Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Бурский, Е. А. Буряченко, Некоторые вопросы нетривиальной разрешимости однородной задачи Дирихле для линейных уравнений произвольного четного порядка в круге, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 4, 498–508

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2508>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 07:42:34

УДК 517.946

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ НЕТРИВИАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЧЕТНОГО ПОРЯДКА В КРУГЕ

В. П. Бурский, Е. А. Буряченко

В настоящей работе получено необходимое и достаточное условие нетривиальной разрешимости однородной задачи Дирихле в круге для линейных уравнений произвольного четного порядка $2m$ с постоянными комплексными коэффициентами и однородным невырожденным символом в общем положении. Отдельно рассмотрены случаи $m = 1, 2, 3$. Для случая $m = 2$ приведены примеры вещественных эллиптических систем, сводящихся к одиночным уравнениям с постоянными комплексными коэффициентами, для которых однородная задача Дирихле в круге имеет счетный набор линейно независимых полиномиальных решений.

Библиография: 15 названий.

1. Введение. Целью настоящей работы является получение критерия нетривиальной разрешимости однородной задачи Дирихле в круге для общего уравнения главного типа четного порядка $2m$ с постоянными комплексными коэффициентами и однородным невырожденным символом. Отдельно рассматриваются случаи $m = 1, 2, 3$. Эффект нетривиальной разрешимости однородной задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка был впервые обнаружен А. В. Бицадзе, который в работе [1] указал пример уравнения, для которого однородная задача Дирихле в круге имеет счетное число линейно независимых решений. Это уравнение имеет вид: $\partial^2 u / \partial \bar{z}^2 = 0$. Нетрудно видеть, что функция $(z\bar{z} - 1)P(z)$ с произвольным полиномом $P(z) \neq 0$ является нетривиальным решением задачи Дирихле для этого уравнения в круге. Затем им же [2] был обнаружен другой пример уравнения второго порядка с постоянными комплексными коэффициентами, имеющий то же свойство. Уравнения, приведенные Бицадзе, не являются правильно эллиптическими, поэтому для них возможна неединственность решения задачи Дирихле. Напомним, что для правильно эллиптических уравнений четного порядка с постоянными комплексными коэффициентами однородная задача Дирихле имеет не более, чем конечное число линейно независимых решений [3], а для таких уравнений второго порядка без младших членов в плоской области имеет место единственность решения [4]. Последнее утверждение является следствием результатов работы М. Й. Вишика [5] о единственности решения задачи Дирихле для уравнений с постоянными комплексными коэффициентами без младших членов, сводящихся к вещественным сильно эллиптическим системам. В работе Р. А. Александрияна [6] (см.

также [7]) было получено условие единственности решения задачи Дирихле в единичном круге для одного гиперболического уравнения в случае, когда $\varphi_1 = -\varphi_2$, где φ_i , $i = 1, 2$, — углы наклона характеристик (см. определение в п. 2). Это условие — суть условие иррациональности угла $2\varphi_1/\pi$. Позже, в работе [8], одним из авторов было получено необходимое и достаточное условие нетривиальной разрешимости однородной задачи Дирихле в единичном круге для эллиптических уравнений второго порядка с постоянными комплексными коэффициентами и однородным невырожденным символом в виде π -рациональности угла между комплексными характеристиками.

Вопросам единственности решения задачи Дирихле в круге для правильно эллиптических уравнений четвертого порядка с постоянными комплексными коэффициентами и однородным по порядку дифференцирования символом посвящена работа [9]. В ней получены критерии единственности решения задачи в ряде случаев: как в общем (все корни характеристического уравнения простые и ни один из них не принимает значения $\pm i$), так и в случае кратных корней, а также корней, принимающих значения $\pm i$ (называемых ниже исключительными случаями). Отметим, что результаты настоящего исследования посвящены бестипным уравнениям высокого порядка, однако, результаты работы [9] для правильно эллиптических уравнений выводятся из теоремы 1 настоящей работы при $m = 2$ в общем случае и из результатов работы [10], посвященной получению критериев единственности решения задачи Дирихле для общего уравнения четвертого порядка с постоянными комплексными коэффициентами и однородным символом в исключительных случаях.

