$ называется *касательным* к M в точке $x_0 \in M$, если существуют числовая последовательность $\{\varepsilon_i\} \rightarrow 0+$ и сходящаяся к нулю последовательность векторов $\{\tilde{x}_i\}$, для которых $x_0 + \varepsilon_i h + \varepsilon_i \tilde{x}_i \in M \quad \forall i$. Конус касательных к M в точке x_0 векторов обозначается через $TM(x_0)$. Очевидно, $TM(x_0) \subseteq \text{Ker } F'(x_0) \cap K$. Более того, справедливо включение $TM(x_0) \subseteq H(x_0)$, где

$$H(x_0) = \{h \in \text{Ker } F'(x_0) : h \in K, \quad (-F''(x_0)[h, h]) \in \text{cl } F'(x_0)(K)\},$$

а cl – замыкание множества. Действительно, пусть $C = F'(x_0)(K)$. Для $h \in TM(x_0)$ имеем

$$\begin{aligned} x_i = \varepsilon_i h + \varepsilon_i \tilde{x}_i \in K \quad \forall i &\implies F'(x_0)x_i + \frac{1}{2}F''(x_0)[x_i, x_i] = o(\varepsilon_i^2) \\ &\implies \langle y^*, F''(x_0)[h, h] \rangle \geq 0 \quad \forall y^* \in C^0 \\ &\implies (-F''(x_0)[h, h]) \in C^{00} = \text{cl } C. \end{aligned}$$

Вообще говоря, $TM(x_0) \neq H(x_0)$, однако, если выполняется условие Робинсона $F'(x_0)(K) = Y$, то $TM(x_0) = H(x_0)$. Приведем достаточные условия касания, более тонкие, чем условие Робинсона. Их естественно называть достаточными условиями касания второго порядка в отличие от условия Робинсона, которое является условием первого порядка.

ТЕОРЕМА 6. *Предположим, что $h \in K$, отображение F 2-регулярно в точке x_0 относительно конуса K по направлению h и имеет место (14). Тогда $h \in TM(x_0)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать обозначения, введенные при доказательстве теоремы 2. Для $\varepsilon > 0$ рассмотрим уравнение

$$F(x_0 + \varepsilon h + \varepsilon^2 \eta + \varepsilon^2 x_1 + \varepsilon x_2) = 0$$

относительно неизвестных $x_1 \in K$, $x_2 \in K_2$, где $\eta \in K$: $F'(x_0)\eta = -\frac{1}{2}F''(x_0)[h, h]$. Дословно повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 2 при $\tilde{y} = y = 0$, получаем, что рассматриваемое уравнение эквивалентно следующему (см. (13)):

$$A(x_1, x_2) = \tilde{f}(x_1, x_2; \varepsilon).$$

Здесь $\tilde{f}(x_1, x_2; \varepsilon) = f(x_1, x_2; 0, 0, \varepsilon)$. По построению $\tilde{f}(0, 0; \varepsilon) \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$. Кроме того, $\gamma(r, \varepsilon) \rightarrow 0, (r, \varepsilon) \rightarrow 0$, где $\gamma(r, \varepsilon)$ – константа Липшица функции $\tilde{f}(\cdot; \varepsilon)$ по переменным x_1, x_2 на шаре радиуса r . Отсюда в силу предложения 1 для произвольного натурального i найдется такое $\varepsilon_i > 0$, что рассматриваемое уравнение при $\varepsilon = \varepsilon_i$ имеет решение $x_{1,i} \in K, x_{2,i} \in K \cap \text{Ker } F'(x_0): \|x_{1,i}\| + \|x_{2,i}\| \leq r = i^{-1}$. Очевидно, $x_{1,i}, x_{2,i} \rightarrow 0$ и, значит, $h \in TM(x_0)$. Теорема доказана.

Приведем удобное для приложений (например, для теории экстремальных задач) обобщение теоремы 6. Пусть N – замкнутый выпуклый конус из Y . Рассмотрим множество

$$M = \{x \in x_0 + K : F(x) \in F(x_0) + N\}.$$

Положим $C = F'(x_0)(K) - N$. Пусть подпространство $Y_1 = \text{Lin } C$ замкнуто, топологически дополняемо и $\text{ri } C \neq \emptyset$.

