Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Вит. В. Волчков, Теоремы единственности для периодических в среднем функций на кватернионном гиперболическом пространстве, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 1, 32–40

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm251>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 10:31:37

УДК 517.5

ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ В СРЕДНЕМ ФУНКЦИЙ НА КВАТЕРНИОННОМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Вит. В. Волчков

Получены новые теоремы единственности для периодических в среднем функций на кватернионном гиперболическом пространстве.

Библиография: 22 названия.

Введение. Пусть $\mathbb{R}^n$ – вещественное евклидово пространство размерности n с евклидовой нормой $|\cdot|$, Ω – открытое выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$, T – ненулевое распределение в $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем $\text{supp } T$. Обозначим

$$\Omega_T = \{x \in \mathbb{R}^n : x + y \in \Omega \quad \text{при всех } y \in \text{supp } T\}.$$

Функция $f \in C^\infty(\Omega)$ называется *периодической в среднем* относительно T , если

$$(f * T)(x) = \langle T, f(x + y) \rangle = 0, \quad x \in \Omega_T, \quad (1)$$

где распределение T действует по переменной y . Например, если $\Omega = \mathcal{B}_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$, а T – нормированная поверхностная мера на $\partial \mathcal{B}_r$ ($0 < r < R$), условие (1) означает, что f имеет нулевые интегралы по всем сферам радиуса r , лежащим в $\mathcal{B}_R$. Как показал Йон, в этом случае функция $f \in C^\infty(\mathcal{B}_R)$ единственным образом определяется своими значениями в шаре $\mathcal{B}_r$ (см. [1], [2, гл. 6]). Подобное утверждение имеет место и для класса функций с нулевыми шаровыми средними. В [3] доказано, что гладкость функции f в условии теоремы уменьшить нельзя (см. также [1], [2], где рассмотрены случаи $n = 2, 3$). Результаты работ [3]–[10] существенно усиливают и обобщают теорему Йона в различных направлениях. Например, в работе [3] изучается зависимость между порядком гладкости функции из данного класса и множеством ненулевых коэффициентов в ее разложении в ряд Фурье по сферическим гармоникам. Дальнейшее развитие

Работа выполнена при частичной поддержке Фонда фундаментальных исследований Украины, проект № 01.07/00241

техники, предложенной в [3], позволило получить подобные результаты на вещественном и комплексном гиперболических пространствах (см. [9], [10]).

Теоремы единственности для указанных классов функций играют ключевую роль при решении многих задач, связанных с шаровыми и сферическими средними (см. [3]–[15]). В связи с этим большой интерес представляет получение аналогов теоремы Йона для периодических в среднем функций на некомпактных двухточечных однородных пространствах. В соответствии с их классификацией (см., например, [16, гл. 1, § 3, п. 3]) – это в точности евклидовы пространства, гиперболические пространства $H^n(\mathbb{R})$, $H^n(\mathbb{C})$, $H^n(\mathbb{Q})$ и гиперболическая плоскость Кэли $H^2(\text{Ca})$. В данной работе получено решение этой задачи для кватернионного гиперболического пространства $H^n(\mathbb{Q})$.

1. Формулировки основных результатов. Пусть $\mathbb{Q}^n$ – n -мерное левое кватернионное евклидово пространство со скалярным произведением

$$\langle a, b \rangle = \sum_{k=1}^n a_k \bar{b}_k,$$

где $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Q}^n$ и $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{Q}^n$ (см. [17, гл. 1]). Положим $a_k = \alpha_k + \alpha_{n+k}j$, $\alpha_k, \alpha_{n+k} \in \mathbb{C}$, $1 \leq k \leq n$, и отождествим $\mathbb{Q}^n$ с $2n$ -мерным комплексным пространством $\mathbb{C}^{2n}$ при помощи соответствия

$$(a_1, \dots, a_n) \rightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}).$$

Реализуем пространство $H^n(\mathbb{Q})$ в виде открытого единичного шара пространства $\mathbb{C}^{2n}$ [18].