2. Постановка задачи и формулировка результата. В единичном круге K рассматривается следующая задача Дирихле для линейных уравнений произвольного четного порядка $2m$ с постоянными комплексными коэффициентами и однородным невырожденным символом:

$$L(\partial)u = a_0 \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_1^{2m}} + a_1 \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_1^{2m-1} \partial x_2} + \dots + a_{2m-1} \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_1 \partial x_2^{2m-1}} + a_{2m} \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_2^{2m}} = 0, \quad (1)$$

$$u|_{\partial K} = 0, \quad u'_\nu|_{\partial K} = 0, \quad \dots, \quad u_\nu^{(m-1)}|_{\partial K} = 0, \quad (2)$$

где $\vec{\nu}$ — единичный вектор внешней нормали. Заметим, что в силу разложения символа $L(\xi) = a_0 \xi_1^{2m} + a_1 \xi_1^{2m-1} \xi_2 + \dots + a_{2m} \xi_2^{2m} = \langle \xi, a^1 \rangle \langle \xi, a^2 \rangle \dots \langle \xi, a^{2m} \rangle$, где $a^j \in \mathbb{C}^2$, $j = 1, 2, \dots, 2m$, — комплексные векторы, $\langle a, b \rangle = a_1 \bar{b}_1 + a_2 \bar{b}_2$ для $a, b \in \mathbb{C}^2$, уравнение (1) можно записать иначе:

$$\langle \nabla, a^1 \rangle \langle \nabla, a^2 \rangle \dots \langle \nabla, a^{2m} \rangle u = 0. \quad (3)$$

Наши предположения заключаются в том, что корни λ_j характеристического полинома $L(1, \lambda) = 0$ простые (т.е. символ невырожден или, что то же, уравнение (1) является уравнением главного типа) и $\lambda_j \neq \pm i$, $j = 1, 2, \dots, 2m$.

Углом наклона характеристики, отвечающей некоторому корню λ_j характеристического уравнения будем называть какое-нибудь решение уравнения $-\operatorname{tg} \varphi_j = \lambda_j$, $j = 1, 2, \dots, 2m$. Ограничение $\lambda_j \neq \pm i$, $j = 1, 2, \dots, 2m$, как раз связано с тем, что уравнение $\operatorname{tg}(x) = \pm i$ не имеет решений. В дальнейшем будем рассматривать также векторы $\tilde{a}^j = (-\bar{a}_2^j, \bar{a}_1^j) = (-\cos \varphi_j, \sin \varphi_j)$, $j = 1, 2, \dots, 2m$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Для нетривиальной разрешимости задачи (1), (2) в $C^{2m}(\overline{K})$ необходимо и достаточно, чтобы углы наклона характеристик удовлетворяли следующему условию:

$$\det \begin{pmatrix} \cos n\varphi_1 & \sin n\varphi_1 & \dots & \cos(n-2(m-1))\varphi_1 & \sin(n-2(m-1))\varphi_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \cos n\varphi_{2m} & \sin n\varphi_{2m} & \dots & \cos(n-2(m-1))\varphi_{2m} & \sin(n-2(m-1))\varphi_{2m} \end{pmatrix} = 0 \quad (4)$$

для некоторого $n \in \mathbb{N}$, $n > 2m - 1$. При выполнении этого условия существует полиномиальное решение задачи (1), (2).

В п. 7 приведено простое достаточное условие выполнения условия (4), состоящее в вещественности и π -рациональности всех разностей $\varphi_i - \varphi_j$, откуда, в частности, следует, что ядро оператора (1), (2) бесконечномерно. Приведены также примеры эллиптических (но не правильно эллиптических) скалярных уравнений с таким свойством.

3. Двойственность уравнение–область. Доказательство необходимости в теореме 1 основано на следующем наблюдении, сделанном одним из авторов в работе [11].

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная подалгебраическая область, заданная неравенством $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : P(x) > 0\}$, с некоторым вещественным полиномом P . Уравнение $P(x) = 0$ задает границу $\partial\Omega$. Предполагается, что граница области Ω невырождена: $|\nabla P| \neq 0$ на $\partial\Omega$. Рассматривается краевая задача для уравнения порядка l с постоянными комплексными коэффициентами

$$\begin{cases} Lu = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u'_\nu|_{\partial\Omega} = 0, \quad \dots, \quad u^{(\gamma-1)}_\nu|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (5)$$

$\gamma \leq l$. Под двойственностью уравнение–область понимается соответствие между задачей (5) и уравнением

$$P(-D_\xi)^{l-\gamma} \{L(\xi)w(\xi)\} = 0, \quad (6)$$

отмеченное в следующем утверждении.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2 ([11]). Для каждого нетривиального решения задачи (5) из $C^l(\overline{\Omega})$ существует нетривиальное аналитическое в $\mathbb{C}^n$ решение уравнения (6) из некоторого класса Z целых функций и наоборот: каждому ненулевому решению $w \in Z$ уравнения (6) отвечает ненулевое решение $u \in C^l(\overline{\Omega})$ задачи (5). Класс Z здесь определен как пространство образов Фурье функций вида $\theta_\Omega v$, $v \in C^l(\mathbb{R}^2)$, где θ_Ω – характеристическая функция области Ω .

