Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Довбуш, О существовании K -пределов голоморфных отображений, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 4, 509–514

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2509>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 12:59:26

УДК 517.55

О СУЩЕСТВОВАНИИ K -ПРЕДЕЛОВ ГОЛОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

П. В. Довбуш

Пусть D – полная гиперболическая область в $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, а N – компактное эрмитово многообразие. Для произвольного голоморфного отображения $f: D \rightarrow N$ в произвольной граничной точке D доказывается критерий существования K -предела у f при условии, что соответствующий радиальный предел у f в этой точке существует.

Библиография: 11 названий.

Если U – единичный круг в $\mathbb{C}$, а M – комплексное многообразие комплексной размерности n , p – его точка, а $v \in T_p M$ – касательный вектор, то полунорма Кобаяси

$$K_M(p, v) = \inf \left\{ \frac{1}{\lambda} \mid h \in H(U, M), \quad h(0) = p, \quad h'(0) = \lambda \cdot v, \quad \lambda > 0 \right\}, \quad (1)$$

а расстояние между точками $p, q \in M$

$$k_M(p, q) = \inf_{\gamma} \int_0^1 K_M(\gamma(t), \gamma'(t)) dt,$$

где нижняя грань берется по всем гладким путям $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$, соединяющим точки p и q .

Х. Ройден [1] доказал, что полуметрика k_D совпадает с полуметрикой, введенной Кобаяси [2], и что понятие гиперболического многообразия, также введенное ранее Кобаяси, может быть определено в терминах нормы Кобаяси: многообразие M гиперболично тогда и только тогда, когда для каждой точки $p \in M$ существует координатная окрестность W и положительная постоянная c такая, что для всех $(q, v) \in T(W) \simeq W \times \mathbb{C}^n$, $T(W) = \cup_{q \in W} T_q(M)$,

$$K_M(q, v) \geq c \cdot \|v\|,$$

где $\|\cdot\|$ – евклидова норма в $\mathbb{C}^n$.

Комплексное многообразие M называется *полным*, если ему компактно принадлежит любой шар в метрике Кобаяси. Известно (см. [3]), что полными гиперболическими многообразиями являются все ограниченные области голоморфности в $\mathbb{C}^n$ с достаточно гладкими границами.

Пусть $H(M, N)$ – множество всех голоморфных отображений комплексного многообразия M в комплексное многообразие N . Последовательность $\{f_j\} \subset H(M, N)$ называется *компактно расходящейся*, если для любых компактов $K \subset M$ и $K' \subset N$ найдется

j_0 такое, что $f_{j_0}(K) \cap K' = \emptyset$ для всех $j > j_0$. Семейство $\mathcal{F} \subset H(M, N)$ называется *нормальным*, если из любой последовательности $\{f_j\} \subset \mathcal{F}$ можно извлечь подпоследовательность $\{f_{j_0}\}$ либо равномерно сходящуюся на компактных подмножествах M , либо компактно расходящуюся.

Комплексное многообразие M называется *упругим*, если нормально семейство $H(U, M)$. Любое полное гиперболическое многообразие упруго (см. [4]). Если M упруго, то нетрудно видеть, что нижняя грань в (1) всегда достигается для некоторого $h \in H(U, M)$.

Пусть всюду в дальнейшем D – полная гиперболическая область в $\mathbb{C}^n$, а N – эрмитово комплексное многообразие с эрмитовой метрикой ds_N^2 . Расстояние, связанное с метрикой ds_N^2 , будем обозначать через s_N , а через $ds_N(a, u)$ будем обозначать $\sqrt{ds_N^2(a, u)}$ – норму касательного вектора u к N в точке $a \in N$.

Предположим, что в точке $\xi \in \partial D$ существует внешняя нормаль ν_ξ . Обозначим

$$N_\xi = \{\xi - t\nu_\xi \in D : 0 < t \leq \delta\}.$$

Отметим, что N_ξ – множество точек из D , принадлежащих отрезку евклидовой длины δ , перпендикулярному к касательной плоскости к ∂D в точке ξ .

Будем говорить, что отображение $f: D \rightarrow N$ имеет в точке $\xi \in \partial D$ радиальный предел $l \in N$, если

$$\lim_{t \rightarrow 0} s_N(f(\xi - t\nu_\xi), l) = 0.$$

K -допустимой областью раствора $\beta > 0$ в точке $\xi \in \partial D$ (см. [5]) называется область

$$K_\beta(\xi) = \{z \in D : k_D(z, N_\xi) < \beta\}.$$

Здесь и далее $k_D(z, N_\xi) = \inf\{k_D(z, w), w \in N_\xi\}$.

