Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Л. Камынин, Об обратной задаче определения правой части в параболическом уравнении с условием интегрального переопределения, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 4, 522–534

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2513>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 14:22:28

УДК 517.956

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ С УСЛОВИЕМ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ

В. Л. Камынин

Изучается вопрос об однозначной разрешимости обратной задачи определения правой части для параболического уравнения со старшим коэффициентом, зависящим и от временной, и от пространственной переменной, при условии интегрального переопределения по времени. Найдено два типа условий, достаточных для локальной разрешимости рассмотренной обратной задачи, а также исследована так называемая фредгольмова разрешимость данной обратной задачи.

Библиография: 11 названий.

1. Введение. В работе изучается однозначная разрешимость обратной задачи определения пары функций $\{u(t, x), f(x)\}$, удовлетворяющих в $Q_T \equiv (0, T] \times \Omega$ уравнению

$$\rho(t, x)u_t - \Delta u = f(x)g(t, x) + h(t, x), \quad (1.1)$$

начальному условию

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.2)$$

граничному условию

$$u(t, x) = 0, \quad t \in [0, T], \quad x \in \partial\Omega, \quad (1.3)$$

а также дополнительному условию

$$\int_0^T u(t, x)\chi(t) dt = \psi(x). \quad (1.4)$$

Здесь Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$.

Обратные задачи для параболических уравнений с условием интегрального переопределения вида (1.4) впервые были рассмотрены в работах [1]–[3] для уравнений с не зависящими от t коэффициентами; при этом рассматривались граничные условия как первого, так и третьего рода. В указанных работах были доказаны теоремы об эквивалентности исходной обратной задачи некоторому операторному уравнению второго рода с вполне непрерывным оператором (так называемая *фредгольмова разрешимость*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00774.

обратной задачи), а при дополнительном условии, которое для уравнения (1.1) формулируется в виде

$$g(t, x) \geq 0, \quad g_t(t, x) \geq 0, \quad (t, x) \in Q_T, \quad (1.5)$$

доказана однозначная разрешимость соответствующей обратной задачи.

Отметим работы [4], [5], где (так же, как и в [3]) рассматриваются обратные задачи для уравнений в банаховых пространствах с условием переопределения вида (1.4) и исследование ведется методами теории полугрупп, а также недавнюю работу [6], где получена разрешимость одной нелинейной обратной задачи для параболического уравнения с не зависящими от t коэффициентами и условием переопределения вида (1.4). Наконец, в [7] исследована единственность решения обратной задачи вида (1.1)–(1.4) (с коэффициентом $\rho(t, x)$ перед u_t) при выполнении условия (1.5).

Известные примеры показывают, что одной гладкости входных данных недостаточно для доказательства однозначной разрешимости обратных задач вида (1.1)–(1.4). Нужны те или иные дополнительные условия, например, условие (1.5). В настоящей работе для уравнения (1.1), где коэффициент $\rho(t, x)$ зависит и от временной, и от пространственных переменных, найдены два типа достаточных условий, обеспечивающих однозначную разрешимость обратной задачи (1.1)–(1.4). Приведены конкретные примеры задач, где такие условия выполняются. В частности, первый тип достаточных условий заведомо выполняется, если область Ω достаточно мала. Также для полноты изложения в п. 3 приведен пример, показывающий существенность наложенных в работе условий.

Используемые в работе пространства $L_2(Q_T)$, $L_2(\Omega)$, $\dot{W}_2^1(\Omega)$, $C(0, T; L_2(\Omega))$, $C(0, T; \dot{W}_2^1(\Omega))$, $W_2^2(\Omega)$, $W_2^1([0, T])$, $\dot{W}_2^1([0, T])$, $W_2^{1,2}(Q_T)$ с соответствующими нормами будем понимать в общепринятом смысле (см., например, [8]). Через $W_{2,0}^{1,2}(Q_T)$ (соответственно $W_{2,0}^2(\Omega)$) будем обозначать подпространство пространства функций из $W_2^{1,2}(Q_T)$ (соответственно из $W_2^2(\Omega)$), равных нулю при $x \in \partial\Omega$. Положим

$$\|v\| \equiv \|v\|_{L_2(\Omega)}, \quad v(x) \in L_2(\Omega),$$

$$\|v_x\| = \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 dx \right)^{1/2}, \quad \|v_{xx}\| = \left(\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_{x_i x_j}^2 dx \right)^{1/2}.$$

Через θ обозначим константу из неравенства Пуанкаре–Стеклова

$$\|v\| \leq \theta \|v_x\|, \quad (1.6)$$

которое справедливо для любой $v(x) \in \dot{W}_2^1(\Omega)$. Мы также будем использовать известное арифметическое неравенство