Строгое доказательство этого факта см. в [11]; приведем здесь для удобства читателя наглядные соображения, ведущие к нему. Пусть для простоты $l = 2$, $\gamma = 1$, $\tilde{u} \in C^2(\mathbb{R}^n)$ – продолжение решения u задачи (1), (2). Применяя к произведению $\tilde{u}\theta_\Omega$ оператор L , по формуле Лейбница получим выражение вида $A(x)\delta_{\partial\Omega} + l(\nu)u(x)(\delta_{\partial\Omega})'_\nu$, где A зависит от u , u'_ν , u'_τ , τ – касательное направление, $(\delta_{\partial\Omega}, \phi) = \int_{\partial\Omega} \phi(s) ds$. Учитывая граничное условие $u|_{\partial\Omega} = 0$, будем иметь $L(\tilde{u}\theta_\Omega) = B(x)\delta_{\partial\Omega}$. Здесь, как и в одномерном анализе, $\psi\delta' = -\psi'\delta$ при $\psi(0) = 0$. Умножая равенство $L(\tilde{u}\theta_\Omega) = B(x)\delta_{\partial\Omega}$ на $P(x)$ и применяя к полученному преобразование Фурье, приходим к искомому равенству (6). Рассуждения можно обратить.

4. Доказательство необходимости. Предположим, что задача (1), (2) имеет нетривиальное решение в $C^{2m}(\bar{K})$; тогда согласно утверждению 2 существует нетривиальное аналитическое в $\mathbb{C}^2$ решение $w(\xi)$ уравнения

$$(\Delta_\xi + 1)^m \{L(\xi) \cdot w(\xi)\} = 0 \quad (7)$$

из некоторого класса Z целых функций. Так как функция $w(\xi)$ целая, то функция $v(\xi) = L(\xi) \cdot w(\xi)$ делится на символ $L(\xi) = \langle \xi, a^1 \rangle \langle \xi, a^2 \rangle \cdots \langle \xi, a^{2m} \rangle$ уравнения (3) в классе целых функций; поэтому

$$v|_{\langle \xi, a^1 \rangle = 0} = 0, \quad v|_{\langle \xi, a^2 \rangle = 0} = 0, \quad \dots, \quad v|_{\langle \xi, a^{2m} \rangle = 0} = 0. \quad (8)$$

Таким образом, получаем двойственную задачу (7), (8) относительно функции $v(\xi) = L(\xi) \cdot w(\xi)$, которая согласно утверждению 2 имеет нетривиальное решение в некотором классе Z целых функций. Раскладывая функцию $v(\xi)$ в степенной ряд, для младшей нетривиальной однородной полиномиальной части ряда $v_N(\xi)$ получим задачу

$$\Delta_{\xi}^m v_N(\xi) = 0, \quad (9)$$

$$v_N|_{\langle \xi, q^1 \rangle = 0} = 0, \quad v_N|_{\langle \xi, q^2 \rangle = 0} = 0, \quad \dots, \quad v_N|_{\langle \xi, q^{2m} \rangle = 0} = 0. \quad (10)$$

Из соотношений (32.15)–(32.22) в [12] или из формулы Альманси на с. 208 в [13] следует, что общее полиномиальное решение уравнения (9) можно записать в виде

$$\tilde{v}(\xi) = \operatorname{Re}\{f_1(z) + \cdots + \bar{z}^{m-1} \cdot f_m(z)\} + i \operatorname{Re}\{g_1(z) + \cdots + \bar{z}^{m-1} \cdot g_m(z)\},$$

где $z = \xi_1 + i\xi_2$, $f_i(z) = \sum f_{in} \cdot z^n$, $g_i(z) = \sum g_{in} \cdot z^n$, $i = 1, 2, \dots, m$, – некоторые полиномы. Переходя к тригонометрической форме записи комплексного числа $z = \rho \cdot e^{i\varphi}$, получим

$$\begin{aligned} \tilde{v}(\rho, \varphi) = & \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (\alpha_{1n} \cos n\varphi - \beta_{1n} \sin n\varphi + \alpha_{2n} \cos(n-2)\varphi - \beta_{2n} \sin(n-2)\varphi + \cdots \\ & + \alpha_{mn} \cos(n-2(m-1))\varphi - \beta_{mn} \sin(n-2(m-1))\varphi). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь постоянные $\alpha_{in}, \beta_{in} \in \mathbb{C}$ строятся по коэффициентам разложения полиномов $f_i(z)$, $g_i(z)$ в степенной ряд следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \alpha_{in} &= \operatorname{Re} f_{i,n-(i-1)}, & \operatorname{Im} \alpha_{in} &= \operatorname{Re} g_{i,n-(i-1)}, \\ \operatorname{Re} \beta_{in} &= \operatorname{Im} f_{i,n-(i-1)}, & \operatorname{Im} \beta_{in} &= \operatorname{Im} g_{i,n-(i-1)}, \end{aligned} \quad n \in \mathbb{N}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Подставляя (11) в (10) и учитывая, что условие $\langle \xi, a^j \rangle = 0, j = 1, \dots, 2m$, эквивалентно равенству $\varphi = -\varphi_j$, получим линейную однородную систему алгебраических уравнений относительно постоянных α_{in}, β_{in}