Пусть $B^{4n} = \{a \in \mathbb{Q}^n : |a| < 1\} = \{z \in \mathbb{C}^{2n} : |z| < 1\}$. Матрица

$$q_{ik}(a) = \frac{(1 - |a|^2)\delta_{ik} + \bar{a}_i a_k}{(1 - |a|^2)^2}, \quad 1 \leq i, k \leq n \quad (2)$$

(δ_{ik} – символ Кронекера), является кватернионно-симметрической ($q_{ik} = \overline{q_{ki}}$) и индуцирует на B^{4n} структуру риманова многообразия. Расстояние между двумя точками $z, w \in B^{4n}$ в метрике (2) вычисляется по формуле

$$d(z, w) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{|1 - \langle w, z \rangle| + \sqrt{|w - z|^2 + |\langle w, z \rangle|^2 - |w|^2 |z|^2}}{|1 - \langle w, z \rangle| - \sqrt{|w - z|^2 + |\langle w, z \rangle|^2 - |w|^2 |z|^2}} \right).$$

Риманова мера на B^{4n} имеет вид $d\mu(z) = dm(z)/(1 - |z|^2)^{2n+2}$, где dm – мера Лебега в $\mathbb{C}^{2n}$. Пространство $H^n(\mathbb{Q})$ изометрично шару B^{4n} с метрикой (2) [18].

Пусть $B_R = \{z \in B^{4n} : d(0, z) < R\}$ – открытый геодезический шар радиуса $R > 0$. Обозначим $V_r(B_R)$ – множество функций $f \in L_{\text{loc}}(B_R)$, имеющих нулевые интегралы

(по мере μ) по всем замкнутым геодезическим шарам радиуса r , лежащим в B_R . Для целого неотрицательного l (или $l = \infty$) положим $V_r^l(B_R) = V_r(B_R) \cap C^l(B_R)$.

Далее, как обычно, пусть $\mathcal{D}'(\mathcal{M})$ – пространство распределений на гладком многообразии $\mathcal{M}$, $T_1 \times T_2$ – свертка двух распределений на $H^n(\mathbb{Q})$, одно из которых имеет компактный носитель. Пусть T – данное K -инвариантное распределение на $H^n(\mathbb{Q})$ с носителем $\overline{B_r} \subset B_R$. Рассмотрим уравнение свертки

$$(f \times T)(z) = 0, \quad z \in B_{R-r}, \quad (3)$$

где $f \in \mathcal{D}'(B_R)$. Множество функций $f \in C^\infty(B_R)$, удовлетворяющих (3), обозначим $\mathcal{E}_T(B_R)$. Для $f \in \mathcal{E}_T(B_R)$ имеем

$$(f \times T)(g0) = \langle T, f(gz) \rangle = 0 \quad \forall g \in G: g0 \in B_{R-r},$$

где G – группа изометрий пространства $H^n(\mathbb{Q})$. В случае, когда T совпадает с индикатором шара B_r , получаем $\mathcal{E}_T(B_R) = V_{r^\infty}(B_R)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть распределение $f \in \mathcal{D}'(B_R)$ является решением уравнения (3) и при некотором $\varepsilon > 0$ $f = 0$ в $B_{r+\varepsilon}$. Тогда $f = 0$ в B_R . Если $f \in C^\infty(B_R)$, данное утверждение верно и при $\varepsilon = 0$.

Следующий результат показывает, что условия на f в теореме 1 в общем случае ослабить нельзя.

ТЕОРЕМА 2. 1) Пусть $f \in V_r^\infty(B_R)$ и $f = 0$ в B_r . Тогда $f = 0$ в B_R .

2) Для любого целого $l \geq 0$ существует ненулевая функция $f \in V_r^l(B_R)$ такая, что $f = 0$ в B_r .

