Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Г. Хессами Пилеруд, Х. Хессами Пилеруд, Оценки снизу линейных форм от значений полилогарифмов, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 4, 623–629

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2511>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 09:59:16

УДК 511.36

ОЦЕНКИ СНИЗУ ЛИНЕЙНЫХ ФОРМ ОТ ЗНАЧЕНИЙ ПОЛИЛОГАРИФМОВ

Т. Хессами Пилеруд, Х. Хессами Пилеруд

В работе с помощью аппроксимаций Эрмита–Паде второго рода получена оценка снизу для модуля линейной формы с целыми коэффициентами от значений полилогарифмических функций в рациональной точке. Эта оценка учитывает рост всех коэффициентов линейной формы.

Библиография: 15 названий.

Рассмотрим полилогарифмические функции

$$L_k(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{\nu^k}, \quad k \geq 1, \quad |z| < 1. \quad (1)$$

В данной работе с помощью приближений Эрмита–Паде второго рода получена оценка снизу для модуля линейной формы с целыми коэффициентами от значений функций (1) в рациональной точке, зависящая от всех коэффициентов формы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $b \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{N}$, $a^{m+1}e^{m^2+m \ln m} < |b|$. Тогда существует постоянная $c = c(a, b, m) > 0$ такая, что для любых целых чисел $x_0, x_1, \dots, x_m$, в совокупности отличных от нуля, и $\bar{x}_k \geq \max(1, |x_k|)$, $k = 1, \dots, m$, удовлетворяющих условию $\bar{x}_1 \geq \bar{x}_2 \geq \dots \geq \bar{x}_m$, справедливо неравенство

$$\left| x_0 + \sum_{k=1}^m x_k L_k \left(\frac{a}{b} \right) \right| > c \cdot (\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_m)^{-1} \cdot \bar{x}_1^{-\delta},$$
$$\delta = \frac{m^3 + m^2 \ln m + m^2 + m(m+2) \ln 2 + m(m+1) \ln a}{\ln |b| - (m+1) \ln a - m^2 - m \ln m}. \quad (2)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $b \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$,

$$|b|^{\varepsilon/(m+\varepsilon)} > a^{m+1} e^{m^2+m \ln m + 4m}.$$

Работа выполнена при частичной поддержке Института исследований по теоретической физике и математике (Иран), гранты № 83110020 (первый автор) и № 83110021 (второй автор).

Тогда для любого ненулевого набора целых чисел $x_0, x_1, \dots, x_m$ и чисел $\bar{x}_k \geq \max(1, |x_k|)$, $k = 1, \dots, m$, удовлетворяющих условиям $\bar{x}_1 \geq \bar{x}_2 \geq \dots \geq \bar{x}_m$, $\bar{x}_1 \geq X_0 = X_0(a, b, m) > 0$, справедливо неравенство

$$\left| x_0 + \sum_{k=1}^m x_k L_k \left(\frac{a}{b} \right) \right| > (\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_m)^{-1} \cdot \bar{x}_1^{-\varepsilon}.$$

Принцип Дирихле показывает, что уточнение последнего неравенства возможно лишь за счет величины ε .

Подробную историю постановки задачи можно найти в [1, гл. 5, § 6]. Отметим также, что первая оценка линейной формы, зависящая от всех коэффициентов, для чисел e^{α_i} , $\alpha_i \in \mathbb{Q}$, $i = 1, \dots, m$, была получена А. Бейкером в [2]. Оценки линейных форм, зависящие от всех коэффициентов, для значений некоторых конкретных гипергеометрических E -функций были получены в работах [3]–[5], а для произвольного набора E -функций, составляющих решение системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка и удовлетворяющих некоторым дополнительным ограничениям, – в работе [6].

Для значений G -функций оценки подобного типа были доказаны лишь для некоторых совокупностей функций [7]–[11]. Теорема 1 уточняет результат работы [10]. Этого удается достичь за счет применения конструкции приближений Эрмита–Паде второго рода к полилогарифмическим функциям, а не первого как в работе [10]. Заметим, что диагональные аппроксимации Эрмита–Паде второго рода для полилогарифмов применялись в работах [12]–[14] для получения результатов об иррациональности значений функций (1) и оценок снизу соответствующих линейных форм, зависящих от максимума модуля коэффициентов формы. Функциональные свойства матричных аппроксимаций Эрмита–Паде полилогарифмов изучались в [15].