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2, \quad \varepsilon > 0, \quad a, b \in \mathbb{R}^1. \quad (1.7)$$

Во всех дальнейших рассуждениях мы будем предполагать, что функции, входящие в исходные данные задачи, измеримы и удовлетворяют следующим условиям:

- (A) $\Lambda_1 \leq \rho(t, x) \leq \Lambda_2$, $-K_{\rho,1} \leq \rho_t(t, x) \leq K_{\rho,2}$, $(t, x) \in Q_T$;
- (B) $u_0(x), \psi(x) \in W_{2,0}^2(\Omega)$, $\|u_0\|_{W_{2,0}^2(\Omega)} \leq M_0$, $\|\psi\|_{W_2^2(\Omega)} \leq K_\psi$;
- (C) $|g(t, x)| \leq K_g$, $\left| \int_0^T g(t, x) \chi(t) dt \right| \geq g_0(T) > 0$, $(t, x) \in Q_T$;
- (D) $h(t, x) \in L_2(Q_T)$, $\|h\|_{L_2(Q_T)} \leq K_h$;
- (E) $\chi(t) \in L_2([0, T])$, $\|\chi\|_{L_2([0, T])} \leq K_\chi(T)$.

Здесь $\Lambda_1, \Lambda_2, K_\chi(T), g_0(T), K_g = \text{const} > 0, K_\psi, K_{\rho,1}, K_{\rho,2}, K_h, M_0 = \text{const} \geq 0$. Положим $K_\rho = \max\{K_{\rho,1}, K_{\rho,2}\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. *Обобщенным решением задачи (1.1)–(1.4) будем называть пару функций $\{u(t, x), f(x)\}$, $u(t, x) \in W_{2,0}^{1,2}(Q_T)$, $f(x) \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1.1) почти всюду в Q_T , при этом функция $u(t, x)$ удовлетворяет начальному условию (1.2) в $C(0, T; L_2(\Omega))$ и условию переопределения в $W_2^2(\Omega)$.*

2. Первый вариант условий, достаточных для однозначной разрешимости задачи (1.1)–(1.4). В этом пункте дополнительно к условиям (A)–(E) будем предполагать, что

$$\chi(t) \in \dot{W}_2^1([0, T]), \quad \|\chi_t\|_{L_2([0, T])} \leq K_\chi^*(T), \quad (2.1)$$

где $K_\chi^*(T) = \text{const} \geq 0$.

На протяжении этого пункта через c (возможно, с индексом) будем обозначать любые положительные константы, зависящие от $\Lambda_1, \Lambda_2, \Omega, T, K_g, K_\chi^*(T), K_\rho, K_\psi, g_0(T), K_h, M_0, \theta$.

Решение исходной обратной задачи будем искать в виде

$$\{u(t, x), f(x)\} = \{z(t, x), f(x)\} + \{v(t, x), 0\}, \quad (2.2)$$

где $v(t, x)$ – решение в Q_T прямой задачи

$$\rho(t, x)v_t - \Delta v = h(t, x), \quad (t, x) \in Q_T, \quad (2.3)$$

$$v(0, x) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.4)$$

$$v(t, x) = 0, \quad t \in [0, T], \quad x \in \partial\Omega, \quad (2.5)$$

а пара $\{z(t, x), f(x)\}$ – решение в Q_T обратной задачи

$$\rho(t, x)z_t - \Delta z = f(x)g(t, x), \quad (t, x) \in Q_T, \quad (2.6)$$

$$z(0, x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2.7)$$

$$z(t, x) = 0, \quad t \in [0, T], \quad x \in \partial\Omega, \quad (2.8)$$

$$\int_0^T z(t, x)\chi(t) dt = \varphi(x) \equiv \psi(x) - \int_0^T v(t, x)\chi(t) dt. \quad (2.9)$$

В силу условий (A), (B), (D) из [9] вытекает существование и единственность решения

$$v(t, x) \in W_{2,0}^{1,2}(Q_T) \quad (2.10)$$

задачи (2.3)–(2.5).

Учитывая (2.10) и (2.1), нетрудно доказать, что функция $\varphi(x)$ из условия (2.9) принадлежит пространству $W_{2,0}^2(\Omega)$, причем справедлива оценка

$$\|\varphi\|_{W_2^2(\Omega)} \leq K_\varphi, \quad (2.11)$$

где $K_\varphi = \text{const} \geq 0$ зависит от $T, \Omega, \Lambda_1, \Lambda_2, K_h, K_\psi, M_0, K_\chi^*(T)$.