3) Для любого $\varepsilon \in (0, r)$ существует ненулевая функция $f \in V_r^\infty(B_R)$ и равная нулю в $B_{r-\varepsilon}$.

Как уже отмечалось, подобные факты на $\mathbb{R}^n$, $H^n(\mathbb{R})$ и $H^n(\mathbb{C})$ содержатся в работах [3], [9], [10]. В [9] получен также аналог теоремы 1 для K -инвариантных распределений f на симметрических пространствах $X = G/K$ ранга 1 некомпактного типа.

2. Обозначения и вспомогательные конструкции. Пусть L – оператор Лапласа–Бельтрами на $H^n(\mathbb{Q})$, $(\mathcal{L}f)(z) = (Lf)(z)/4(1 - |z|^2)$. Для целых $p, q \geq 0$, $0 \leq m \leq \min(p, q)$ положим $\mathcal{H}_{2n}(p, q, m) = \{f \in \mathcal{H}_{2n}(p, q): \mathcal{L}f = (m-1)(m-p-q)f\}$, где $\mathcal{H}_{2n}(p, q)$ – пространство однородных гармонических многочленов бистепени (p, q) в $\mathbb{C}^{2n}$. Далее будем отождествлять $\mathcal{H}_{2n}(p, q)$ с его сужением на единичную сферу S^{4n-1} . Пространство $L^2(S^{4n-1})$ является ортогональной прямой суммой пространств $\mathcal{H}_{2n}(p, q, m)$, $p, q \geq 0$, $0 \leq m \leq \min(p, q)$ [18]. Пусть ρ, σ – полярные координаты в $\mathbb{C}^{2n}$ ($\forall z \in \mathbb{C}^{2n}$ $\rho = |z|$, а если $z \neq 0$, то $\sigma = z/|z|$), $\{S_{p,q,m}^k\}$, $1 \leq k \leq N(n, p, q, m)$, – фиксированный ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}_{2n}(p, q, m)$. Всякой функции $f \in L_{\text{loc}}(B_R)$ соответствует ряд Фурье

$$f(z) \sim \sum_{p,q=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\min(p,q)} \sum_{k=1}^{N(n,p,q,m)} f_{p,q,m}^k(\rho) S_{p,q,m}^k(\sigma),$$

где

$$\rho \in (0, \text{th } R), \quad f_{p,q,m}^k(\rho) = \int_{S^{4n-1}} f(\rho\sigma) \overline{S_{p,q,m}^k(\sigma)} d\sigma.$$

Пусть $T_{p,q,m}(\tau)$ – сужение квазирегулярного представления компактной симплектической группы $Sp(n)$ на $\mathcal{H}_{2n}(p, q, m)$, $\{t_{ik}^{p,q,m}\}$, $1 \leq i, k \leq N(n, p, q, m)$, – матрица представления $T_{p,q,m}(\tau)$ в базисе $\{S_{p,q,m}^k\}$. Из свойств представлений $T_{p,q,m}(\tau)$ следует (см. [19], а также [3, доказательство формулы (6)]), что при всех $1 \leq i, k \leq N(n, p, q, m)$

$$N(n, p, q, m) \int_{Sp(n)} f(\tau^{-1}z) \overline{t_{ik}^{p,q,m}(\tau)} d\tau = \sum_{\substack{p_1+q_1=p+q \\ p_1, q_1 \geq m}} f_{p_1, q_1, m}^k(\rho) S_{p_1, q_1, m}^i(\sigma), \quad (4)$$

где $d\tau$ – нормированная мера Хаара на группе $Sp(n)$.

Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, $\nu = \nu(\lambda) = (2n + 1 - i\lambda)/2$. Обозначим

$$\Phi_{\lambda}^{s,m}(\rho) = \frac{\Gamma(\nu + s - m)\Gamma(2n)}{\Gamma(2n + s)\Gamma(\nu - m)} \rho^s (1 - \rho^2)^{\nu} F(\nu + s - m, \nu - 1 + m; 2n + s; \rho^2), \quad (5)$$

где F – гипергеометрическая функция, Γ – гамма-функция. Рассмотрим дифференциальные операторы $D_1(s, m)$, $D_2(s, m)$, действующие на функцию $\varphi \in C^1(0, \text{th } R)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} (D_1(s, m)\varphi)(\rho) &= \frac{(1 - \rho^2)^{2n+s+1-m}}{\rho^{4n+s-2}} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho^{4n+s-2}}{(1 - \rho^2)^{2n+s-m}} \varphi(\rho) \right), \\ (D_2(s, m)\varphi)(\rho) &= \frac{\rho^{(s-1)}}{(1 - \rho^2)^{s-m-2}} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{(1 - \rho^2)^{s-1-m}}{\rho^{s-1}} \varphi(\rho) \right). \end{aligned}$$

Из [20, гл. 2, § 2.8, формулы (25), (26)] имеем

$$(D_1(s + 1, m)\Phi_{\lambda}^{s+1,m})(\rho) = (2(n + s - m) + 1 - i\lambda)\Phi_{\lambda}^{s,m}(\rho), \quad (6)$$

$$(D_1(s + 1, s - m + 2)\Phi_{\lambda}^{s+1,m})(\rho) = (2n - 2m + 1 - i\lambda)\Phi_{\lambda}^{s,m-1}(\rho), \quad (7)$$

$$(D_2(s + 1, m)\Phi_{\lambda}^{s,m})(\rho) = -(2(n + s - m) + 1 + i\lambda)\Phi_{\lambda}^{s+1,m}(\rho). \quad (8)$$

Простые вычисления показывают, что если функция $f \in C^2(B_R)$ имеет вид $f(z) = \varphi(\rho)S_{p,q,m}^k(\sigma)$, то

$$((L + 4(2n + s - m)(m - s + 1))f)(z) = (D_2(s, m)D_1(s, m)\varphi)(\rho)S_{p,q,m}^k(\sigma). \quad (9)$$

Отсюда и из (6), (8) получаем

$$L(\Phi_{\lambda}^{p+q,m}(\rho)S_{p,q,m}^k(\sigma)) = -(\lambda^2 + (2n + 1)^2)\Phi_{\lambda}^{p+q,m}(\rho)S_{p,q,m}^k(\sigma). \quad (10)$$

Пусть $a \in B^{4n}$. Положим $s_a = (1 - |a|^2)^{1/2}$,

$$P(z, a) = \frac{\langle z, a \rangle}{|a|^2} a \quad (a \neq 0), \quad P(z, 0) \equiv 0, \quad Q(z, a) = z - P(z, a),$$

$$\varphi_a(z) = (1 - \langle z, a \rangle)^{-1} (a - P(z, a) - s_a Q(z, a)), \quad z \in B^{4n}.$$

Отображение φ_a обладает следующими свойствами:

$$\varphi_a(0) = a, \quad \varphi_a(a) = 0, \quad (11)$$

$$1 - \langle \varphi_a(z), \varphi_a(w) \rangle = (1 - \langle z, a \rangle)^{-1} (1 - \langle z, w \rangle) (1 - \langle a, w \rangle)^{-1} (1 - |a|^2), \quad (12)$$

и φ_a является инволюцией, т.е.

$$\varphi_a(\varphi_a(z)) \equiv z. \quad (13)$$

Доказательство свойств (11)–(13) аналогично доказательству теоремы 2.2.2 из [21].

