Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Л. Иванков, Уточнение оценок некоторых неоднородных линейных форм, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 4, 515–521

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2512>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 16:23:41

УДК 511.361

УТОЧНЕНИЕ ОЦЕНОК

НЕКОТОРЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ФОРМ

П. Л. Иванков

В работе уточняются оценки неоднородных линейных форм от значений гипергеометрических функций с иррациональными параметрами. Указанное уточнение осуществляется за счет оптимального выбора степени нулевого многочлена при построении функциональных приближающих форм.

Библиография: 2 названия.

Пусть $\mathbb{I}$ – мнимое квадратичное поле или поле рациональных чисел; $\psi_k(x)$, $k = 1, \dots, t$, и $\psi(x)$ – многочлены из кольца $\mathbb{I}[x]$, коэффициенты при старших степенях которых равны единице; $g_k(x) = \psi_k(x)\psi(x) \neq 0$ при $x = 1, 2, 3, \dots$; $\omega_1, \dots, \omega_t$ – ненулевые числа из поля $\mathbb{I}$. Рассмотрим при $k = 1, \dots, t$ функции

$$\Phi_k(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \omega_k^{\nu} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{g_k(x)}.$$

Предположим, что степени многочленов $\psi_k(x)$ равны:

$$\deg \psi_1(x) = \dots = \deg \psi_t(x) = u_1;$$

степень многочлена $\psi(x)$ обозначим через u , и пусть $m = u + u_1$.

ТЕОРЕМА. Если все корни многочленов $\psi_k(x)$ рациональны, $u_1 > 0$, и функции

$$1, \quad \Phi_k^{(j-1)}(z), \quad k = 1, \dots, t, \quad j = 1, \dots, m, \quad (1)$$

линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$, то для любого $\varepsilon > 0$ при любом нетривиальном наборе целых чисел из поля $\mathbb{I}$

$$h_0, \quad h_{kj}, \quad k = 1, \dots, t, \quad j = 1, \dots, m, \quad (2)$$

при всех достаточно больших значениях H ,

$$H = \max(|h_{kj}|, \quad k = 1, \dots, t, \quad j = 1, \dots, m), \quad (3)$$

выполняется неравенство

$$\left| h_0 + \sum_{k=1}^t \sum_{j=1}^m h_{kj} \Phi_k^{(j-1)}(1) \right| > H^{-\theta-\varepsilon}, \quad (4)$$

где $\theta = mt + u/u_1$.

Ранее в работе [1] была получена аналогичная оценка, но с заменой в показателе степени величины θ на

$$\theta_1 = \frac{mt + \tau}{1 - \tau},$$

где

$$\tau = \frac{1}{m} \left(u - \sum_{i=1}^u \frac{1}{\varkappa_i} \right),$$

$\varkappa_1, \dots, \varkappa_u$ — степени алгебраических чисел, являющихся корнями многочлена $\psi(x)$. Если $u > 0$ и все корни многочлена $\psi(x)$ иррациональны, то для τ справедлива оценка снизу

$$\tau \geq \frac{u}{2m}.$$

Пользуясь этим неравенством и тем обстоятельством, что θ_1 возрастает с увеличением τ , нетрудно проверить, что если $t \geq 2$ или $u_1 \geq 2$, то

$$\theta_1 > \theta, \quad (5)$$

а это означает, что в указанных случаях оценка (4) точнее оценки, полученной в работе [1]. При $t = u_1 = 1$ неравенство (5) выполняется, если кроме иррациональности всех корней многочлена $\psi(x)$ потребовать дополнительно, чтобы среди них имелись алгебраические числа степени не меньше 3. В этом случае

$$\tau \geq \frac{u}{2m} + \frac{1}{6m}$$

и справедливость неравенства (5) проверяется непосредственно.

Для доказательства теоремы потребуется ряд вспомогательных утверждений. Через $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ будем обозначать положительные постоянные, зависящие от функций $\Phi_1(z), \dots, \Phi_t(z)$ и от поля $\mathbb{I}$; натуральные числа $n_1 \leq n_2 \leq \dots$ могут зависеть, кроме того, также и от ε .

Обозначим

$$B_k(\nu) = \sum_{\mu=0}^{mn} A_{k\mu} \frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-\mu+1)}{\mu!},$$

где n — некоторое натуральное число, а коэффициенты $A_{k\mu}$ определяются в лемме 1.