[illegible]

определитель которой стоит в левой части равенства (4). По нашему предположению о существовании нетривиального решения задачи (1), (2) и утверждению 2, существует нетривиальное решение задачи (9), (10) в классе однородных полиномов некоторой степени $N > 2m - 1$, поэтому для такого N существует ненулевой набор $(\alpha_{1N}, \beta_{1N}, \dots, \alpha_{mN}, \beta_{mN}) \in \mathbb{C}^{2m}$ постоянных, являющийся решением однородной системы линейных уравнений (12) с $n = N$, что влечет обращение в нуль определителя этой системы. Следовательно, условие (4) выполнено с $n = N$.

5. Доказательство достаточности. При выполнении условия (4) для некоторого $n \in \mathbb{N}$, $n > 2m - 1$, построим нетривиальное решение задачи Дирихле (1), (2) в явном виде. Тем самым будет доказана достаточность условия (4) для нетривиальной разрешимости задачи (1), (2). Ясно, что в силу ортогональности векторов a^j и $\tilde{a}^j$ при каждом $j = 1, \dots, 2m$ решением уравнения (1) или (3) является функция

$$u(x) = \sum_{j=1}^{2m} C_j F_j(-\tilde{a}^j \cdot x), \quad (13)$$

где $F_j(y)$ – некоторые гладкие функции одного аргумента, C_j – некоторые постоянные, $j = 1, \dots, 2m$.

Для построения нетривиального решения задачи (1), (2) нам необходимо так подобрать функции $F_j(-\tilde{a}^j \cdot x)$, чтобы функция вида (13) удовлетворяла граничным условиям (2) для некоторого ненулевого набора $\tilde{C} = (\tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_{2m})$ постоянных.

Оказалось (доказательство см. ниже), что если в качестве функций $F_j(y)$ взять одну и ту же функцию

$$F_j(y) = F_{m-1}(y) := \int_0^y dy_1 \int_0^{y_1} dy_2 \cdots \int_0^{y_{m-3}} dy_{m-2} \int_0^{y_{m-2}} T_N(t) \cdot dt, \quad (14)$$

$$j = 1, \dots, 2m,$$

где $T_N(t)$ – полином Чебышева первого рода порядка $N = n - m + 1$, а в качестве ненулевого набора $\tilde{C} = (\tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_{2m})$ взять некоторое нетривиальное решение $C^* = (C_1^*, \dots, C_{2m}^*)$ линейной алгебраической системы с определителем, стоящим в левой части равенства (4), то функция $u(x)$ из (13) с $C_j = C_j^*$ будет являться искомым нетривиальным решением однородной задачи Дирихле (1), (2).

Приступая к доказательству, мы проверим сначала, что интеграл (14) можно записать в виде

$$F_{m-1}(y) = \begin{cases} \sum_{k=0}^l \{C_k^+(N)T_{N+2k+1}(y) + C_k^-(N)T_{N-2k-1}(y)\} & \text{при } m-1 = 2l+1, \\ \sum_{k=0}^l \{D_k^+(N)T_{N+2k}(y) + D_k^-(N)T_{N-2k}(y)\} & \text{при } m-1 = 2l. \end{cases} \quad (15)$$

Соотношения (15) нетрудно доказать индукцией по N на основе следующего равенства:

$$\int_0^x T_N(t) dt = \frac{1}{2(N+1)} T_{N+1}(x) - \frac{1}{2(N-1)} T_{N-1}(x),$$

которое нетрудно получить из соотношения (37) при $m = 1$ на с. 187 в [14] и (2) на с. 185 там же, и которое означает равенство (15) при $m = 2$. Здесь

$$C_0^+(N) = \frac{1}{2(N+1)}, \quad C_0^-(N) = \frac{1}{2(N-1)}.$$

Из равенств (15) следует, что (13) представимо следующим образом:

$$u(x) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{2m} C_j \sum_{k=0}^l \{C_k^+(N) T_{N+2k+1}(-\tilde{a}^j \cdot x) + C_k^-(N) T_{N-2k-1}(-\tilde{a}^j \cdot x)\} \\ \text{при } m-1 = 2l+1, \\ \sum_{j=1}^{2m} C_j \sum_{k=0}^l \{D_k^+(N) T_{N+2k}(-\tilde{a}^j \cdot x) + D_k^-(N) T_{N-2k}(-\tilde{a}^j \cdot x)\} \\ \text{при } m-1 = 2l, \end{cases} \quad (16)$$

где C_j – произвольные постоянные, $C_k^+(N)$, $C_k^-(N)$, $D_k^+(N)$, $D_k^-(N)$ – постоянные, зависящие только от N и возникающие при вычислении интегралов в (14). Здесь порядок многочлена $u(x)$ равен n при $N = n - m + 1$.