Из равенства (12) находим

$$\langle \psi(z), \psi(w) \rangle = (1 - \langle b, a \rangle)^{-1} \langle z, w \rangle (1 - \langle b, a \rangle), \quad z, w \in \overline{B^{4n}},$$

где $a, b \in B^{4n}$, $\psi = \varphi_{\varphi_a(b)} \circ \varphi_a \circ \varphi_b$. Следовательно, ψ является сужением на $\overline{B^{4n}}$ элемента ортогональной группы $O(4n)$. Поскольку оператор Лапласа Δ в $\mathbb{C}^{2n}$ коммутирует с группой $O(4n)$ и $(Lf)(z) = \Delta(f \circ \varphi_z)(0)$, то L инвариантен относительно φ_a , т.е. (см. [16, гл. 2, § 2, предложение 2.4]) φ_a является изометрией пространства $H^n(\mathbb{Q})$.

3. Свойства функций класса $\mathcal{E}_T(B_R)$. Далее все функции, определенные и непрерывные в проколотой окрестности нуля в $\mathbb{C}^{2n}$, допускающие непрерывное продолжение в точку 0, считаются доопределенными в нуле по непрерывности.

ЛЕММА 1. Пусть $f \in \mathcal{E}_T(B_R)$. Тогда функция

$$F_{p,q,m}^{ki}(z) = \sum_{\substack{p_1+q_1=p+q \\ p_1, q_1 \geq m}} f_{p_1, q_1, m}^k(\rho) S_{p_1, q_1, m}^i(\sigma) \in \mathcal{E}_T(B_R)$$

при всех $p, q \geq 0$, $0 \leq m \leq \min(p, q)$, $1 \leq i$, $k \leq N(n, p, q, m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия $f \in C^\infty(B_R)$ и (4) следует, что $F_{p,q,m}^{ki} \in C^\infty(B_R)$. Далее, пусть $g \in G$, $g_0 \in B_{R-r}$. Поскольку для любого $\tau \in Sp(n)$ $\tau^{-1}g_0 \in B_{R-r}$, из (4) имеем

$$\begin{aligned} (F_{p,q,m}^{ki} \times T)(g_0) &= \langle T, F_{p,q,m}^{ki}(gz) \rangle \\ &= N(n, p, q, m) \int_{Sp(n)} \langle T, f(\tau^{-1}gz) \rangle \overline{t_{ik}^{p,q,m}(\tau)} d\tau = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $F_{p,q,m}^{ki} \in \mathcal{E}_T(B_R)$ и лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $f \in \mathcal{E}_T(B_R)$. Тогда при всех $1 \leq k \leq n$ функции

$$\frac{\partial f}{\partial z_k} - \sum_{i=1}^{2n} \overline{z_k z_i} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} + \sum_{i=1}^n z_{n+k} \left(\bar{z}_{n+i} \frac{\partial f}{\partial z_i} - \bar{z}_i \frac{\partial f}{\partial z_{n+i}} \right), \quad (14)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_{n+k}} - \sum_{i=1}^{2n} \bar{z}_{n+k} \bar{z}_i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} + \sum_{i=1}^n z_k \left(\bar{z}_i \frac{\partial f}{\partial z_{n+i}} - \bar{z}_{n+i} \frac{\partial f}{\partial z_i} \right), \quad (15)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} - \sum_{i=1}^{2n} z_k z_i \frac{\partial f}{\partial z_i} + \sum_{i=1}^n \bar{z}_{n+k} \left(z_{n+i} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} - z_i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_{n+i}} \right), \quad (16)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_{n+k}} - \sum_{i=1}^{2n} z_{n+k} z_i \frac{\partial f}{\partial z_i} + \sum_{i=1}^n \bar{z}_k \left(z_i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_{n+i}} - z_{n+i} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} \right), \quad (17)$$