В силу оценки (2.11) изучение однозначной разрешимости обратной задачи (1.1)–(1.4) эквивалентно исследованию однозначной разрешимости обратной задачи (2.6)–(2.9).

Выведем операторное уравнение относительно неизвестной функции $f(x)$.

Пусть $f(x) \in L_2(\Omega)$ произвольна. Тогда соотношения (2.6)–(2.8) представляют собой первую краевую задачу для нахождения функции $z(t, x)$. В силу [9] существует и единственно решение $z(t, x) \in W_{2,0}^{1,2}(Q_T)$ этой задачи, причем справедлива оценка

$$\|z\|_{W_{2,0}^{1,2}(Q_T)} \leq c\|f\|. \quad (2.12)$$

Умножим соотношение (2.6) на $\chi(t)$ и проинтегрируем по t на отрезке $[0, T]$. Учитывая предположения (A), (2.1) и условие (2.10), приходим к соотношению

$$f(x) = -\frac{1}{G(x, T)} \int_0^T z(t, x) (\rho(t, x) \chi(t))_t dt - \frac{\Delta \varphi}{G(x, T)}, \quad (2.13)$$

где

$$G(x, T) \equiv \int_0^T g(t, x) \chi(t) dt,$$

так что в силу условия (C)

$$|G(x, t)| \geq g_0(T) > 0, \quad x \in \Omega. \quad (2.14)$$

Введем линейный оператор A по формуле

$$A(f) = -\frac{1}{G(x, T)} \int_0^T z(t, x) (\rho \chi)_t dt, \quad (2.15)$$

где $z(t, x)$ – решение прямой задачи (2.6)–(2.8) при заданной функции $f(x)$ в правой части уравнения (2.6).

ЛЕММА 2.1. *Оператор A , определенный в (2.15), является оператором из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, учитывая предположения (A), (C), (2.1) и условие (2.14), имеем соотношение

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\frac{1}{G(x, T)} \int_0^T z(t, x) (\rho(t, x) \chi(t))_t dt \right)^2 dx \\ & \leq \frac{1}{g_0^2(T)} \int_{Q_T} z^2(t, x) [\rho_t(t, x) \chi(t) + \rho(t, x) \chi'(t)]^2 dx dt \\ & \leq c_1 \sup_{0 \leq t \leq T} |\chi(t)|^2 \cdot \|z\|_{L_2(Q_T)}^2 + c_2 \int_0^T |\chi'(t)|^2 dt \cdot \sup_{0 \leq t \leq T} \|z(t, \cdot)\|^2, \end{aligned}$$

из которого в силу (2.12) вытекает оценка

$$\|A(f)\|^2 \leq c_3 \|f\|^2.$$

Лемма доказана.

В силу (2.15) и леммы 2.1 соотношение (2.13) можно записать в виде операторного уравнения в $L_2(\Omega)$

$$f = A(f) - \frac{\Delta \varphi}{G(x, T)}. \quad (2.16)$$

ЛЕММА 2.2. Пусть выполнены условия (А)–(Е), (2.1). Тогда для того, чтобы пара $\{z, f\}$ была обобщенным решением задачи (2.6)–(2.9), необходимо и достаточно, чтобы эта пара удовлетворяла соотношениям (2.6)–(2.8), (2.16).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость доказана выше при выводе соотношения (2.16).

Докажем достаточность. Итак, пусть $f^*(x) \in L_2(\Omega)$ является решением уравнения (2.16). Рассмотрим функцию $z^*(t, x)$ как единственное решение прямой задачи (2.6)–(2.8) с выбранной функцией $f(x) \equiv f^*(x)$ в правой части уравнения (2.6). Положим

$$\varphi^*(x) = \int_0^T z^*(t, x) \chi(t) dt.$$

Очевидно,

$$\varphi^*(x) \in W_{2,0}^{1,2}(\Omega). \quad (2.17)$$

Тогда, повторяя рассуждения, сделанные при выводе (2.13), приходим к соотношению

$$f^*(x) = -\frac{1}{G(x, T)} \int_0^T z^*(t, x) (\rho(t, x) \chi(t))_t dt - \frac{\Delta \varphi^*}{G(x, T)}. \quad (2.18)$$

С другой стороны, $f^*(x)$ является решением уравнения (2.16) и в силу определения оператора A имеем, что $f^*(x)$ удовлетворяет соотношению

$$f^*(x) = -\frac{1}{G(x, T)} \int_0^T z^*(t, x) (\rho(t, x) \chi(t))_t dt - \frac{\Delta \varphi}{G(x, T)}.$$