Введем следующий вариант понятия K -предела: будем говорить, что отображение $f: D \rightarrow N$ имеет K -предел $l \in N$ в точке $\xi \in \partial D$, т.е.

$$(K - \lim f)(\xi) = l,$$

если для любого $\beta > 0$ и для любой последовательности точек $\{z_j\}$ из $K_\beta(\xi)$, сходящейся к ξ , $s_N(f(z_j), l) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$.

Чтобы установить связь между существованием радиального и K -пределов у произвольного отображения $f \in H(D, N)$ обозначим

$$Q_f(z) = \sup_{v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \left\{ \frac{ds_N(f(z), f_*(v))}{K_D(z, v)} \right\},$$

где $f_* = df$ – дифференциал отображения f в точке $z \in D$.

Пусть Y – относительно компактное комплексное подпространство эрмитового многообразия N . Символом $H(D, Y)$ будем обозначать подмножество $H(D, N)$ такое, что $f(D) \subset Y$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Y – относительно компактное комплексное подпространство эрмитова многообразия N с эрмитовой метрикой ds_N^2 , а D – полная гиперболическая область в $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, имеющая нормаль в точке $\xi \in \partial D$. Если отображение $f \in H(D, Y)$ имеет в точке ξ радиальный предел $l \in \overline{Y}$, то f в точке ξ имеет K -предел тогда и только тогда, когда

$$(K - \lim Q_f)(\xi) = 0. \quad (2)$$

Лехто и Виртанен [6] доказали теорему, согласно которой если мероморфная в единичном круге U функция f имеет в точке $1 \in \partial U$ радиальный предел, то f имеет в этой точке угловой предел тогда и только тогда, когда в каждом угле $|\arg(1 - z)| < \pi/2 - \delta$, где δ – любое положительное число, выполняется соотношение

$$|Q_f(z)| = O(1),$$

где $O(1)$ – ограниченная функция.

В случае многих комплексных переменных ограниченность функции $|Q_f(z)|$ даже на всей области определения отображения f не гарантирует существования K -предела у f в произвольной граничной точке, в которой у f существует радиальный предел.

В самом деле, функция $f(z) = (z_2)^2/(1 - z_1)$ ограничена и голоморфна в единичном шаре $B = \{z \in \mathbb{C}^2, |z| < 1\}$.

В случае единичного шара норма Кобаяси совпадает с нормой Каратеодори; отсюда и из определения нормы Каратеодори следует, что

$$|f_*(v)| \leq \sup\{|f(z)|, z \in B\} \cdot K_B(z, v)$$

для всех $z \in B$ и всех $v \in \mathbb{C}$, поэтому

$$|Q_f(z)| \leq \sup\{|f(z)|, z \in B\}.$$

Однако функция f имеет в точке $(1, 0) \in \partial B$ радиальный предел, равный нулю, и предел, равный единице, по точкам $(1 - 2^{-2m}, 2^{-m})$, заведомо принадлежащим множеству $K_{50}((1, 0))$. Следовательно, функция f не может иметь K -предела в точке $(1, 0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Предположим, что f имеет радиальный предел $l \in \overline{Y}$ в точке ξ и выполняется (2). Покажем, что тогда f имеет K -предел l в точке ξ . По определению K -предела для этого надо показать, что для любого фиксированного β и для любой последовательности $\{z_j\} \subset K_\beta(\xi)$ такой, что $z_j \rightarrow \xi$ при $j \rightarrow \infty$,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} s_N(f(z_j), l) = 0.$$

Фиксируем произвольное $\beta > 0$. Так как D – полная гиперболическая область, ее можно представить в виде

$$D = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j,$$

где

$$D_j = \{z \in D : k_D(z, z_0) \leq \beta \cdot j\}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

а z_0 – некоторая точка, принадлежащая $N_\xi \subset D$.

Пусть $\{z_j\}$ – произвольная последовательность точек из $K_\beta(\xi)$ такая, что $z_j \rightarrow \xi$ при $j \rightarrow \infty$, и пусть $\{w_j\}$ – такая последовательность точек из N_ξ , что $k_D(w_j, z_j) = k_D(z_j, N_\xi)$. Тогда из определения множества $K_\beta(\xi)$ следует, что $k_D(z_j, w_j) \leq \beta$.

Предположим, что $z_j \in D_{k_j+1} \setminus D_{k_j}$ для некоторого $k_j \in \mathbb{N}$. Так как D – полная гиперболическая область, то шары в метрике Кобаяси $\{z \in D: k_D(z_0, z) < \beta \cdot j\}$ компактно принадлежат D , и поскольку $z_j \rightarrow \xi$ при $j \rightarrow \infty$, то числа $k_j \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$.