принадлежат $\mathcal{E}_T(B_R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g \in G$, $g0 \in B_{R-r}$. Положим $a = (a_1, \dots, a_{2n})$, где $a_k = t \in \mathbb{R}^1$, $a_j = 0$, $j \neq k$. Поскольку при малых $|a|$ $(-\varphi_a)(g0) \in B_{R-r}$, из условия $f \in \mathcal{E}_T(B_R)$ следует

$$((f \circ (-\varphi_a)) \times T)(g0) = 0.$$

Дифференцируя это равенство по t и полагая $t = 0$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z_k} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial z_j} (z_{n+k} \bar{z}_{n+j} - z_k z_j) \right. \\ \left. + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} (\bar{z}_{n+k} z_{n+j} - \bar{z}_k \bar{z}_j) - \frac{\partial f}{\partial z_{n+j}} (z_{n+k} \bar{z}_j + z_k z_{n+j}) \right. \\ \left. - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_{n+j}} (\bar{z}_{n+k} z_j + \bar{z}_k \bar{z}_{n+j}) \right) \in \mathcal{E}_T(B_R). \end{aligned}$$

Аналогично, при $a_k = it$, $t \in \mathbb{R}^1$, $a_j = 0$, $j \neq k$ получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z_k} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial z_j} (z_k z_j + z_{n+k} \bar{z}_{n+j}) \right. \\ \left. - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} (\bar{z}_k \bar{z}_j + \bar{z}_{n+k} z_{n+j}) + \frac{\partial f}{\partial z_{n+j}} (z_k z_{n+j} - z_{n+k} \bar{z}_j) \right. \\ \left. + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_{n+j}} (\bar{z}_{n+k} z_j - \bar{z}_k \bar{z}_{n+j}) \right) \in \mathcal{E}_T(B_R), \end{aligned}$$

откуда следует утверждение леммы для функций (14), (16). Утверждения для функций (15), (17) доказываются аналогично.

Положим

$$Q(p, q, m)(z) = \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k z_{n+1}^{p-m+k} z_{n+2}^{m-k} \bar{z}_1^{q-k} \bar{z}_2^k,$$

где $C_m^k = m!/(k!(m-k)!)$. Нетрудно видеть, что многочлен $Q(p, q, m)$ принадлежит пространству $\mathcal{H}_{2n}(p, q, m)$. Всюду в дальнейшем будем считать, что $S_{p,q,m}^1 = \alpha_{p,q,m} Q(p, q, m)$, где $\alpha_{p,q,m} = \|Q(p, q, m)\|_2^{-1}$. Пусть также $N(n, s, m)$ – размерность пространств $\mathcal{H}_{2n}(p, q, m)$ при $p + q = s$.

ЛЕММА 3. Пусть

$$\sum_{\substack{p+q=\alpha+1 \\ p, q \geq m}} \varphi_{p,q}(\rho) S_{p,q,m}^k(\sigma) \in \mathcal{E}_T(B_R)$$

при некоторых $\alpha \geq 1$, $1 \leq m \leq [\frac{\alpha+1}{2}]$, $1 \leq k \leq N(n, \alpha+1, m)$. Тогда при любом $1 \leq i \leq N(n, \alpha, m-1)$ функция

$$\sum_{\substack{p+q=\alpha+1 \\ p, q \geq m}} \frac{\alpha_{p,q,m}}{\alpha_{p-1,q,m-1}} (D_1(\alpha+1, \alpha-m+2) \varphi_{p,q})(\rho) S_{p-1,q,m-1}^i(\sigma)$$

принадлежит $\mathcal{E}_T(B_R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\psi_{p,q}(\rho) = \varphi_{p,q}(\rho) / \rho^{\alpha+1}$,

$$R_{p,q}^1(z) = \bar{z}_{n+2} Q(p, q, m)(z) - \frac{\rho^2}{2n+p+q-1} \frac{\partial Q(p, q, m)}{\partial z_{n+2}},$$

$$R_{p,q}^2(z) = z_2 Q(p-1, q+1, m)(z) - \frac{\rho^2}{2n+p+q-1} \frac{\partial Q(p-1, q+1, m)}{\partial \bar{z}_2}.$$