Сравнивая его с (2.18), получаем, что

$$\Delta \varphi^*(x) = \Delta \varphi(x), \quad x \in \Omega.$$

Из последнего соотношения с учетом того, что $\varphi^*(x) = \varphi(x) = 0$ при $x \in \partial\Omega$ (см. условия (В), (2.5), (2.9), (2.17)), вытекает равенство $\varphi^*(x) = \varphi(x)$ в Ω , а следовательно, пара $\{z^*(t, x), f^*(x)\}$ является решением обратной задачи (2.6)–(2.9). Лемма 2.2 доказана.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть выполнены условия (А)–(Е), (2.1). Предположим также, что выполнено неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{2K_g^2 K_\chi^{*2}(T)}{g_0^2(T)} \left(\frac{T^2}{2} K_\rho^2 + \Lambda_2^2 \right) \\ & \times \min \left\{ \frac{1}{2\Lambda_1^2} T^3, \frac{\theta^2}{2\Lambda_1} T^2, \theta^4 \left[\frac{T}{1 - \theta^2 K_{\rho,2}} + \frac{\Lambda_1 \theta^2}{(1 - \theta^2 K_{\rho,2})^2} \exp \left\{ -\frac{(1 - \theta^2 K_{\rho,2})T}{\Lambda_1 \theta^2} \right\} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\Lambda_1 \theta^2}{(1 - \theta^2 K_{\rho,2})^2} \right] \right\} < 1. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Тогда в цилиндре Q_T существует и единственно решение $\{u(t, x), f(x)\}$ задачи (1.1)–(1.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было отмечено выше, достаточно доказать однозначную разрешимость обратной задачи (2.6)–(2.9). Покажем для этого, что оператор A , определенный соотношением (2.15), является сжимающим в $L_2(\Omega)$.

Учитывая условия (A), (C), (2.1), имеем оценку

$$\begin{aligned}
 \|A(f)\|^2 &\equiv \int_{\Omega} \left(\frac{1}{G(x, T)} \int_0^T z(t, x) (\rho\chi)_t dt \right)^2 dx \\
 &\leq \frac{2}{g_0^2(T)} \left[\int_{\Omega} \left(\int_0^T z^2(t, x) dt \right) \cdot \left(\int_0^T \rho_t^2(t, x) \chi^2(t) dt \right) dx \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\Omega} \left(\int_0^T z^2(t, x) dt \right) \cdot \left(\int_0^T \rho^2(t, x) \chi_t^2(t) dt \right) dx \right] \\
 &\leq \frac{2}{g_0^2(T)} \left[K_{\rho}^2 \frac{T^2}{2} K_{\chi}^{*2}(T) \|z\|_{L_2(Q_T)}^2 + \Lambda_2^2 K_{\chi}^{*2}(T) \|z\|_{L_2(Q_T)}^2 \right] \\
 &\equiv \frac{2K_{\chi}^{*2}(T)}{g_0^2(T)} \left(\frac{T^2}{2} K_{\rho}^2 + \Lambda_2^2 \right) \|z\|_{L_2(Q_T)}^2.
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Оценим норму $\|z\|_{L_2(Q_T)}$ несколькими способами.

Умножим уравнение (2.6) на $z_t(t, x)$ и проинтегрируем по цилиндру Q_{τ} ($\tau \in (0, T]$). Учитывая (A) и краевые условия (2.7), (2.8), приходим после интегрирования по частям к оценке

$$\Lambda_1 \|z_t\|_{L_2(Q_{\tau})}^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} z_x^2(\tau, x) dx \leq \int_{Q_{\tau}} |f(x)g(t, x)| \cdot |z_t(t, x)| dx dt. \tag{2.21}$$

Применяя для оценки правой части (2.21) неравенство (1.7) с $\varepsilon = \Lambda_1$ и учитывая (1.6), получим, что

$$\Lambda_1 \|z_t\|_{L_2(Q_{\tau})}^2 + \frac{1}{\theta^2} \|z(\tau, \cdot)\|^2 \leq \frac{K_g^2}{\Lambda_1} \tau \|f\|^2. \tag{2.22}$$