Из неравенства треугольника для метрики Кобаяси получаем

$$k_D(w_j, z_0) \geq k_D(z_j, z_0) - k_D(z_j, w_j) > \beta \cdot (k_j - 1).$$

Следовательно, $w_j \in N_\xi \cup (D \setminus D_{k_j-1})$ и, значит, $w_j \rightarrow \xi$ при $j \rightarrow \infty$.

Так как выполняется (2), то величины

$$\epsilon_j = \sup\{Q_f(z): z \in K_\beta(\xi) \cap (D \setminus D_j)\}$$

существуют, конечны для каждого j и стремятся к нулю при $j \rightarrow \infty$. Поэтому

$$s_N(f(z_j), f(w_j)) \leq k_D(z_j, w_j) \cdot \epsilon_{k_j-1} \leq \beta \cdot \epsilon_{k_j-1}$$

и, значит,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} s_N(f(z_j), f(w_j)) = 0.$$

Из неравенства треугольника для метрики s_N получаем

$$s_N(l, f(z_j)) \leq s_N(f(w_j), l) + s_N(f(z_j), f(w_j)). \quad (3)$$

Первое слагаемое в правой части (3) может быть сделано сколь угодно малым, поскольку $\{w_j\} \subset N_\xi$, $w_j \rightarrow \xi$ при $j \rightarrow \infty$ и по условию f имеет радиальный предел l в точке ξ . Второе слагаемое в правой части (3) также может быть сделано сколь угодно малым, так как по доказанному выше $\lim_{j \rightarrow \infty} s_N(f(z_j), f(w_j)) = 0$. Поэтому из (3) следует, что $\lim_{j \rightarrow \infty} s_N(f(z_j), l) = 0$.

Докажем обратное утверждение. Предположим, что f имеет K -предел $l \in \bar{Y}$ в точке ξ ; надо показать, что выполняется неравенство (2). Если f имеет K -предел l в точке ξ , то нетрудно видеть, что для каждого ϵ существует $k_j \in \mathbb{N}$ такое, что

$$s_N(f(z), l) \leq \epsilon \quad (4)$$

для всех $z \in K_\beta(\xi) \cap (D \setminus D_{k_j})$.

Для того чтобы показать, что выполняется (2), надо показать, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} Q_f(z_j) = 0$$

для любого $\beta > 0$ и любой последовательности $\{z_j\} \subset K_{\beta/2}(\xi)$, сходящейся к ξ . Фиксируем произвольное $\beta > 0$ и произвольный вектор $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Выберем любую последовательность $\{z_j\} \subset K_{\beta/2}(\xi)$ такую, что $z_j \rightarrow \xi$ при $j \rightarrow \infty$. Так как D – полная гиперболическая область, для каждой точки z_j существует отображение $h_j \in H(U, D)$

такое, что $h_j(0) = z_j$ и $h'_j(0) = v/K_D(z_j, v)$. Поскольку h_j голоморфно отображает U в D , по свойству сжимаемости метрики Кобаяси для всех $\lambda \in U$

$$k_D(h_j(0), h_j(\lambda)) \leq k_U(0, \lambda), \quad (5)$$

а так как $h_j(0) = z_j \in K_{\beta/2}(\xi)$, по определению множества $K_{\beta/2}(\xi)$

$$k_D(z_j, N_\xi) = k_D(h_j(0), N_\xi) < \frac{\beta}{2}. \quad (6)$$

Из (5) и (6) и неравенства треугольника для метрики Кобаяси заключаем, что для всех $\lambda \in d_{\beta/2} = \{\lambda \in U : k_U(0, \lambda) < \beta/2\}$ имеют место следующие неравенства:

$$k_D(h_j(\lambda), N_\xi) \leq k_D(h_j(\lambda), z_j) + k_D(z_j, N_\xi) \leq \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} = \beta, \quad (7)$$

$$k_D(h_j(\lambda), z_0) \geq k_D(h_j(0), z_0) - k_D(h_j(0), h_j(\lambda)) \geq k_D(z_j, z_0) - \frac{\beta}{2}. \quad (8)$$