В силу леммы 1

$$f(z) = \sum_{\substack{p+q=\alpha+1 \\ p, q \geq m}} \alpha_{p,q,m} \psi_{p,q}(\rho) Q(p, q, m)(z) \in \mathcal{E}_T(B_R).$$

По лемме 2 функция

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial z_{n+2}} - \sum_{i=1}^{2n} \frac{z_i z_{n+2}}{\partial \bar{z}_i} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} + \sum_{i=1}^n z_2 \left(\bar{z}_i \frac{\partial f}{\partial z_{n+i}} - \bar{z}_{n+i} \frac{\partial f}{\partial z_i} \right) \\ &= \frac{m}{2(2n+\alpha)} \sum_{\substack{p+q=\alpha+1 \\ p, q \geq m}} \frac{\alpha_{p,q,m}}{\alpha_{p-1,q,m-1}} (D_1(\alpha+1, \alpha-m+2) \varphi_{p,q})(\rho) S_{p-1,q,m-1}^1(\sigma) \\ &+ \sum_{\substack{p+q=\alpha+1 \\ p, q \geq m}} \alpha_{p,q,m} \left(\left(\frac{1-\rho^2}{2\rho} \psi_{p',q}(\rho) - q \psi_{p,q}(\rho) \right) R_{p,q}^1(z) \right. \\ &\quad \left. + (p-m) \psi_{p,q}(\rho) R_{p,q}^2(z) \right) \end{aligned} \quad (18)$$

принадлежит $\mathcal{E}_T(B_R)$. Поскольку

$$R_{p,q}^i(z) \in \sum_{m_1+m_2=p+q+1} \bigoplus \mathcal{H}_{2n}(m_1, m_2), \quad i = 1, 2$$

(см. [22, гл. 9, § 2, п. 3, формула (5)], а также [21, гл. 12, § 12.2, предложение 12.2.2]), из леммы 1 и (18) получаем утверждение леммы 3.

Аналогично доказывается

ЛЕММА 4. Пусть

$$\sum_{p+q=\alpha+1} \varphi_{p,q}(\rho) S_{p,q,0}^k(\sigma) \in \mathcal{E}_T(B_R)$$

при некоторых $\alpha \geq 0$, $1 \leq k \leq N(n, \alpha + 1, 0)$. Тогда при любом $1 \leq i \leq N(n, \alpha, 0)$ функции

$$\begin{aligned} & \sum_{p+q=\alpha+1} \frac{p\alpha_{p,q,0}}{\alpha_{p-1,q,0}} (D_1(\alpha+1, 0) \varphi_{p,q}(\rho)) S_{p-1,q,0}^i(\sigma), \\ & \sum_{p+q=\alpha+1} \frac{q\alpha_{p,q,0}}{\alpha_{p,q-1,0}} (D_1(\alpha+1, 0) \varphi_{p,q}(\rho)) S_{p,q-1,0}^i(\sigma) \end{aligned}$$

принадлежат $\mathcal{E}_T(B_R)$.

4. Доказательство основных результатов.

ЛЕММА 5. Пусть $\alpha \geq 0$ и при некоторых $0 \leq m \leq [\alpha/2]$, $1 \leq k \leq N(n, \alpha, m)$

$$\sum_{\substack{p+q=\alpha \\ p,q \geq m}} \varphi_{p,q}(\rho) S_{p,q,m}^k(\sigma) \in \mathcal{E}_T(B_R),$$

причем все $\varphi_{p,q}(\rho)$ равны нулю в B_r . Тогда все $\varphi_{p,q}(\rho)$ равны нулю в B_R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\alpha = 0$ утверждение леммы следует из теоремы 4 работы [9]. При $\alpha \geq 1$ утверждение получается индукцией по α с использованием лемм 3, 4.