Из (2.22) при $\tau = T$ вытекает, что

$$\Lambda_1 \|z_t\|_{L_2(Q_T)}^2 \leq \frac{K_g^2}{\Lambda_1} T \|f\|^2,$$

откуда с учетом (2.7) получаем первую оценку для $\|z\|_{L_2(Q_T)}^2$:

$$\|z\|_{L_2(Q_T)}^2 \leq \frac{K_g^2}{2\Lambda_1^2} T^3 \|f\|^2. \tag{2.23}$$

Из (2.22) имеем также неравенство

$$\|z(\tau, \cdot)\|^2 \leq \frac{K_g^2 \theta^2}{\Lambda_1} \tau \|f\|^2.$$

Проинтегрировав его по τ в пределах от 0 до T , получим вторую оценку для $\|z\|_{L_2(Q_T)}^2$:

$$\|z\|_{L_2(Q_T)}^2 \leq \frac{K_g^2 \theta^2}{2\Lambda_1} T^2 \|f\|^2. \tag{2.24}$$

Умножим теперь уравнение (2.6) на $z(t, x)$ и снова проинтегрируем по Q_τ . После интегрирования по частям с учетом условий (2.7), (2.8) и неравенства (1.7), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(\tau, x) z^2(\tau, x) dx - \frac{1}{2} \int_{Q_\tau} \rho_\tau(t, x) z^2(t, x) dx dt + \int_{Q_\tau} z_x^2(\tau, x) dx dt \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{Q_\tau} z^2(t, x) dx dt + \frac{1}{2\varepsilon} \tau K_g^2 \|f\|^2. \end{aligned}$$

Полагая здесь $\varepsilon = 1/\theta^2$ и учитывая условия (А), (2.1), а также неравенство (1.6), получаем оценку

$$\frac{d}{d\tau} \int_{Q_\tau} z^2(t, x) dx dt + \frac{1}{\Lambda_1} \left(\frac{1}{\theta^2} - K_{\rho,2} \right) \int_{Q_\tau} z^2(t, x) dx dt \leq \frac{\theta^2}{\Lambda_1} \tau K_g^2 \|f\|^2. \quad (2.25)$$

Введем обозначения

$$y(\tau) = \int_{Q_\tau} z^2 dx dt, \quad \nu = \frac{1}{\Lambda_1} \left(\frac{1}{\theta^2} - K_{\rho,2} \right). \quad (2.26)$$

Тогда (2.25) перепишется в виде

$$y'(\tau) + \nu y(\tau) \leq \frac{\theta^2}{\Lambda_1} K_g^2 \tau \|f\|^2. \quad (2.27)$$

Умножим (2.27) на $e^{\nu\tau}$ и проинтегрируем по τ в пределах от 0 до T . После применения интегрирования по частям в правой части получившегося неравенства получим

$$y(T) \leq \frac{\theta^2}{\Lambda_1} K_g^2 \|f\|^2 \left(\frac{T}{\nu} + \frac{1}{\nu^2} e^{-\nu T} - \frac{1}{\nu^2} \right) \|f\|^2. \quad (2.28)$$

Учитывая обозначения (2.26), из (2.28) получаем третью оценку для $\|z\|_{L_2(Q_T)}^2$:

$$\begin{aligned} \|z\|_{L_2(Q_T)}^2 & \leq \theta^4 K_g^2 \left[\frac{T}{1 - \theta^2 K_{\rho,2}} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\Lambda_1 \theta^2}{(1 - \theta^2 K_{\rho,2})^2} \exp \left\{ -\frac{(1 - \theta^2 K_{\rho,2})T}{\Lambda_1 \theta^2} \right\} - \frac{\Lambda_1 \theta^2}{(1 - \theta^2 K_{\rho,2})^2} \right] \|f\|^2. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Из полученных оценок (2.23), (2.24), (2.29), неравенства (2.20) и условия (2.19) вытекает, что оператор A в (2.15) является сжимающим из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. Следовательно, уравнение (2.16) имеет единственное решение $f(x) \in L_2(\Omega)$. Подставляя эту функцию в правую часть уравнения (2.6), найдем функцию $z(t, x) \in W_{2,0}^{1,2}(Q_T)$ как решение прямой задачи (2.6)–(2.8). Тогда в силу леммы 2.2 пара $\{z(t, x), f(x)\}$ будет являться обобщенным решением обратной задачи (2.6)–(2.9).

Единственность решения задачи (2.6)–(2.9) вытекает из леммы 2.2 и сжимаемости оператора A .

Как было отмечено, однозначная разрешимость задачи (2.6)–(2.9) эквивалентна однозначной разрешимости исходной задачи (1.1)–(1.4). Теорема 2.1 доказана.

