Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Т. Фоменко, О метриках, возникающих на поверхностях постоянной средней кривизны, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 4, 617–622

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2510>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 16:26:00

УДК 513.74+514.75

О МЕТРИКАХ, ВОЗНИКАЮЩИХ НА ПОВЕРХНОСТЯХ ПОСТОЯННОЙ СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЫ

В. Т. Фоменко

В работе сформулированы необходимые и достаточные условия на риманову метрику, гарантирующие возможность ее погружения в трехмерное пространство постоянной кривизны в виде поверхности постоянной средней кривизны. Эта теорема является обобщением нескольких классических результатов, в частности, теоремы Риччи, которая дает описание метрик, возникающих на минимальных поверхностях в $\mathbb{R}^3$.

Библиография: 6 названий.

1. Если опустить замкнутый проволочный контур в мыльную воду, а затем аккуратно его извлечь оттуда, то на контуре останется мыльная пленка. Если подуть на пленку, то можно получить мыльный пузырь. В обоих случаях будем говорить, что мы имеем дело с мыльными пленками. Толщина мыльной пленки очень мала, и потому в окрестности каждой регулярной точки мыльную пленку можно рассматривать как ориентируемую двумерную поверхность S . Если P, p – давления, действующие на мыльную пленку соответственно с внешней и внутренней стороны пленки, то имеет место формула Лапласа $P - p = 2qH$, где H – средняя кривизна поверхности S , q – сила поверхностного натяжения пленки S , $q = \text{const}$. Для мыльных пленок, находящихся в равновесии, можно считать, что $P - p = \text{const}$, и потому $H = \text{const}$. Это означает, что мыльная пленка всегда представляет собой на регулярных частях поверхность постоянной средней кривизны $H = H_0$, $H_0 = \text{const}$. Если мыльная пленка натянута на замкнутый проволочный контур, то можно считать, что $P = p$, и потому $H \equiv 0$, т.е. мыльная пленка, натянута на замкнутый контур, представляет собой минимальную поверхность. Для мыльного пузыря, находящегося в равновесии, $P \neq p$, и потому $H \neq 0$. Следовательно, мыльный пузырь или его часть является поверхностью постоянной средней кривизны $H = H_0$, $H_0 = \text{const} \neq 0$.

Естественно, что пространственная форма мыльной пленки существенно зависит от формы контура, на который она натянута, или способа получения мыльного пузыря. В частности, меняя внешнюю форму контура, можно менять внешнюю форму мыльной пленки. При этом, вообще говоря, будет меняться и внутренняя геометрия пленки. Так как внутренняя геометрия поверхности определяется ее первой квадратичной формой ds^2 , естественно поставить вопрос: каким условиям должна удовлетворять двумерная метрика ds^2 , чтобы она являлась первой квадратичной формой мыльной пленки? Другими словами, каким условиям должна удовлетворять двумерная метрика ds^2 ,

чтобы ее можно было погрузить в евклидово пространство E^3 в виде поверхности постоянной средней кривизны $S(H_0)$, в частности, в виде минимальной поверхности?

Перечислим результаты, полученные ранее в этом направлении.