Перейдем к доказательству теоремы.

1. Построение приближающих форм. Пусть $n_1, \dots, n_m$ – натуральные числа, $n_1 \geq \dots \geq n_m$, $N = \sum_{k=1}^m n_k$, $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m)$.

Положим

$$R_{\mathbf{n}}(\nu) = \frac{(-1)^N \cdot N!}{n_1! \cdots n_m!} \cdot \frac{(\nu - n_1)_{n_1} (\nu - n_2)_{n_2} \cdots (\nu - n_m)_{n_m}}{\nu(\nu + 1) \cdots (\nu + N)}, \quad (3)$$

где $(\nu)_0 = 1$ и $(\nu)_k = \nu(\nu + 1) \cdots (\nu + k - 1)$ при $k \geq 1$.

Для $\mu = 1, 2, \dots, m$ рассмотрим функции

$$E_{\mathbf{n}, \mu}(z) = \frac{(-1)^{\mu-1}}{(\mu - 1)!} \sum_{\nu=1}^{\infty} R_{\mathbf{n}}^{(\mu-1)}(\nu) z^{-\nu}. \quad (4)$$

Так как $R_{\mathbf{n}}(\nu) = O(1/\nu)$ при $\nu \rightarrow \infty$, ряды в (4) абсолютно сходятся при $z \in \mathbb{C}$, $|z| > 1$. Пусть $D_N = \text{НОК}(1, 2, \dots, N)$.

ЛЕММА 1. Для $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^m$, $\mu = 1, 2, \dots, m$ и $|z| > 1$ справедливо равенство

$$E_{\mathbf{n}, \mu}(z) = Q_{\mathbf{n}}(z) \cdot L_{\mu} \left(\frac{1}{z} \right) - P_{\mathbf{n}, \mu}(z), \quad (5)$$

где

$$Q_{\mathbf{n}}(z) \in \mathbb{Z}[z], \quad D_N^{\mu} P_{\mathbf{n}, \mu}(z) \in \mathbb{Z}[z], \quad \deg Q_{\mathbf{n}}(z) = N, \quad \deg P_{\mathbf{n}, \mu}(z) \leq N - 1$$

и

$$\text{ord}_{z=\infty} E_{\mathbf{n}, \mu}(z) \geq n_{\mu} + 1. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Раскладывая $R_{\mathbf{n}}(\nu)$ в сумму простейших дробей, получим

$$R_{\mathbf{n}}(\nu) = \sum_{k=0}^N \frac{\omega_{\mathbf{n},k}}{\nu+k},$$

где

$$\omega_{\mathbf{n},k} = R_{\mathbf{n}}(\nu)(\nu+k)|_{\nu=-k} = (-1)^k \binom{N}{k} \prod_{j=1}^m \binom{k+n_j}{n_j} \in \mathbb{Z}. \quad (7)$$

Тогда согласно (4) имеем

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{n},\mu}(z) &= \sum_{k=0}^N \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\omega_{\mathbf{n},k}}{(\nu+k)^{\mu}} z^{-\nu} = \sum_{k=0}^N \omega_{\mathbf{n},k} z^k \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^{-(\nu+k)}}{(\nu+k)^{\mu}} \\ &= Q_{\mathbf{n}}(z) \cdot L_{\mu}\left(\frac{1}{z}\right) - P_{\mathbf{n},\mu}(z), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Q_{\mathbf{n}}(z) &= \sum_{k=0}^N \omega_{\mathbf{n},k} z^k \in \mathbb{Z}[z], \quad P_{\mathbf{n},\mu}(z) = \sum_{k=0}^N \sum_{l=1}^k \frac{\omega_{\mathbf{n},k}}{l^{\mu}} z^{k-l} \in \mathbb{Q}[z], \\ \deg Q_{\mathbf{n}}(z) &= N, \quad \deg P_{\mathbf{n},\mu}(z) \leq N-1. \end{aligned} \quad (8)$$

Ввиду справедливости включений (7) и

$$D_N^{\mu} \cdot \sum_{l=1}^k \frac{1}{l^{\mu}} \in \mathbb{Z}, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

заключаем, что $D_N^{\mu} \cdot P_{\mathbf{n},\mu} \in \mathbb{Z}[z]$.