Из (7) следует, что для всех j имеет место включение

$$h_j(d_{\beta/2}) \subset K_\beta(\xi). \quad (9)$$

Предположим теперь, что $z_j \in D_{k_j+1} \setminus D_{k_j}$; тогда

$$\beta \cdot k_j \leq k_D(z_j, z_0) \leq \beta \cdot (k_j + 1)$$

и из (8) следует, что $k_D(h_j(\lambda), z_0) \geq \beta \cdot (k_j - 1/2) \geq \beta \cdot (k_j - 1)$, поэтому

$$h_j(d_{\beta/2}) \subset (D \setminus D_{k_j}). \quad (10)$$

Из (9) и (10) следует, что существует $J = J(k_j)$ такое, что $h_j(d_{\beta/2}) \subset K_\beta(\xi) \cap (D \setminus D_{k_j})$ для всех $j \geq J$. Отсюда и из (4) получаем, что

$$s_N(f(h_j(\lambda)), l) \leq \epsilon$$

для всех $\lambda \in d_{\beta/2}$, $j \geq J$. Отсюда следует, что семейство $\mathcal{F} = \{f \circ h_j, j \geq J\}$ равномерно непрерывно и, следовательно, нормально в $d_{\beta/2}$, так как $\overline{Y}$ компактно, и, значит, отображения $f \circ h_j$, $j \geq J$, сходятся равномерно на $d_{\beta/2}$ к постоянному отображению. Из одномерной теоремы Вейерштрасса следует, что $f'_j(0) \rightarrow 0$, поэтому

$$\lim_{j \rightarrow \infty} ds_N(f_j(0), f'_j(0)) = 0.$$

Так как $h'_j(0) = v/K_D(z_j, v)$, прямые вычисления показывают, что

$$ds_N(f_j(0), f'_j(0)) = \frac{ds_N(f(z_j), f_*(v))}{K_D(z_j, v)}.$$

Следовательно,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{ds_N(f(z_j), f_*(v))}{K_D(z_j, v)} = 0. \quad (11)$$

Поскольку последовательность $\{z_j\} \subset \mathcal{K}_{\beta/2}(\xi)$ и вектор $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ были выбраны произвольно, из (11) следует, что $\lim_{j \rightarrow \infty} Q_f(z_j) = 0$ для любой последовательности $\{z_j\} \subset K_{\beta/2}(\xi)$ такой, что $z_j \rightarrow \xi$ при $j \rightarrow \infty$. Отсюда в силу произвольности β заключаем, что отображение f имеет K -предел в точке ξ .

Теорема доказана.

Строго псевдовыпуклые области в $\mathbb{C}^n$ являются полными гиперболическими, а нормы Бергмана и Кобаяси таких областей имеют одинаковое граничное поведение (см. [7], [8]), поэтому в случае строго псевдовыпуклых областей теорема 1 есть в точности теорема 1 из [9].

В случае $N = \mathbb{C}$ понятие K -предела было впервые введено, по-видимому, А. Кораньи [10] в 1961 г., а различные варианты этого понятия использованы в принадлежащем Е. М. Чирке [11] обобщении на многомерной случай классической теоремы Линделёфа. Автор благодарит рецензента, указавшего ему на эти факты.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Royden H. L. Remarks on the Kobayashi metric // Lect. Notes in Math. 1971. V. 185. P. 125–137.
- [2] Kobayashi S. Invariant distances on complex manifolds and holomorphic mappings // J. Math. Soc. Japan. 1967. V. 19. № 4. P. 460–480.
- [3] Kerzman P., Rosay J.-P. Fonctions plurisubharmoniques d'éhaustion bornées et domaines taut // Math. Ann. 1981. V. 257. № 2. P. 171–184.
- [4] Kirnan P. On the relations between taut, tight and hyperbolic manifolds // Bull. Amer. Math. Soc. 1970. V. 76. P. 49–51.
- [5] Krantz S. G. Invariant metrics and the boundary behavior of holomorphic functions on domains in $\mathbb{C}^n$ // J. Geom. Anal. 1991. V. 1. № 2. P. 71–97.
- [6] Lehto O., Virtanen K. I. Boundary behaviour and normal meromorphic functions // Acta Math. 1957. V. 97. P. 47–65.
- [7] Fefferman C. The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains // Invent. Math. 1974. V. 26. P. 1–65.
- [8] Graham I. Boundary behavior of the Caratheodory and Kobayashi metrics on strongly pseudoconvex domains // Trans. Amer. Math. Soc. 1975. V. 207. P. 219–240.
- [9] Довбуш П. В. О существовании допустимых пределов функций многих комплексных переменных // Сиб. матем. ж. 1987. Т. 28. № 3. С. 373–377.
- [10] Koranyi A. Harmonic functions on Hermitian hyperbolic space // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 135. P. 507–516.
- [11] Чирка Е. М. Теоремы Линделёфа и Фату в $\mathbb{C}^n$ // Матем. сб. 1973. Т. 92. № 4. С. 622–644.

Институт математики и информатики
Академии наук Республики Молдова, г. Кишинев
E-mail: dovbusb@math.md

Поступило
14.03.2003
Исправленный вариант
08.07.2004