Пусть ds^2 – метрика класса C^4 , определенная на плоскости. Говорят, что метрика ds^2 удовлетворяет условию Риччи, если кривизна K_s этой метрики отрицательна: $K_s < 0$, и если новая метрика $d\sigma^2 = \sqrt{-K_s} ds^2$ является плоской, т.е. если кривизна K_σ метрики $d\sigma^2$ тождественно равна нулю: $K_\sigma \equiv 0$. Риччи первым обнаружил, что каждая метрика ds^2 , удовлетворяющая этому условию, может быть реализована в E^3 в виде минимальной поверхности [1, с. 124]. Верно и обратное утверждение: каждая метрика ds^2 минимальной поверхности отрицательной гауссовой кривизны в E^3 удовлетворяет условию Риччи. Для поверхностей постоянной средней кривизны $H = H_0$, $H_0 = \text{const}$, имеет место аналогичное утверждение, отмеченное без доказательства Ю. А. Аминовым [2, с. 33]: если ds^2 – метрика поверхности постоянной средней кривизны H_0 в E^3 , то метрика $d\sigma^2 = \sqrt{H_0^2 - K_s} ds^2$ является плоской. М. Пинл показал, что в E^4 существуют минимальные поверхности, на которых условие Риччи не выполняется [3]. В тоже время Н. В. Лоусон [4] (см. также [5]) доказал следующий результат: если кривизна K_s метрики ds^2 класса C^4 , определенной на плоскости, удовлетворяет условию $K_s < 1/r^2$ для некоторой константы $r > 0$, и если метрика $d\sigma^2 = \sqrt{1/r^2 - K_s} ds^2$ является плоской, то метрика ds^2 может быть реализована в виде непрерывного однопараметрического семейства минимальных поверхностей в евклидовой сфере $S^3(r)$ кривизны $1/r^2$.

Аналогом условия Риччи может служить следующее условие, которое мы называем условием Нордена. Пусть ds^2 – метрика класса C^4 , определенная на плоскости. Будем говорить, что метрика ds^2 удовлетворяет условию Нордена, если кривизна метрики отрицательна: $K_s < 0$, и если кривизна K_τ новой метрики $d\tau^2 = -K_s ds^2$ тождественно равна единице: $K_\tau \equiv +1$. А. П. Норден доказал [6, с. 237], что в евклидовом пространстве E^3 всякая поверхность класса C^4 с метрикой, удовлетворяющей условию Нордена, локально наложима на минимальную поверхность.

В настоящей работе приводится условие, обобщающее условия Риччи, Нордена и Лоусона, необходимые и достаточные для того, чтобы двумерная метрика ds^2 класса C^4 , заданная в односвязной плоской области, допускала изометрическое погружение в трехмерное риманово пространство $R^3(c_0)$ постоянной кривизны c_0 , $c_0 = \text{const}$, в виде поверхности постоянной средней кривизны $H = H_0$, $H_0 = \text{const}$.

2. Пусть $R^3(c_0)$ – трехмерное риманово пространство постоянной кривизны c_0 , $c_0 = \text{const}$, H_0 , α , $\alpha \neq 0$, – заданные действительные числа. Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Двумерная метрика ds^2 класса C^4 , заданная в односвязной плоской области, допускает изометрическое погружение в пространство $R^3(c_0)$ в виде поверхности постоянной средней кривизны H_0 , не содержащей омбилических точек, тогда и только тогда, когда кривизна K_s удовлетворяет условию $K_s < H_0^2 + c_0$, а кривизна K_{τ_α} новой метрики $d\tau_\alpha^2 = (-K_s + H_0^2 + c_0)^\alpha ds^2$ вычисляется по формуле

$$K_{\tau_\alpha} = \frac{(1 - 2\alpha)K_s}{(-K_s + H_0^2 + c_0)^\alpha}.$$

При этом изометрическое погружение метрики ds^2 в $R^3(c_0)$ осуществляется с точностью до движения в виде непрерывно зависящего от параметра t , $t \in [0, 2\pi)$, однопараметрического семейства $\{S_t(H_0)\}$ поверхностей $S_t(H_0)$ постоянной средней кривизны H_0 , попарно не конгруэнтных друг другу при различных значениях параметра t .

Отметим, что в случае $\alpha = 1/2$, $H_0 = 0$, $c_0 = 0$ утверждение теоремы совпадает с результатом Риччи, в случае $\alpha = 1$, $H_0 = 0$, $c_0 = 0$ – с результатом Нордена, в случае $\alpha = 1/2$, $H_0 = 0$, $c_0 = 1/r^2$ – с результатом Лоусона, а при $\alpha = 1/2$, $H_0 \neq 0$, $c_0 = 0$ получаем утверждение, отмеченное Аминовым.

Ниже мы формулируем частные случаи этой теоремы.

ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА РИЧЧИ. Пусть H_0 , c_0 – заданные числа. Для того, чтобы метрика ds^2 класса C^4 кривизны K_s , $K_s < H_0^2 + c_0$, заданная в односвязной плоской области, допускала изометрическое погружение в пространство $R^3(c_0)$ в виде поверхности постоянной средней кривизны H_0 без омбилических точек, необходимо и достаточно, чтобы метрика $d\sigma^2 = \sqrt{-K_s + H_0^2 + c_0} ds^2$ была плоской, т.е. чтобы кривизна K_σ метрики $d\sigma^2$ тождественно равнялась нулю: $K_\sigma \equiv 0$.

ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА НОРДЕНА. Для того, чтобы метрика ds^2 класса C^4 отрицательной кривизны $K_s < 0$, заданная в односвязной плоской области, допускала изометрическое погружение в пространство $R^3(c_0)$ неположительной кривизны $c_0 \leq 0$ в виде поверхности постоянной средней кривизны $H = \sqrt{-c_0}$ без омбилических точек, необходимо и достаточно, чтобы кривизна K_τ метрики $d\tau^2 = (-K_s) ds^2$ была тождественно равна единице: $K_\tau \equiv +1$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Необходимость. Пусть поверхность $S(H_0)$ постоянной средней кривизны $H = H_0$ отнесена к линиям кривизны (x, y) . Так как поверхность $S(H_0)$ не содержит омбилических точек, то кривизна K_s метрики поверхности удовлетворяет условию $K_s < H_0^2 + c_0$. Основные квадратичные формы поверхности $S(H_0)$ в линиях кривизны имеют вид

$$ds^2 = g_{11} dx^2 + g_{22} dy^2, \quad II = b_{11} dx^2 + b_{22} dy^2.$$

Обозначим через k_1 , k_2 – главные кривизны поверхности $S(H_0)$. Тогда имеют место формулы

$$k_1 = \frac{b_{11}}{g_{11}}, \quad k_2 = \frac{b_{22}}{g_{22}}, \quad H_0 = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad K = k_1 k_2,$$

где K – гауссова кривизна поверхности $S(H_0)$, $K = K_s - c_0$. Обозначим через G_{ij} коэффициенты квадратичной формы $d\tau_\alpha^2 = (-K_s + H_0^2 + c_0)^\alpha ds^2$. Тогда имеем

$$G_{11} = (H_0 - k_1)^{2\alpha} g_{11}, \quad G_{12} = 0, \quad G_{22} = (H_0 - k_2)^{2\alpha} g_{22}.$$

Подсчитаем кривизну K_{τ_α} метрической формы $d\tau_\alpha^2$, используя формулу

$$K_{\tau_\alpha} = -\frac{1}{2\sqrt{G_{11}G_{22}}} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\sqrt{G_{11}G_{22}}} \frac{\partial}{\partial y} G_{11} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{G_{11}G_{22}}} \frac{\partial}{\partial x} G_{22} \right) \right\}.$$

Воспользуемся уравнениями Кодаши, записанными в виде

$$\frac{\partial k_1}{\partial y} = \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial y} (k_2 - k_1), \quad \frac{\partial k_2}{\partial x} = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x} (k_1 - k_2).$$

Имеем

$$K_{\tau_\alpha} = -\frac{1}{2\sqrt{G_{11}G_{22}}} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \frac{2\alpha(H_0 - k_1)^{2\alpha-1}g_{11}(-\frac{\partial k_1}{\partial y}) + \frac{\partial g_{11}}{\partial y}(H_0 - k_1)^{2\alpha}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}(H_0 - k_2)^{2\alpha}} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{2\alpha(H_0 - k_2)^{2\alpha-1}g_{22}(-\frac{\partial k_2}{\partial x}) + \frac{\partial g_{22}}{\partial x}(H_0 - k_2)^{2\alpha}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}(H_0 - k_1)^{2\alpha}} \right\}.$$

Так как $H_0^2 - K = ((k_1 - k_2)/2)^2$, $K = K_s - c_0$, последнее соотношение принимает вид

$$K_{\tau_\alpha} = -\frac{(1-2\alpha)}{(-K_s + H_0^2 + c_0)^\alpha \sqrt{g_{11}g_{22}}} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \frac{\partial g_{11}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x} \right) \right\} \\ = \frac{(1-2\alpha)K_s}{(-K_s + H_0^2 + c_0)^\alpha},$$

что и требовалось доказать.