ТЕОРЕМА 6'. *Предположим, что $h \in K$ и отображение F 2-регулярно в точке x_0 относительно конусов K и N по направлению h , т.е. имеет место*

$$F'(x_0)h \in N, \quad (-F''(x_0)[h, h]) \in \text{ri } C, \quad (24)$$

$$\text{Lin } C + F''(x_0)[h, F'(x_0)^{-1}(N) \cap K] = Y. \quad (25)$$

Тогда $h \in TM(x_0)$, где множество M определено выше.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим отображение $\mathcal{F}: X \times Y \rightarrow Y$ по формуле $\mathcal{F}(x, y) = F(x) - y$, конус $\mathcal{K} = \{(x, y) : x \in K, y \in N\}$ и вектор $\tilde{h} = (h, F'(x_0)h) \in \mathcal{K}$. Применяя к $\tilde{h}$, $\mathcal{K}$ и отображению $\mathcal{F}$ в точке (x_0, y_0) теорему 6, получаем требуемое. Теорема доказана.

ЛЕММА 2. *Предположим, что $h \in K, F'(x_0)h \in N, (-F''(x_0)[h, h]) \in C$ и имеет место (25). Пусть, кроме того,*

$$\exists \tilde{h} \in K : F'(x_0)\tilde{h} \in N, \quad (-F''(x_0)[h, \tilde{h}]) \in \text{ri } C.$$

Тогда существует такая, сходящаяся к нулю последовательность $\{x_i\}$, что для $h_i = h + i^{-1}\tilde{h} + i^{-1}x_i$ выполняется

$$h_i \in K, \quad F'(x_0)h_i \in N, \quad F''(x_0)[h_i, h_i] \in \text{Lin } C \quad (26)$$

и, следовательно, при больших i отображение F 2-регулярно в точке x_0 относительно конуса K по направлению h_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество $\widetilde{M} = \{x \in \widetilde{K} : \pi_2 F''(x_0)[x, x] = 0\}$, где $\widetilde{K} = \{x \in K : F'(x_0)x \in N\}$. Очевидно, $h \in \widetilde{M}$, а $\tilde{h}$ является касательным к $\widetilde{M}$ в этой точке h (например, по теореме 6). Поэтому существует сходящаяся к нулю последовательность $\{x_i\}$, для которой выполняется $h_i = h + i^{-1}\tilde{h} + i^{-1}x_i \in \widetilde{M}$ и, значит, имеет место (26). Лемма доказана.

Если в (24) последнее условие ослабить, заменив $\text{ri } C$ на C , то вектор h касательным к M , вообще говоря, не будет. Тем не менее, если для h выполнены предположения

леммы 2, то $h \in TM(x_0)$. Действительно, для больших номеров i векторы h_i удовлетворяют предположениям теоремы 6' и, следовательно, $h_i \in TM(x_0)$, а касательный конус замкнут. Теоремы 6 и 6' обобщают некоторые результаты из [4], [12], [13], а в предположении выполнении условия Робинсона $F'(x_0)(K) - N = Y$ они установлены в [2].

Я благодарю профессоров Е. Р. Авакова, А. Ф. Измаилова, А. Д. Иоффе, М. Ф. Сухина и В. М. Тихомирова за ценные советы и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
- [2] Robinson S. Stability theory for Systems of inequalities. Part II: differentiable nonlinear systems // SIAM J. Numer. Anal. 1976. V. 13. № 4. P. 497–513.
- [3] Дмитрук А. В., Милютин А. А., Осмоловский Н. П. Теорема Люстерника и теория экстремума // УМН. 1980. Т. 35. № 6. С. 11–46.
- [4] Аваков Е. Р. Теоремы об оценках в окрестности особой точки отображения // Матем. заметки. 1990. Т. 47. № 5. С. 3–13.
- [5] Обен Ж. П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988.
- [6] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.
- [7] Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
- [8] Измаилов А. Ф. Теоремы о представлении семейств нелинейных отображений и теоремы о неявной функции // Матем. заметки. 2000. Т. 67. № 1. С. 57–68.
- [9] Арутюнов А. В. Теорема о неявной функции как реализация принципа Лагранжа. Аномальные точки // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 1. С. 3–26.
- [10] Арутюнов А. В. Теорема об обратной функции на конусе в окрестности аномальной точки // Докл. РАН. 2003. Т. 389. № 1. С. 7–10.
- [11] Warga J. Higher-order conditions for conical controllability // SIAM J. Control Optimiz. 1988. V. 26. № 6. P. 1471–1480.
- [12] Измаилов А. Ф., Третьяков А. А. 2-регулярные решения нелинейных задач. М.: Физматлит, 1999.
- [13] Измаилов А. Ф. К условиям оптимальности в экстремальных задачах с нерегулярными ограничениями-неравенствами // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 1. С. 89–102.