Неравенство (6) следует из (4) и (3), и лемма доказана.

ЛЕММА 2. При $|z| > 1$ справедливо неравенство

$$|Q_{\mathbf{n}}(z)| < (N+1) \cdot 2^{(m+2)N} |z|^N.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как согласно (7) и (8)

$$Q_{\mathbf{n}}(z) = \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{N}{k} \binom{k+n_1}{n_1} \dots \binom{k+n_m}{n_m} z^k, \quad (9)$$

требуемая оценка следует из неравенства $\binom{n}{k} \leq 2^n$ для всех $k = 0, 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$.

ЛЕММА 3. При $|z| > 1$ и всех $\mu = 1, 2, \dots, m$ имеет место неравенство

$$|E_{\mathbf{n},\mu}(z)| \leq \frac{2^{\mu} \cdot m^N \cdot |z|^{-n_{\mu}}}{|z| - 1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (4) и (6) получаем, что

$$|E_{\mathbf{n},\mu}(z)| \leq \frac{1}{(\mu-1)!} \sum_{\nu=n_{\mu}+1}^{\infty} |R_{\mathbf{n}}^{(\mu-1)}(\nu)| \cdot |z|^{-\nu}, \quad (10)$$

где

$$R_{\mathbf{n}}^{(\mu-1)}(\nu) = \frac{(\mu-1)!}{2\pi i} \oint_{|\xi-\nu|=1/2} \frac{R_{\mathbf{n}}(\xi)}{(\xi-\nu)^{\mu}} d\xi. \quad (11)$$

Для всех целых k и комплексных $\xi = \nu + e^{i\varphi}/2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $\nu \in \mathbb{N}$, находим $|\xi + k|^2 = (\nu + k)^2 + (\nu + k) \cos \varphi + 1/4$, откуда следует, что

$$|\nu + k| - \frac{1}{2} \leq |\xi + k| \leq |\nu + k| + \frac{1}{2}. \quad (12)$$

Тогда для $\nu > 1$ и $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$|(\xi - n)_n| \leq |\xi - 1| \cdot (|\xi - 1| + 1) \cdots (|\xi - 1| + n - 1) \leq \left(\nu - \frac{1}{2}\right)_n. \quad (13)$$

Далее, учитывая (3), (12) и (13), получим, что на контуре интегрирования

$$|R_{\mathbf{n}}(\xi)| \leq \frac{N!}{n_1! \cdots n_m!} \cdot \frac{(\nu - 1/2)_{n_1} (\nu - 1/2)_{n_2} \cdots (\nu - 1/2)_{n_m}}{(\nu - 1/2)(\nu + 1/2) \cdots (\nu + N - 1/2)}.$$

Представим произведение, стоящее в знаменателе последней дроби, в следующем виде:

$$\left(\nu - \frac{1}{2}\right) \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \cdots \left(\nu + N - \frac{3}{2}\right) = \left(\nu - \frac{1}{2}\right)_{n_1} \cdots \left(\nu - \frac{1}{2} + n_1 + \cdots + n_{m-1}\right)_{n_m}.$$

Тогда

$$|R_{\mathbf{n}}(\xi)| \leq \frac{N!}{n_1! \cdots n_m!} \cdot \frac{1}{\nu + N - 1/2} \leq \frac{m^N}{\nu + N - 1/2}.$$

Учитывая (11), окончательно получаем

$$|R_{\mathbf{n}}^{(\mu-1)}(\nu)| \leq \frac{(\mu-1)! \cdot 2^{\mu-1} \cdot m^N}{\nu + N - 1/2} \leq \frac{(\mu-1)! \cdot 2^{\mu} \cdot m^N}{\nu + N},$$

и утверждение леммы теперь следует из (10).