Достаточность. Зададим метрику ds^2 в изотермических координатах (x, y) . Тогда $ds^2 = E(x, y)(dx^2 + dy^2)$, $(x, y) \in D$, где D – некоторая односвязная область параметрической плоскости. Для того, чтобы доказать возможность погружения метрики ds^2 в пространство $R^3(c_0)$, докажем разрешимость системы уравнений Гаусса–Кодаши, которая в изотермических координатах имеет вид

$$b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = (K_s - c_0)E^2, \quad K_s = -\frac{1}{2E}\Delta \ln E, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (1)$$

$$(b_{11} - EH_0)_y - (b_{12})_x = 0, \quad (b_{22} - EH_0)_x - (b_{12})_y = 0. \quad (2)$$

Здесь b_{11} , b_{12} , b_{22} – искомые функции, которые в дальнейшем будут служить коэффициентами второй квадратичной формы погружения метрики ds^2 в $R^3(c_0)$ в виде поверхности постоянной средней кривизны H_0 . В связи с этим коэффициенты b_{ij} связаны также соотношением

$$b_{11} + b_{22} = 2H_0E. \quad (3)$$

Полагая $b_{11} = \Lambda_0 + H_0E$, $b_{12} = M_0$, $b_{22} = -\Lambda_0 + H_0E$, из уравнений (2), (3) находим, что функция $\Phi(z) = M_0 + i\Lambda_0$, $z = x + iy$, $i^2 = -1$, является аналитической функцией комплексного переменного z в области D . В силу уравнения Гаусса (1) функция $\Phi(z)$ удовлетворяет условию

$$|\Phi(z)|^2 = M_0^2 + \Lambda_0^2 = E^2(-K_s + H_0^2 + c_0). \quad (4)$$

Так как правая часть этого соотношения есть известная функция, она может служить квадратом модуля аналитической функции. Другими словами, нужно убедиться

в том, что $\ln(E^2(-K_s + H_0^2 + c_0))$ есть гармоническая функция при сделанных в теореме предположениях. Посчитаем $\Delta \ln(E^2(-K_s + H_0^2 + c_0))$. Имеем в силу формулы $K_s = -\frac{1}{2E} \Delta \ln E$ соотношение

$$\begin{aligned} \Delta \ln(E^2(-K_s + H_0^2 + c_0)) &= 2\Delta \ln E + \Delta \ln(-K_s + H_0^2 + c_0) \\ &= -4EK_s + \Delta \ln(-K_s + H_0^2 + c_0). \end{aligned}$$

Подсчитаем кривизну K_{τ_α} метрики $d\tau_\alpha^2 = (-K_s + H_0^2 + c_0)^\alpha ds^2$ в изотермических координатах. Имеем

$$\begin{aligned} K_{\tau_\alpha} &= -\frac{1}{2(-K_s + H_0^2 + c_0)^\alpha E} \Delta \ln((-K_s + H_0^2 + c_0)^\alpha E) \\ &= -\frac{\alpha \Delta \ln(-K_s + H_0^2 + c_0) + \Delta \ln E}{2(-K_s + H_0^2 + c_0)^\alpha E}. \end{aligned}$$