Покажем, что функция (16) удовлетворяет граничным условиям (2), если $C_j = C_j^*$ – некоторое нетривиальное решение линейной однородной системы с определителем (4). Для определенности рассмотрим случай четного m : $m-1 = 2l+1$. Учитывая, что на ∂K $(\tilde{a}^j \cdot x) = -\cos(\tau + \varphi_j)$, а $T_N(\cos(\tau + \varphi_j)) = \cos N(\tau + \varphi_j)$, будем иметь

$$\begin{aligned} u|_{\partial K} &= \sum_{j=1}^{2m} C_j \sum_{k=0}^l \{C_k^+(N) \cos(N+2k+1)(\tau + \varphi_j) + C_k^-(N) \cos(N-2k-1)(\tau + \varphi_j)\} \\ &= \sum_{k=0}^l C_k^+(N) \cos(N+2k+1)\tau \sum_{j=1}^{2m} C_j \cos(N+2k+1)\varphi_j \\ &\quad - \sum_{k=0}^l C_k^+(N) \sin(N+2k+1)\tau \sum_{j=1}^{2m} C_j \sin(N+2k+1)\varphi_j \\ &\quad + \sum_{k=0}^l C_k^-(N) \cos(N-2k-1)\tau \sum_{j=1}^{2m} C_j \cos(N-2k-1)\varphi_j \\ &\quad - \sum_{k=0}^l C_k^-(N) \sin(N-2k-1)\tau \sum_{j=1}^{2m} C_j \sin(N-2k-1)\varphi_j = 0. \end{aligned}$$

Последнее равенство справедливо для всех τ тогда и только тогда, когда имеют место следующие соотношения:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{2m} C_j \cos(N+2k+1)\varphi_j = 0, & \sum_{j=1}^{2m} C_j \cos(N-2k-1)\varphi_j = 0, \\ \sum_{j=1}^{2m} C_j \sin(N-2k-1)\varphi_j = 0, & \sum_{j=1}^{2m} C_j \sin(N+2k+1)\varphi_j = 0, \end{cases} \quad (17)$$

при каждом $k = 0, 1, \dots, l$. Соотношения (17) представляют собой систему $2m$ уравнений с $2m$ неизвестными, определитель которой равен нулю в силу условия (4) (если

положить $N + m - 1 = n$). Следовательно, если $C_j = C_j^*$, $j = 1, \dots, 2m$, – решение системы (17), то функция $u(x) = \sum_{j=1}^{2m} C_j^* F_{m-1}(-\tilde{a}^j \cdot x)$ удовлетворяет первому граничному условию в (2).

Покажем, что $u_\nu^{(p)}|_{\partial K}$ для всех $p = 0, 1, \dots, m - 1$ имеет вид

$$\begin{aligned} u_\nu^{(p)}|_{\partial K} = & \sum_{j=1}^{2m} C_j \sum_{k=0}^l \{P_k^+(N, p) \cos(N + 2k + 1)(\tau + \varphi_j) \\ & + P_k^-(N, p) \cos(N - 2k - 1)(\tau + \varphi_j)\} \end{aligned} \quad (18)$$

с некоторыми постоянными, поэтому равенство $u_\nu^{(p)}|_{\partial K} = 0$ снова приведет нас к тому, что постоянные $C_1, C_2, \dots, C_{2m}$ достаточно подчинить системе (17). Тем самым, теорема 1 будет полностью доказана.

Действительно,

$$\begin{aligned} u_\nu^{(p)}|_{\partial K} = & \sum_{j=1}^{2m} C_j \cos^p(\tau + \varphi_j) F_{m-1}^{(p)}(\cos(\tau + \varphi_j)) \\ = & \sum_{j=1}^{2m} C_j \cos^p(\tau + \varphi_j) F_{m-p-1}(\cos(\tau + \varphi_j)). \end{aligned} \quad (19)$$

Для определенности будем считать p четным: $p = 2q$; тогда $m - p - 1 = 2l + 1 - 2q = 2(l - q) + 1$ нечетное и

$$\cos^p(\tau + \varphi_j) = \sum_{i=0}^q \alpha_{2i}^{(2q)} \cos 2i(\tau + \varphi_j). \quad (20)$$