Определим набор мультииндексов

$$\mathbf{n}_j = (n_1 + 1, \dots, n_j + 1, n_{j+1}, \dots, n_m), \quad j = 0, 1, \dots, m.$$

Рассмотрим определитель

$$\Delta_{\mathbf{n}}(z) = \begin{vmatrix} Q_{\mathbf{n}_0}(z) & P_{\mathbf{n}_0,1}(z) & \cdots & P_{\mathbf{n}_0,m}(z) \\ Q_{\mathbf{n}_1}(z) & P_{\mathbf{n}_1,1}(z) & \cdots & P_{\mathbf{n}_1,m}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{\mathbf{n}_m}(z) & P_{\mathbf{n}_m,1}(z) & \cdots & P_{\mathbf{n}_m,m}(z) \end{vmatrix}. \quad (14)$$

ЛЕММА 4. *Выполнено*

$$\Delta_{\mathbf{n}}(z) \equiv \text{const} \neq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем нумеровать строки и столбцы определителя (14) индексами от 0 до m . Прежде всего заметим, что этот определитель – многочлен. Далее, для каждого $j = 1, \dots, m$ вычтем из j -го столбца определителя $\Delta_{\mathbf{n}}(z)$ нулевой столбец, умноженный на $L_j(1/z)$. Согласно (5) получим

$$\Delta_{\mathbf{n}}(z) = (-1)^m \begin{vmatrix} Q_{\mathbf{n}_0}(z) & E_{\mathbf{n}_0,1}(z) & \dots & E_{\mathbf{n}_0,m}(z) \\ Q_{\mathbf{n}_1}(z) & E_{\mathbf{n}_1,1}(z) & \dots & E_{\mathbf{n}_1,m}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{\mathbf{n}_m}(z) & E_{\mathbf{n}_m,1}(z) & \dots & E_{\mathbf{n}_m,m}(z) \end{vmatrix}. \quad (15)$$

Пусть $\Delta_{\mathbf{n},j}(z)$, $0 \leq j \leq m$, – алгебраическое дополнение элемента $Q_{\mathbf{n}_j}(z)$ определителя (15):

$$\Delta_{\mathbf{n},j}(z) = (-1)^j \begin{vmatrix} E_{\mathbf{n}_0,1}(z) & \dots & E_{\mathbf{n}_0,m}(z) \\ \dots & \dots & \dots \\ E_{\mathbf{n}_{j-1},1}(z) & \dots & E_{\mathbf{n}_{j-1},m}(z) \\ E_{\mathbf{n}_{j+1},1}(z) & \dots & E_{\mathbf{n}_{j+1},m}(z) \\ \dots & \dots & \dots \\ E_{\mathbf{n}_m,1}(z) & \dots & E_{\mathbf{n}_m,m}(z) \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$\Delta_{\mathbf{n}}(z) = (-1)^m \sum_{j=0}^m Q_{\mathbf{n}_j}(z) \Delta_{\mathbf{n},j}(z). \quad (16)$$

Согласно лемме 1 находим

$$\deg Q_{\mathbf{n}_j}(z) = N + j, \quad j = 0, 1, \dots, m, \quad \Delta_{\mathbf{n},0}(z) = O\left(\frac{1}{z^{N+m+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty, \quad (17)$$

$$\Delta_{\mathbf{n},j}(z) = O\left(\frac{1}{z^{N+m}}\right), \quad z \rightarrow \infty, \quad j = 1, \dots, m. \quad (18)$$

Из (16)–(18) вытекает, что $\Delta_{\mathbf{n}}(z) = O(1)$ при $z \rightarrow \infty$, т.е. $\Delta_{\mathbf{n}}(z)$ – многочлен нулевой степени: $\Delta_{\mathbf{n}}(z) \equiv \Delta_{\mathbf{n}}(0)$. Учитывая (16), (9), (4), (3), окончательно получаем

$$\Delta_{\mathbf{n}}(z) \equiv \Delta_{\mathbf{n}}(0) = \pm \prod_{k=1}^m \binom{N+m+n_k+1}{n_k+1} \cdot \prod_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!} R_{\mathbf{n}_j}^{(j)}(n_{j+1}+1) \neq 0,$$

и лемма доказана.