Так как по условию теоремы

$$K_{\tau_\alpha} = \frac{K_s(1 - 2\alpha)}{(-K_s + H_0^2 + c_0)^\alpha},$$

отсюда находим $\alpha(\Delta \ln(-K_s + H_0^2 + c_0) - 4EK_s) = 0$. Так как $\alpha \neq 0$, то $\Delta \ln(-K_s + H_0^2 + c_0) = 4EK_s$ и потому функция $\ln E^2(-K_s + H_0^2 + c_0)$ является гармонической. Это означает, что уравнение Гаусса (4) будет удовлетворено, если функцию $|\Phi(z)|$ выбрать по формуле $|\Phi(z)| = E\sqrt{-K_s + H_0^2 + c_0}$, $z \in D$. Зная $|\Phi(z)|$, найдем $\Phi(z) = |\Phi(z)| \times \exp(i \arg \Phi(z))$, где

$$\arg \Phi(z) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} [-(\ln |\Phi(z)|)_y dx + (\ln |\Phi(z)|)_x dy] + t,$$

(x_0, y_0) – некоторая фиксированная точка области D , $z = x + iy$, t – вещественный параметр, $t \in [0, 2\pi)$; интегрирование ведется по любому пути, соединяющему точку (x_0, y_0) с точкой (x, y) . В силу односвязности области D криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования и потому существует. Зная функцию $\Phi(z)$, однозначно находим коэффициенты b_{ij} по формулам

$$b_{11} = \operatorname{Im} \Phi(z) + H_0 E, \quad b_{12} = \operatorname{Re} \Phi(z), \quad b_{22} = -\operatorname{Im} \Phi(z) + H_0 E, \quad z \in D. \quad (5)$$

Коэффициенты b_{ij} , определенные формулами (5), непрерывно зависят от параметра t , причем для различных значений t из промежутка $[0, 2\pi)$ значения b_{ij} различны. Кроме того, для любых значений t , $t \in [0, 2\pi)$, коэффициенты b_{ij} , определенные формулами (5), удовлетворяют условию (3). Это означает, что для любого фиксированного значения параметра t , $t \in [0, 2\pi)$, квадратичные формы

$$ds^2 = E(dx^2 + dy^2), \quad II = b_{11} dx^2 + 2b_{12} dx dy + b_{22} dy^2, \quad (x, y) \in D,$$

определяют в пространстве $R^3(c_0)$ с точностью до движения единственную поверхность $S_t(H_0)$ постоянной средней кривизны $H = H_0 = \operatorname{const}$. Полученное семейство $\{S_t(H_0)\}$, $t \in [0, 2\pi)$, поверхностей $S_t(H_0)$ непрерывно зависит от параметра t и исчерпывает все возможные реализации метрики ds^2 в $R^3(c_0)$ в виде поверхностей постоянной средней кривизны $H = H_0 = \operatorname{const}$. Теорема доказана.

ПРИМЕР. Метрика минимальной без точек уплощения поверхности отрицательной кривизны в E^3 , заданная в односвязной области, допускает изометрическое погружение в пространство $R^3(c_0)$, $c_0 < 0$, в виде однопараметрического семейства, непрерывно зависящего от параметра, поверхностей постоянной средней кривизны $H = \sqrt{|c_0|}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Blaschke W. Einführung in die Differentialgeometrie. Berlin: Springer, 1950.
- [2] Аминов Ю. А. Минимальные поверхности. Харьков: Изд-во ХГУ, 1978.
- [3] Pinl M. Über einen Satz von G. Ricci–Curbastro und die Gaussche Krümmung der Minimalflächen // Arch. Math. 1953. V. 4. P. 369–373.
- [4] Lawson H. B. Jr. Some intrinsic characterizations of minimal surfaces // J. Anal. Math. 1971. V. 24. P. 151–161.
- [5] Lawson H. B. Jr. Minimal Varieties in Constant Curvature Manifolds. Ph. D. Thesis. Stanford: Stanford University, 1968.
- [6] Норден А. П. Теория поверхностей. М.: ГИТТЛ, 1956.

Таганрогский государственный педагогический институт
E-mail: fomenko@tgpi.ttn.ru

Поступило
23.04.2003