Коэффициенты $\alpha_{2i}^{(2q)}$ определяются из следующих рекуррентных соотношений: $\alpha_1^{(1)} = 1$, $\alpha_0^{(2)} = \alpha_2^{(2)} = 1/2$, $\alpha_0^{(2q)} = \frac{1}{2}\alpha_1^{(2q-1)}$, $\alpha_{2q}^{(2q)} = \frac{1}{2}\alpha_{2q-1}^{(2q)}$, $\alpha_{2i}^{(2q)} = \frac{1}{2}\alpha_{2i-1}^{(2q-1)} + \frac{1}{2}\alpha_{2i+1}^{(2q-1)}$, $i = 1, 2, \dots, q - 1$. С учетом соотношений (20) и (15) равенство (19) примет вид

$$\begin{aligned} u_\nu^{(p)}|_{\partial K} = & \sum_{j=1}^{2m} C_j \sum_{i=0}^q \alpha_{2i}^{(2q)} \cos 2i(\tau + \varphi_j) \sum_{k=0}^{l-q} \{C_k^+(N) \cos(N + 2k + 1)(\tau + \varphi_j) \\ & + C_k^-(N) \cos(N - 2k - 1)(\tau + \varphi_j)\} \\ = & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2m} C_j \sum_{i=0}^q \alpha_{2i}^{(2q)} \sum_{k=0}^{l-q} \{C_k^+(N) (\cos(N + 2(k + i) + 1)(\tau + \varphi_j) \\ & + \cos(N + 2(k - i) + 1)(\tau + \varphi_j)) \\ & + C_k^-(N) (\cos(N - 2(k - i) - 1)(\tau + \varphi_j) \\ & + \cos(N - 2(k + i) - 1)(\tau + \varphi_j))\} \\ = & \sum_{j=1}^{2m} C_j \sum_{k=0}^l \{P_k^+(N, p) \cos(N + 2k + 1)(\tau + \varphi_j) \\ & + P_k^-(N, p) \cos(N - 2k - 1)(\tau + \varphi_j)\}. \end{aligned}$$

Случай нечетного p аналогичен. Теорема доказана.

6. Случаи уравнений 2-, 4- и 6-го порядков. 1) Рассмотрим однородную задачу Дирихле в круге для уравнения второго порядка, при этом как в настоящем примере, так и в нижеследующих, наши предположения на коэффициенты и символ уравнения из п. 2 остаются в силе:

$$a_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, \quad u|_{\partial K} = 0. \quad (21)$$

В этом случае $m = 1$, поэтому необходимым и достаточным условием нетривиальной разрешимости задачи (19) является выполнение условия

$$\det \begin{pmatrix} \cos n\varphi_1 & \sin n\varphi_1 \\ \cos n\varphi_2 & \sin n\varphi_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (22)$$

для некоторого $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. Очевидно, что условие (22) эквивалентно π -рациональности угла между характеристиками. В силу (16) ненулевое решение задачи (21) можно записать в виде

$$u(x) = C_1^* T_n(-\tilde{a}^1 \cdot x) + C_2^* T_n(-\tilde{a}^2 \cdot x),$$

где (C_1^*, C_2^*) – решение линейной однородной системы, определитель которой удовлетворяет условию (22). Отметим, что этот результат был получен в работе [8] другим методом.

2) В случае уравнения четвертого порядка ($m = 2$) критерием существования нетривиального решения задачи Дирихле в круге служит выполнение равенства

$$\det \begin{pmatrix} \cos n\varphi_1 & \sin n\varphi_1 & \cos(n-2)\varphi_1 & \sin(n-2)\varphi_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos n\varphi_4 & \sin n\varphi_4 & \cos(n-2)\varphi_4 & \sin(n-2)\varphi_4 \end{pmatrix} = 0, \quad (23)$$

для некоторого $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$. А ненулевое решение задачи

$$a_0 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + a_1 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^3 \partial x_2} + a_2 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + a_3 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1 \partial x_2^3} + a_4 \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} = 0, \\ u|_{\partial K} = 0, \quad u'_\nu|_{\partial K} = 0,$$

имеет вид

$$u(x) = \sum_{j=1}^4 C_j^* \left(\frac{1}{2n} T_n(-\tilde{a}^j \cdot x) - \frac{1}{2(n-2)} T_{n-2}(-\tilde{a}^j \cdot x) \right).$$

Этот результат был получен в работе [15] без использования метода двойственности уравнение–область.