2. Доказательство теоремы 1. Пусть $z = b/a$, где числа $a \in \mathbb{N}$ и $b \in \mathbb{Z}$ удовлетворяют условию

$$|b| > a^{m+1} \cdot e^{m^2+m \ln m}. \quad (19)$$

Тогда, в частности, $|z| > 1$. Рассмотрим форму

$$\ell = x_0 + x_1 L_1\left(\frac{a}{b}\right) + \dots + x_m L_m\left(\frac{a}{b}\right) \quad (20)$$

с произвольными целыми коэффициентами, не все из которых равны нулю, и пусть числа $\bar{x}_k \geq \max(1, |x_k|)$, $k = 1, \dots, m$, таковы, что $\bar{x}_1 \geq \dots \geq \bar{x}_m$. Определим натуральное число n_1 как наименьшее, удовлетворяющее условию

$$\bar{x}_1 \cdot \left(e^{m^2+m \ln m} \cdot \frac{a^{m+1}}{|b|} \right)^{n_1} < \frac{1}{2m}.$$

В силу (19) при достаточно большом $\bar{x}_1$ такое n_1 всегда существует. Для $1 < k \leq m$ определим n_k как наименьшее натуральное, удовлетворяющее условию

$$\bar{x}_k \cdot (e^{m^2+m \ln m} \cdot a^m)^{n_1} \cdot \left(\frac{a}{|b|} \right)^{n_k} < \frac{1}{2m}.$$

Легко видеть, что при таком выборе чисел n_k выполнено $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_m$. Кроме того, при фиксированных a и b условия $\bar{x}_1 \rightarrow \infty$, $n_1 \rightarrow \infty$ и $N \rightarrow \infty$ эквивалентны. Далее по лемме 4 найдется такое $j = 0, 1, \dots, m$, зависящее от $\mathbf{n}$, что

$$x_0 Q_{\mathbf{n}_j} \left(\frac{b}{a} \right) + \sum_{k=1}^m x_k P_{\mathbf{n}_j, k} \left(\frac{b}{a} \right) \neq 0. \quad (21)$$

Умножим обе части равенства (20) на $a^{N+m} D_{N+m}^m Q_{\mathbf{n}_j}(b/a)$ и запишем полученное соотношение в виде

$$\begin{aligned} a^{N+m} D_{N+m}^m Q_{\mathbf{n}_j} \left(\frac{b}{a} \right) \ell &= a^{N+m} D_{N+m}^m \left(x_0 Q_{\mathbf{n}_j} \left(\frac{b}{a} \right) + \sum_{k=1}^m x_k P_{\mathbf{n}_j, k} \left(\frac{b}{a} \right) \right) \\ &\quad + a^{N+m} D_{N+m}^m \sum_{k=1}^m x_k E_{\mathbf{n}_j, k} \left(\frac{b}{a} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

В силу леммы 1 первое слагаемое в правой части (22) есть целое число, а в силу (21) это число отлично от нуля. Следовательно, абсолютная величина этого числа не меньше единицы. Тем самым, мы можем написать неравенство

$$a^{N+m} D_{N+m}^m \left| Q_{\mathbf{n}_j} \left(\frac{b}{a} \right) \right| \cdot |\ell| \geq 1 - a^{N+m} D_{N+m}^m \left| \sum_{k=1}^m x_k E_{\mathbf{n}_j, k} \left(\frac{b}{a} \right) \right|.$$

Согласно леммам 2, 3 при $|z| > 1$ и всех достаточно больших N справедливы оценки

$$\begin{aligned} a^{N+m} D_{N+m}^m &\leq A \cdot e^{mN} a^N, \\ \left| Q_{\mathbf{n}_j} \left(\frac{b}{a} \right) \right| &\leq B \cdot 2^{(m+2)N} \left(\frac{|b|}{a} \right)^N, \quad \left| E_{\mathbf{n}_j, k} \left(\frac{b}{a} \right) \right| \leq C \cdot m^N \left(\frac{|b|}{a} \right)^{-n_k}, \end{aligned} \quad (23)$$

где $A = e^{o(N)}$, $B = e^{o(N)}$, $C = e^{o(N)}$ при $N \rightarrow \infty$.