Обсудим, когда выполняется условие (2.19) в теореме 2.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Условие (2.19) в теореме 2.1 заведомо выполнено при малых θ , т.е. для малых областей Ω .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Пусть в задаче (1.1)–(1.4) $\rho(t, x) = 1$, $g(t, x) = 1$, $\chi(t) = (T - t)t$, $h(t, x) = 0$, $u_0(x)$, $\psi(x)$ – произвольные функции из $W_{2,0}^2(\Omega)$. Тогда условия (А)–(Е), (2.1) теоремы 2.1 заведомо выполнены.

Нетрудно показать, что условие (2.19) в рассматриваемом случае имеет вид

$$24 \min \left\{ \frac{\theta^2}{2T}, \theta^4 \left[\frac{1}{T^2} - \frac{\theta^2}{T^3} (1 - e^{-(T/\theta^2)}) \right] \right\} < 1$$

и оно, очевидно, выполняется либо при малых θ , либо при больших T .

3. Второй вариант условий, достаточных для однозначной разрешимости задачи (1.1)–(1.4). В этом пункте дополнительно к условиям (А)–(D) будем предполагать, что

$$g_t(t, x) \in L_\infty(Q_T), \quad |g_t| \leq K_g^*, \quad K_g^* = \text{const} \geq 0, \quad (3.1)$$

$$h(t, x) \in C(0, T; L_2(\Omega)), \quad h_t(t, x) \in L_2(Q_T),$$

$$\|h_t\|_{L_2(Q_T)} \leq K_h^*, \quad K_h^* = \text{const} \geq 0. \quad (3.2)$$

На протяжении этого пункта через c (возможно, с индексом) будем обозначать любые положительные константы, зависящие от $\Lambda_1, \Lambda_2, \Omega, T, K_g^*, K_\chi(T), K_h^*, K_\rho, K_\psi, g_0(T), K_h, M_0, \theta$.

Как и в п. 2 решение обратной (1.1)–(1.4) задачи будем искать в виде (2.2), где функция $v(t, x)$ является решением прямой задачи (2.3)–(2.5), а пара $\{z(t, x), f(x)\}$ является решением обратной задачи (2.6)–(2.9).

В силу условий (А), (В), (D) из [9] вытекает существование и единственность решения $v(t, x) \in W_{2,0}^{1,2}(Q_T)$ задачи (2.3)–(2.5); при этом в силу условий (А), (3.2) можно повторить рассуждения из [10] (см. также [11]) и получить, что

$$v_t, v_{xx} \in C(0, T; L_2(\Omega)), \quad (3.3)$$

причем справедлива оценка

$$\|v_{xx}(t, \cdot)\| \leq c_1. \quad (3.4)$$

Учитывая (2.10), (Е) и (3.3), как и в случае п. 2, нетрудно показать, что функция $\varphi(x)$ из условия (2.9) принадлежит пространству $W_{2,0}^2(\Omega)$, причем справедлива оценка (2.11), где $K_\varphi = \text{const} \geq 0$ зависит в данном случае от $T, \Omega, \Lambda_1, \Lambda_2, K_h^*, K_\psi, M_0, K_\chi(T)$.

Таким образом, в силу оценки (2.11) изучение однозначной разрешимости обратной задачи (1.1)–(1.4), как и в случае п. 2, эквивалентно исследованию однозначной разрешимости обратной задачи (2.6)–(2.9).

Выведем операторное уравнение относительно неизвестной функции $f(x)$.

Пусть $f(x) \in L_2(\Omega)$ произвольна. Тогда соотношения (2.6)–(2.8) представляют собой первую краевую задачу для нахождения функции $z(t, x)$. В силу [9] решение $z(t, x) \in W_{2,0}^{1,2}(Q_T)$ этой задачи существует, единственно и для него справедлива оценка (2.12). Более того, повторяя рассуждения из [10], в силу (А) и (3.1) получим, что

$$z_t, z_{xx} \in C(0, T; L_2(\Omega)). \quad (3.5)$$

Умножим соотношение (2.6) на $\chi(t)$ и проинтегрируем по t на отрезке $[0, T]$. Учитывая соотношение (2.9), приходим к равенству

$$f(x) = \frac{1}{G(x, T)} \int_0^T \rho(t, x) z_t(t, x) \chi(t) dt - \frac{\Delta \varphi}{G(x, T)}, \quad (3.6)$$

где, как и раньше,

$$G(x, T) \equiv \int_0^T g(t, x) \chi(t) dt,$$

и в силу (C) выполнено (2.14).

Введем линейный оператор B по формуле

$$B(f) = \frac{1}{G(x, T)} \int_0^T \rho(t, x) z_t(t, x) \chi(t) dt, \quad (3.7)$$

где $z(t, x)$ – решение прямой задачи (2.6)–(2.8) при заданной функции $f(x) \in L_2(\Omega)$ в правой части уравнения (2.6).