Перейдем к ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ТЕОРЕМЫ 1. Пусть сначала $f \in \mathcal{E}_T(B_R)$ и $f = 0$ в B_r . Из лемм 1, 5 следует, что все коэффициенты Фурье функции f равны нулю в B_R , т.е. $f = 0$ в B_R . Общий случай сводится к рассмотренному стандартным приемом сглаживания (см. [16, гл. 1, § 2, п. 2, доказательство теоремы 2.6]). Таким образом, теорема 1 полностью доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Первое утверждение теоремы 2 является прямым следствием теоремы 1. Как и выше, утверждение 3) получается из утверждения 2) стандартным приемом сглаживания. Для доказательства утверждения 2) достаточно повторить рассуждения из доказательства леммы 15 работы [13] (см. (5)–(10)).

Автор благодарит профессора В. В. Волчкова за многочисленные полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] John F. Abhängigkeiten zwischen den Flächenintegralen einer stetigen Funktion // Math. Ann. 1935. V. 111. P. 541–559.
- [2] Йон Ф. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. М.: ИЛ, 1958.
- [3] Волчков В. В. Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 6. С. 15–34.
- [4] Волчков В. В. Новые теоремы о двух радиусах в теории гармонических функций // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 1. С. 182–194.

- [5] Волчков В. В. Теоремы единственности для кратных лакунарных тригонометрических рядов // Матем. заметки. 1992. Т. 51. № 6. С. 27–31.
- [6] Волчков В. В. Теоремы единственности для некоторых классов функций с нулевыми сферическими средними // Матем. заметки. 1997. Т. 62. № 1. С. 59–65.
- [7] Волчков В. В. Экстремальные варианты проблемы Помпейю // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 5. С. 671–680.
- [8] Волчков В. В. Теоремы о среднем для одного класса полиномов // Сиб. матем. ж. 1994. Т. 35. № 4. С. 737–745.
- [9] Волчков В. В. Проблемы типа Помпейю на многообразиях // Докл. АН Украины. 1993. Т. 11. № 9–12.
- [10] Волчков Вит. В. Уравнения свертки на комплексных гиперболических пространствах // Доп. НАН України. 2001. № 2. С. 11–14.
- [11] Волчков В. В. Теоремы о двух радиусах на пространствах постоянной кривизны // Докл. РАН. 1996. Т. 347. № 3. С. 300–302.
- [12] Волчков В. В. Решение проблемы носителя для некоторых классов функций // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 9. С. 13–30.
- [13] Волчков В. В. Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах на гиперболических пространствах // Изв. РАН. Сер. матем. 2001. Т. 65. № 2. С. 3–26.
- [14] Беренштейн К. А., Струппа Д. Комплексный анализ и уравнения в свертках // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фундамент. направления. Т. 54. М.: ВИНТИ, 1989. С. 5–111.
- [15] Zalcman L. A Bibliographic Survey of the Pompeiu Problem // Approximation by Solutions of Partial Differential Equations. 1992. P. 185–194.
- [16] Хелгасон С. Группы и геометрический анализ. М.: Мир, 1987.
- [17] Фоменко А. Т. Симплектическая геометрия. Методы и приложения. М.: Изд-во МГУ, 1988.
- [18] Волчков Вит. В., Волчкова Н. П. Обращение локального преобразования Помпейю на кватернионном гиперболическом пространстве // Докл. РАН. 2001. Т. 379. № 5. С. 587–590.
- [19] Волчков Вит. В. Реализация представлений симплектической группы $Sp(n)$ в пространствах однородных гармонических многочленов на единичной сфере в $\mathbb{C}^{2n}$ // International Conference Dedicated to M. A. Lavrentyev on the Occasion of the Centenary of his Birthday. Ukraine, Kiev. 31 October–3 November, 2000. Abstracts. С. 72–73.
- [20] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1965.
- [21] Рудин У. Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. М.: Мир, 1984.
- [22] Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. 2-е изд. М.: Наука, 1991.

Донецкий национальный университет, Украина
E-mail: volchkov@univ.donetsk.ua

Поступило
29.10.2001