ЛЕММА 1. Для любого ε , $0 < \varepsilon < 1$, при $n \geq n_1$ существует нетривиальный набор целых алгебраических чисел $A_{k\mu}$, $k = 1, \dots, t$, $\mu = 0, 1, \dots, tn$, лежащих в поле $\mathbb{I}$, по модулю не превосходящих $n^{\varepsilon n}$ и таких, что

$$\sum_{k=1}^t \omega_k^\nu B_k(\nu) \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\psi_k(x)} = 0 \quad (6)$$

при $M \leq \nu \leq M + (mt - \varepsilon)n$, где

$$M = \left\lceil \frac{m}{u_1} n \right\rceil.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы является стандартным: считая равенства (6) системой уравнений относительно неизвестных коэффициентов $A_{k\mu}$ многочленов $B_k(\nu)$, умножим ν -е уравнение на $(\nu!)^{u_1}$, после чего окажется, что (вследствие рациональности корней многочленов $\psi_k(x)$; см., например, [2, с. 186, лемма 2]) общий наименьший знаменатель коэффициентов системы, как и модули этих коэффициентов, оцениваются сверху величиной $e^{\gamma_1 n}$. Остается применить (после умножения каждого уравнения на общий наименьший знаменатель его коэффициентов) лемму 13 из [2, с. 111]; при этом следует учесть, что фигурирующее в этой лемме поле алгебраических чисел в рассматриваемом случае является мнимым квадратичным. Лемма 1 доказана.

Заметим, что $g_k(\zeta) - g_k(\nu)$ делится на $\zeta - \nu$; в результате деления получается многочлен от переменных ζ и ν с коэффициентами из поля $\mathbb{I}$. Этот многочлен можно записать по степеням ν :

$$\frac{g_k(\zeta) - g_k(\nu)}{\zeta - \nu} = \sum_{j=1}^m \chi_j(\zeta) \nu^{j-1}. \quad (7)$$

ЛЕММА 2. Тождественно по ν и ζ выполняется равенство

$$\frac{1}{\zeta - \nu} = \sum_{j=1}^m \sum_{s=0}^q \frac{\chi_j(\zeta - s)(\nu - s)^{j-1}}{g_k(\zeta - s)} \prod_{x=0}^{s-1} \frac{g_k(\nu - x)}{g_k(\zeta - x)} + \frac{1}{\zeta - \nu} \prod_{x=0}^q \frac{g_k(\nu - x)}{g_k(\zeta - x)}. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим индукцию по q . При $q = 0$ доказываемое равенство непосредственно вытекает из (7). Для того, чтобы осуществить индуктивный переход от q к $q + 1$, следует воспользоваться тем, что равенство (7) остается справедливым после замены ν и ζ соответственно на $\nu - q - 1$ и $\zeta - q - 1$. Лемма доказана.

Рассмотрим числа

$$p_{kjs} = \frac{(mn)!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\chi_j(\zeta - s) B_k(\zeta) d\zeta}{\prod_{x=0}^s g_k(\zeta - x)}, \quad (9)$$

где окружность Γ ориентирована положительно и содержит все полюсы подынтегральной функции, $k = 1, \dots, t$, $j = 1, \dots, m$, $s = 0, 1, \dots, n$.

ЛЕММА 3. Все числа p_{kjs} лежат в поле $\mathbb{I}$ и при $k = 1, \dots, t$ тождественно по ν выполняется равенство

$$\sum_{s=0}^n \sum_{j=1}^m p_{kjs} (\nu - s)^{j-1} \prod_{x=0}^{s-1} g_k(\nu - x) = (mn)! B_k(\nu). \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы убедиться в справедливости первого утверждения леммы, достаточно записать интеграл из правой части (9) в виде вычета относительно бесконечно удаленной точки. Далее, напомним равенство (8) при $q = n$, умножим обе его части на $(mn)! B_k(\zeta)/(2\pi i)$ и проинтегрируем по окружности Γ , считая, что точка $\zeta = \nu$ также лежит внутри этой окружности. При этом

$$\oint_{\Gamma} \frac{B_k(\zeta)}{\zeta - \nu} \prod_{x=0}^n \frac{g_k(\nu - x)}{g_k(\zeta - x)} d\zeta = 0,$$

так как степень многочлена от ζ в числителе, по крайней мере, на две единицы меньше степени многочлена в знаменателе. С учетом последнего замечания утверждение леммы становится очевидным. Лемма доказана.