В силу (A), (E) и (3.5) получаем, что оператор B , определенный в (3.6), является оператором из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$.

Таким образом, соотношение (3.6) можно записать в виде операторного уравнения в $L_2(\Omega)$

$$f = B(f) - \frac{\Delta \varphi}{G(x, T)}. \quad (3.8)$$

ЛЕММА 3.1. Пусть выполнены условия (A)–(E), (3.1), (3.2). Тогда для того, чтобы пара $\{z, f\}$ была обобщенным решением задачи (2.7)–(2.10), необходимо и достаточно, чтобы эта пара удовлетворяла соотношениям (2.7)–(2.9), (3.8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой леммы полностью аналогично доказательству леммы 2.2 из п. 2.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть выполнены условия (A)–(E), (3.1), (3.2). Предположим также, что выполнено неравенство

$$\frac{\Lambda_2^2 K_\chi^2(T)}{g_0^2(T)} \cdot \left[\frac{K_g^2 \nu - \theta^2 K_g^{*2} \Lambda_1}{\Lambda_1^2 \nu^2} (1 - e^{-\nu T}) + \frac{\theta^2 K_g^{*2}}{\Lambda_1 \nu} T \right] < 1, \quad (3.9)$$

где

$$\nu \equiv \left(\frac{1}{\theta^2 \Lambda_2} - \frac{K_{\rho,1}}{\Lambda_1} \right). \quad (3.10)$$

Тогда в цилиндре Q_T существует и единственно решение $\{u(t, x), f(x)\}$ задачи (1.1)–(1.4), причем

$$u_t(t, x), u_{xx}(t, x) \in C(0, T; L_2(\Omega)). \quad (3.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в теореме 2.1, для доказательства однозначной разрешимости задачи (1.1)–(1.4) достаточно проверить сжимаемость оператора B , определенного в (3.7).

В силу условий теоремы имеем неравенство

$$\|B(f)\|^2 \leq \int_{\Omega} \frac{1}{G^2(x, T)} \left(\int_0^T \rho(t, x) z_t(t, x) \chi(t) dt \right)^2 dx \leq \frac{\Lambda_2^2 K_{\chi}^2(T)}{g_0^2(T)} \|z_t\|_{L_2(Q_T)}^2. \quad (3.12)$$

Получим оценку для $\|z_t\|_{L_2(Q_T)}^2$. Повторяя рассуждения из [10], на основании условий (A), (3.1) получаем, что функция $w(t, x) \equiv z_t(t, x)$ является в Q_T решением задачи

$$(\rho w)_t - \Delta w = f(x) g_t(t, x), \quad (t, x) \in Q_T, \quad (3.13)$$

$$w(0, x) = \frac{g(0, x)}{\rho(0, x)} f(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.14)$$

$$w(t, x) = 0, \quad t \in [0, T], \quad x \in \partial\Omega, \quad (3.15)$$

которая получается из задачи (2.6)–(2.8) путем формального дифференцирования по t .

Умножим соотношение (3.13) на $w(t, x)$ и проинтегрируем по Ω . Учитывая (A), (3.1), (1.6), (1.7), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(t, x) w^2(t, x) dx - \frac{1}{2} K_{\rho,1} \int_{\Omega} w^2(t, x) dx + \frac{1}{\theta^2} \int_{\Omega} w^2(t, x) dx \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} w^2(t, x) dx + \frac{1}{2\varepsilon} K_g^{*2} \|f\|^2. \end{aligned}$$

Полагая в последнем неравенстве $\varepsilon = 1/\theta^2$ и учитывая условие (A), получаем, что

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(t, x) w^2(t, x) dx + \left(\frac{1}{\Lambda_2 \theta^2} - \frac{K_{\rho,1}}{\Lambda_1} \right) \int_{\Omega} \rho(t, x) w^2(t, x) dx \leq \theta^2 K_g^{*2} \|f\|^2.$$

Применяя к последнему неравенству лемму Гронуолла и учитывая условие (3.14), а также введенное в (3.10) обозначение, приходим к неравенству

$$\int_{\Omega} \rho(t, x) w^2(t, x) dx \leq \int_{\Omega} \frac{g^2(0, x)}{\rho(0, x)} f^2(x) dx e^{-\nu t} + \theta^2 K_g^{*2} \frac{1}{\nu} (e^{\nu t} - 1) \|f\|^2 e^{-\nu t},$$