3) Для уравнения шестого порядка ($m = 3$) условие (4) примет вид

$$\det \begin{pmatrix} \cos n\varphi_1 & \sin n\varphi_1 & \cos(n-2)\varphi_1 & \sin(n-2)\varphi_1 & \dots & \sin(n-4)\varphi_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos n\varphi_6 & \sin n\varphi_6 & \cos(n-2)\varphi_6 & \sin(n-2)\varphi_6 & \dots & \sin(n-4)\varphi_6 \end{pmatrix} = 0 \quad (24)$$

для некоторого $n \in \mathbb{N}$, $n > 4$, а нетривиальное решение соответствующей задачи можно записать следующим образом:

$$u(x) = \sum_{j=1}^6 C_j^* \left(\frac{1}{4n(n-1)} T_n(-\tilde{a}^j \cdot x) - \frac{1}{2(n-3)(n-1)} T_{n-2}(-\tilde{a}^j \cdot x) + \frac{1}{4(n-3)(n-4)} T_{n-4}(-\tilde{a}^j \cdot x) \right).$$

Здесь, как и прежде, $(C_1^*, C_2^*, \dots, C_6^*)$ – некоторое решение однородной системы, определитель которой удовлетворяет условию (24).

7. Примеры. Приведем некоторые достаточные условия на коэффициенты оператора исходного уравнения, выполнение которых повлечет за собой справедливость равенства (4). В случае $m = 2$ эти условия окажутся полезными при построении примеров вещественных неправильно эллиптических систем четвертого порядка, сводящихся к одиночным уравнениям с постоянными комплексными коэффициентами, для которых однородная задача Дирихле в круге имеет счетное число линейно независимых полиномиальных решений.

ТЕОРЕМА 3. Пусть углы φ_j наклона характеристик, отвечающих корням λ_j характеристического уравнения, таковы, что $\varphi_i - \varphi_j \in \pi\mathbb{Q}$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, 2m$, т.е. все разности $\varphi_i - \varphi_j$ вещественны и π -рациональны. Тогда однородная задача Дирихле в круге для соответствующего дифференциального уравнения будет иметь счетное число линейно независимых полиномиальных решений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $\varphi_i - \varphi_j = \pi k_{ij}/n_{ij}$ для некоторых целых k_{ij} , n_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, 2m$, то полагая n равным наименьшему общему кратному чисел n_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, 2m$, получим справедливость нашего утверждения, раскладывая определитель в равенстве (4) по первым двум столбцам. Заметим, что, если $\varphi_i - \varphi_j = \pi k_{ij}/N$, что влечет выполнение равенства (4) с $n = N$, то, очевидно, $\varphi_i - \varphi_j = \pi l k_{ij}/lN$, что влечет справедливость равенства (4) с $n = lN$. Отсюда, используя достаточность в утверждении теоремы 1, получим наличие нетривиального решения однородной задачи Дирихле в круге в виде полинома степени lN с любым $l \in \mathbb{N}$. Тем самым, теорема 3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что если уравнение (1) является правильно эллиптическим, то все разности $\varphi_i - \varphi_j$, $i, j = 1, 2, \dots, 2m$, не могут быть вещественными, поскольку в противном случае корни τ уравнения $L(\xi + \tau\eta) = 0$ не были бы равномерно распределены в верхней и нижней Im -полуплоскости (см. [3, с. 134]). Следовательно, уравнения, описываемые в теореме 3, не являются правильно эллиптическими и для них (согласно теореме 3) имеет место бесконечномерная неединственность решения однородной задачи Дирихле в круге.

Обратимся к примерам. Рассмотрим случай $m = 2$. В нижеследующих вычислениях нам будет удобнее использовать углы наклона бихарактеристик ψ_j , связанные с углами наклона характеристик φ_j очевидными равенствами: $\psi_j + \varphi_j = \pi/2$, $j = 1, \dots, 2m$. Пусть углы наклона бихарактеристик $\psi_j = x_j + iy_j$, и параметры $b_j, s_j \in \mathbb{R}$, $s_j \leq 1$, $b_j > 0$, $j = 1, 2, 3, 4$, выбраны для удобства вычислений следующим образом: $\sin x_j = s_j$,

$y_j = \ln \sqrt{b_j}$, $j = 1, 2, 3, 4$. Тогда из соотношений $\lambda_j = \operatorname{ctg} \psi_j$, $j = 1, 2, 3, 4$, будет следовать

$$\lambda_j = \frac{4b_j s_j \sqrt{1 - s_j^2}}{4b_j s_j^2 + (b_j - 1)^2} - i \frac{(b_j^2 - 1)}{4b_j s_j^2 + (b_j - 1)^2}, \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (25)$$

Согласно утверждению теоремы 3, параметры s_j , b_j , $j = 1, 2, 3, 4$, следует подбирать так, чтобы

$$\arcsin s_i - \arcsin s_j = \frac{\pi k_{ij}}{n}, \quad b_i = b_j, \quad \forall i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3, 4. \quad (26)$$

Тогда параметрическое семейство (25) корней характеристического уравнения определяет параметрическое семейство вещественных эллиптических систем четвертого порядка с указанным выше свойством.