Обозначим

$$\begin{aligned} \Phi_{kj}(z) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \omega_k^{\nu} \nu^{j-1} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{g_k(x)}, \quad k = 1, \dots, t, \quad j = 1, \dots, m, \\ P_{kj}(z) &= \sum_{s=0}^n p_{kjs} \omega_k^s z^s, \quad k = 1, \dots, t, \quad j = 1, \dots, m, \\ R(z) &= \sum_{k=1}^t \sum_{j=1}^m P_{kj} \Phi_{kj}(z). \end{aligned} \quad (11)$$

Пусть

$$R(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} z^{\nu}$$

— разложение функции $R(z)$ в ряд по степеням z ;

$$\begin{aligned} P_0(z) &= - \sum_{\nu=0}^{M-1} c_{\nu} z^{\nu}, \\ R_1(z) &= P_0(z) + \sum_{k=1}^t \sum_{j=1}^m P_{kj}(z) \Phi_{kj}(z). \end{aligned} \quad (12)$$

ЛЕММА 4. Функция $R_1(z)$ не равна тождественно нулю и имеет при $z = 0$ нуль, порядок которого не меньше $M + (mt - \varepsilon)n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как среди чисел $A_{k\mu}$ есть ненулевые, то хотя бы один из многочленов $B_k(\nu)$ не равен нулю тождественно. Тогда из равенства (10) следует, что отличен от тождественного нуля и хотя бы один из многочленов $P_{kj}(z)$. Заметим теперь, что из линейной независимости над полем рациональных дробей функций (1) следует, что аналогичным свойством обладают и функции $1, \Phi_{kj}(z), k = 1, \dots, t, j = 1, \dots, m$. Таким образом, функция (12) и в самом деле не равна тождественно нулю. Непосредственно из определения этой функции следует, что первые M коэффициентов ее разложения в ряд по степеням z равны нулю. Если же $M \leq \nu \leq M + (mt - \varepsilon)n$, то коэффициент $c_{1\nu} = c_\nu$ при z^ν вычисляется по формуле

$$c_{1\nu} = \sum_{k=1}^t \sum_{s=0}^n \sum_{j=1}^m p_{kjs} \omega_k^\nu (\nu - s)^{j-1} \prod_{x=1}^{\nu-s} \frac{1}{g_k(x)},$$

что после несложных преобразований, учитывающих лемму 3, приводится к выражению, с точностью до множителя

$$(mn)! \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\psi(x)}$$

совпадающему с левой частью равенства (6). Лемма 4 доказана.

Таким образом, мы построили линейную приближающую форму $R_1(z)$, имеющую при $z = 0$ нуль достаточно высокого порядка. При этом из (9) и (11) легко следует, что модуль общего наименьшего знаменателя коэффициентов многочленов $P_{kj}(z)$ оценивается сверху величиной $e^{\gamma_2 n}$ (достаточно выразить интеграл из правой части равенства (9) через вычет подынтегральной функции относительно бесконечно удаленной точки). Особого внимания требуют коэффициенты многочлена $P_0(z)$.

ЛЕММА 5. *Существует отличное от нуля целое число W из поля $\mathbb{I}$, $|W| \leq n^{Mun} e^{\gamma_3 n}$, такое, что многочлен $WP_0(z)$ имеет целые коэффициенты.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Коэффициент многочлена $P_0(z)$ при z^ν с точностью до знака совпадает с c_ν ; если $\nu \geq n$, то, как отмечалось выше,

$$c_\nu = (mn)! \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\psi(x)} \sum_{k=1}^t \omega_k^\nu B_k(\nu) \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\psi_k(x)}. \quad (13)$$

Если $0 \leq \nu \leq n$, то с помощью аналогичных соображений получаем такое равенство:

$$c_\nu = \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\psi(x)} \sum_{k=1}^t \omega_k^\nu \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\psi_k(x)} \left((mn)! B_k(\nu) - \sum_{s=\nu+1}^n \sum_{j=1}^m p_{kjs} (\nu - s)^{j-1} \prod_{x=1}^{s-1} g_k(\nu - x) \right). \quad (14)$$

Если из правых частей равенств (13) и (14) удалить множитель

$$\prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\psi(x)},$$

то легко проверить, что общий наименьший знаменатель W_1 того, что останется, оценивается сверху числом $e^{\gamma_3 n}$. Здесь требует разъяснения лишь оценка общего наименьшего знаменателя чисел

$$(mn)! \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\psi_k(x)}, \quad k = 1, \dots, t, \quad \nu = 0, 1, \dots, M.$$