Учитывая неравенства (23), для всех достаточно больших N находим

$$e^{mN} a^N \cdot 2^{(m+2)N} \left(\frac{|b|}{a} \right)^N |\ell| \geq 1 - e^{mN} a^N \sum_{k=1}^m \bar{x}_k m^N \left(\frac{a}{|b|} \right)^{n_k}. \quad (24)$$

Учитывая выбор чисел $\bar{x}_k$, $k = 1, \dots, m$, получаем, что для всех n_1 , больших некоторого числа, зависящего от a и b , правая часть неравенства (24) будет больше $1/2$, т.е.

$$\begin{aligned} |\ell| &> \frac{1}{2} e^{-(m+(m+2)\ln 2)N} |b|^{-N} \\ &> c(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_m)^{-1} e^{-(m^3+m^2\ln m)n_1} a^{-N-m^2n_1} e^{-(m+(m+2)\ln 2)N} \\ &> c_*(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_m)^{-1} (a^{m^2+m} e^{m^3+m^2\ln m+m^2+m(m+2)\ln 2})^{-n_1} \\ &> c_{**}(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_m)^{-1} \cdot \bar{x}_1^{-\delta}, \end{aligned}$$

где $c_{**} = c_{**}(a, b, m)$ и δ определено в (2). Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Fel'dman N. I., Nesterenko Yu. V. Transcendental Numbers. Number Theory IV. Encyclopaedia of Math. Sci. V. 44. Berlin: Springer-Verlag, 1998.
- [2] Baker A. On some Diophantine inequalities involving the exponential function // Canad. J. Math. 1965. V. 17. P. 616–626.
- [3] Фельдман Н. И. Оценки снизу для некоторых линейных форм // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1967. № 2. С. 63–72.
- [4] Väinänen K. On lower estimates for linear forms involving certain transcendental numbers // Bull. Austral. Math. Soc. 1976. V. 14. P. 161–179.
- [5] Väinänen K. On linear forms of the values of one class of E -functions // Acta Univ. Ouluen. Ser. A. 1976. № 41. P. 1–19.
- [6] Зудилин В. В. Об оценках снизу многочленов от значений некоторых целых функций // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 12. С. 57–86.
- [7] Фельдман Н. И. Об одной линейной форме // Acta Arith. 1972. V. 21. P. 347–355.
- [8] Сорокин В. Н. Об иррациональности значений гипергеометрических функций // Матем. сб. 1985. Т. 127(169). № 2(6). С. 245–258.
- [9] Галочкин А. И. Оценки снизу линейных форм от значений некоторых G -функций // Матем. заметки. 1975. Т. 18. № 4. С. 541–552.
- [10] Хессами Пилеруд Т. Оценка снизу одной линейной формы // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 4. С. 617–623.
- [11] Хессами Пилеруд Т. Оценки снизу линейных форм от значений некоторых гипергеометрических функций // Матем. заметки. 2000. Т. 67. № 3. С. 441–451.
- [12] Chudnovsky G. V. Padé approximations to the generalized hypergeometric functions. I // J. Math. Pures Appl. 1979. V. 58. P. 445–476.
- [13] Гутник Л. А. О линейной независимости над $\mathbb{Q}$ дилогарифмов в рациональных точках // УМН. 1982. Т. 37. № 5. С. 179–180.
- [14] Hata M. On the linear independence of the values of polylogarithmic functions // J. Math. Pures Appl. 1990. V. 69. № 2. P. 133–173.
- [15] Сорокин В. Н. Аппроксимации Эрмита–Паде полилогарифмов // Изв. вузов. Матем. 1994. № 5. С. 49–59.

Shahrekord University, Shahrekord, Iran
E-mail: hessamit@ipm.ir

Поступило
28.01.2004
Исправленный вариант
29.06.2004