Например, соотношениям (26) при $n = 4$ удовлетворяют следующие наборы углов:

$$\begin{aligned} \text{а) } \psi_1 &= \pi + \frac{i}{4} \ln 3, & \psi_2 &= \frac{\pi}{4} + \frac{i}{4} \ln 3, & \psi_3 &= \frac{\pi}{2} + \frac{i}{4} \ln 3, & \psi_4 &= -\frac{\pi}{4} + \frac{i}{4} \ln 3, \\ \text{б) } \psi_1 &= \pi + \frac{i}{4} \ln 5, & \psi_2 &= \frac{\pi}{4} + \frac{i}{4} \ln 5, & \psi_3 &= \frac{\pi}{2} + \frac{i}{4} \ln 5, & \psi_4 &= -\frac{\pi}{4} + \frac{i}{4} \ln 5. \end{aligned}$$

Им отвечают уравнения

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 5i \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^3 \partial x_2} - 6 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} - 5i \frac{\partial^4 u}{\partial x_1 \partial x_2^3} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} &= 0, \\ \text{б) } 3 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 13i \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^3 \partial x_2} - 18 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} - 13i \frac{\partial^4 u}{\partial x_1 \partial x_2^3} + 3 \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} &= 0, \end{aligned}$$

которые являются эллиптическими, поскольку их символы не имеют вещественных корней и не являются правильно эллиптическими в силу замечания 2. А соответствующие вещественные системы, для которых однородная задача Дирихле в круге будет иметь счетное число линейно независимых полиномиальных решений, записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{а) } \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^4 v}{\partial x_1^4} - 5 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^3 \partial x_2} - 6 \frac{\partial^4 v}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + 5 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1 \partial x_2^3} + \frac{\partial^4 v}{\partial x_2^4} &= 0, \\ \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 5 \frac{\partial^4 v}{\partial x_1^3 \partial x_2} - 6 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} - 5 \frac{\partial^4 v}{\partial x_1 \partial x_2^3} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} &= 0, \end{aligned} \right. \\ \text{б) } \left\{ \begin{aligned} 3 \frac{\partial^4 v}{\partial x_1^4} - 13 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^3 \partial x_2} - 18 \frac{\partial^4 v}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + 13 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1 \partial x_2^3} + 3 \frac{\partial^4 v}{\partial x_2^4} &= 0, \\ 3 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 13 \frac{\partial^4 v}{\partial x_1^3 \partial x_2} - 18 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} - 13 \frac{\partial^4 v}{\partial x_1 \partial x_2^3} + 3 \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} &= 0. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бицадзе А. В. О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными // УМН. 1948. Т. 3. № 6. С. 211–212.
- [2] Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Физматгиз, 1959.
- [3] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. Т. 1. М.: Мир, 1971.
- [4] Марковский А. И. Об области значения эллиптического полинома // Укр. матем. ж. 1973. Т. 25. № 2. С. 228–234.
- [5] Вишик М. И. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений // Матем. сб. 1951. Т. 29. № 3. С. 615–676.
- [6] Александрян Р. А. О задаче Дирихле для уравнения струны и о полноте одной системы функций в круге // Докл. АН СССР. 1950. Т. 73. № 5.
- [7] Александрян Р. А. Спектральные свойства операторов, порожденных системами дифференциальных уравнений типа С. Л. Соболева // Тр. ММО. 1960. Т. 9. С. 455–507.
- [8] Бурский В. П. О нарушении единственности решения задачи Дирихле для эллиптических систем в круге // Матем. заметки. 1990. Т. 48. № 3. С. 32–36.
- [9] Babayan A. O. On unique solvability of Dirichlet problem for fourth order properly elliptic equation // Izv. Nat. AN Armenii. Matem. 1999. V. 34. № 5. P. 5–18.
- [10] Буряченко Е. А. О единственности решений задачи Дирихле в круге для дифференциальных уравнений четвертого порядка в вырожденных случаях // Нелинейные граничные задачи. 2000. Т. 10. С. 44–49.
- [11] Бурский В. П. О единственности решения некоторых граничных задач для дифференциальных уравнений в области с алгебраической границей // Укр. матем. ж. 1993. Т. 45. № 7. С. 898–906.
- [12] Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. М.: ОГИЗ, 1948.
- [13] Бицадзе А. В. Некоторые классы дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Мир, 1981.
- [14] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974.
- [15] Буряченко Е. А. К вопросу о нарушении единственности решения задачи Дирихле для уравнений с частными производными четвертого порядка // Тр. ИПММ НАН Украины. 1999. Т. 4. С. 15–21.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины
E-mail: buryachenko@yahoo.com, burskii@iamm.ac.donetsk.ua

Поступило
10.01.2000
Исправленный вариант
09.02.2004