Все корни многочленов $\psi_k(x)$ рациональны, поэтому проходит стандартное рассуждение, применяемое для доказательства такого рода утверждений (см., например, [2, с. 186, лемма 2]). Таким образом, числа c_ν станут целыми в поле $\mathbb{I}$ после домножения на число

$$b^M W_1 \prod_{x=1}^M \psi(x),$$

где натуральное число b таково, что многочлен $b \psi(x)$ имеет целые в поле $\mathbb{I}$ коэффициенты. Отсюда легко вытекает требуемое утверждение. Лемма 5 доказана.

Используя то обстоятельство, что функция $\Phi_k(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$g_k \left(z \frac{d}{dz} \right) y = \omega_k z y + g_k(0),$$

построим последовательность приближающих форм, положив

$$R_q(z) = z \frac{d}{dz} R_{q-1}(z), \quad q = 2, 3, \dots$$

При этом определитель, составленный из коэффициентов первых $mt + 1$ форм, будет отличен от тождественного нуля (для $n \geq n_2$).

Доказать это непосредственно с помощью леммы 9 из [2, с. 106] нельзя, так как в нашем случае степень многочлена $P_0(z)$ существенно отличается от степеней остальных многочленов. Однако анализ доказательства этой леммы показывает, что она будет справедлива и в рассматриваемом случае; при этом в доказательство потребуется внести лишь незначительные изменения технического характера. Затем от функциональных приближающих форм перейдем к числовым подобно тому, как это сделано в [1, с. 107, лемма 10]. Получающийся при этом результат сформулируем в виде леммы.

ЛЕММА 6. *При любом $\varepsilon > 0$ и $n \geq n_3$ существует набор чисел w_{q0} , w_{qkj} , $q = 0, 1, \dots, mt$, $k = 1, \dots, t$, $j = 1, \dots, t$, из поля $\mathbb{I}$ такой, что выполняются следующие условия:*

- 1) числа w_{qkj} являются целыми в поле $\mathbb{I}$, причем их модули оцениваются сверху величиной $n^{(m+\varepsilon)n}$;
- 2) в поле $\mathbb{I}$ существует отличное от нуля целое число G такое, что все числа Gw_{q0} являются целыми в поле $\mathbb{I}$ и $|G| \leq n^{(mu/u_1+\varepsilon)n}$;
- 3) определитель, строками которого являются числа w_{q0} , w_{qkj} , $k = 1, \dots, t$, $j = 1, \dots, t$, отличен от нуля;
- 4) пусть

$$r_q = w_{q0} + \sum_{k=1}^t \sum_{j=1}^m w_{qkj} \Phi_{kj}(1), \quad q = 0, 1, \dots, mt;$$

$$\text{тогда } |r_q| \leq n^{-(m^2/u_1+m^2t-m-\varepsilon)n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы принципиально ничем не отличается от доказательства указанной выше леммы 10 из [2, с. 107]. Для доказательства пункта 2) применяется лемма 5.

С помощью последней леммы нетрудно доказать теорему. Согласно пункту 3) этой леммы одну из строк упомянутого там определителя можно заменить на строку, составленную из чисел (2) так, чтобы получающийся при этом определитель δ был отличен от нуля. Если умножить на G все элементы первого столбца определителя δ , то получится определитель, составленный из целых чисел поля $\mathbb{I}$, т.е.

$$|G\delta| \geq 1, \quad |\delta| \geq n^{-(mu/u_1+\varepsilon)n}.$$

Чтобы получить для определителя δ оценку сверху, умножим все его столбцы, начиная со второго, на числа $\Phi_{kj}(1)$ и прибавим их к первому столбцу; получившийся определитель разложим по элементам первого столбца. При $n \geq n_4$ получим для $|\delta|$ оценку сверху:

$$|\delta| \leq |L|n^{mt(m+\varepsilon)n} + Hn^{-(m^2/u_1-\varepsilon)n},$$

где

$$L = h_0 + \sum_{k=1}^t \sum_{j=1}^m h_{kj} \Phi_{kj}(1),$$

а H определено равенством (3).

Из полученных оценок утверждение теоремы выводится стандартным способом.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Галочкин А. И. О некотором аналоге метода Зигеля // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1986. №2. С. 30–34.
- [2] Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987.

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Поступило
17.03.2004