откуда

$$\|w(t, \cdot)\|^2 \leq \frac{1}{\Lambda_1} \left[\frac{K_g^2}{\Lambda_1} + \theta^2 K_g^{*2} \frac{1}{\nu} (e^{\nu t} - 1) \right] e^{-\nu t} \|f\|^2.$$

Проинтегрируем последнее неравенство по t в пределах от 0 до T . В результате получим соотношение

$$\|w\|_{L_2(Q_T)}^2 \leq \left[\frac{K_g^2 \nu - \theta^2 K_g^{*2} \Lambda_1}{\Lambda_1^2 \nu^2} (1 - e^{-\nu T}) + \frac{\theta^2 K_g^{*2}}{\Lambda_1 \nu} T \right] \|f\|^2. \quad (3.16)$$

Подставляя (3.16) в оценку (3.12), получим

$$\|B(f)\|^2 \leq \frac{\Lambda_2^2 K_{\chi}^2(T)}{g_0^2(T)} \cdot \left[\frac{K_g^2 \nu - \theta^2 K_g^{*2} \Lambda_1}{\Lambda_1^2 \nu^2} (1 - e^{-\nu T}) + \frac{\theta^2 K_g^{*2}}{\Lambda_1 \nu} T \right] \|f\|^2,$$

откуда в силу условия (3.9) следует сжимаемость оператора B . Условие (3.11) вытекает из (3.3), (3.5) и соотношения (2.2). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Пусть в задаче (1.1)–(1.4) $\rho(t, x), g(t, x) = 1, \chi(t) = 1, h(t, x) = 0, u_0(x), \psi(x)$ – произвольные функции из $W_{2,0}^2(\Omega)$. Тогда условия (A)–(E), (3.1), (3.2) теоремы 3.1 заведомо выполнены.

Условие (3.9) в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{\theta^2}{T}(1 - e^{(-T/\theta^2)}) < 1,$$

и оно выполнено, например, при $\theta^2 < T$.

Таким образом, в рассматриваемом случае задача (1.1)–(1.4) имеет единственное решение либо если область Ω достаточно мала, либо если время T достаточно велико.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Пусть в задаче (1.1)–(1.4) $n = 1, \Omega = (0, l), \rho(t, x) = 3 - \arctg(tx), g(t, x) = 1, \chi(t) = 1, h(t, x) = 0, u_0(x), \psi(x)$ – произвольные функции из $W_{2,0}^2(\Omega)$. Тогда условия (A)–(E), (3.1), (3.2) теоремы 3.1 выполнены.

Условие (3.9) в рассматриваемом случае может быть переписано в виде

$$27 \frac{\theta^2}{T}(1 - e^{(-T/3\theta^2)}) < 1,$$

и оно выполнено, например, при $27\theta^2 < T$.

Таким образом, как и в замечании 3.1, в рассматриваемом случае задача (1.1)–(1.4) имеет единственное решение либо если область Ω достаточно мала, либо если время T достаточно велико.

Заметим, что в рассматриваемом случае коэффициент ρ зависит от обеих переменных t и x , так что полученные в предыдущих работах [1]–[5] результаты, касающиеся обратных задач для параболических уравнений с интегральным переопределением вида (1.4), в данном случае применены быть не могут.

Приведем пример, показывающий существенность условия (3.9) для справедливости теоремы 3.1.

ПРИМЕР 3.1. В прямоугольнике $P \equiv [0, 1] \times [0, \pi]$ ($n = 1$) рассмотрим следующую обратную задачу определения пары $\{u(t, x), f(x)\}$:

$$u_t - u_{xx} = f(x) \cdot (3t^2 + 4t - 2), \quad (3.17)$$

$$u(0, x) = 0, \quad x \in [0, \pi], \quad (3.18)$$

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \quad t \in [0, 1], \quad (3.19)$$

$$\int_0^1 u(t, x) dt = 0. \quad (3.20)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что все условия теоремы 3.1, за исключением (3.9), здесь выполнены.

С другой стороны, пара $\{(2t - 3t^2) \sin x, -\sin x\}$ является нетривиальным решением задачи (3.17)–(3.20).

Таким образом, условие (3.9) является существенным для справедливости утверждения теоремы 3.1.

4. О фредгольмовой разрешимости обратной задачи (1.1)–(1.4).

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть выполнены условия (А)–(Е), (2.1). Тогда оператор A , определенный формулой (2.15), является вполне непрерывным оператором в $L_2(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{f_n(x)\}$ – ограниченная в $L_2(\Omega)$ последовательность функций. Пусть $\{z_n(t, x)\}$ – решение задачи (2.6)–(2.8) с выбранной $f_n(x)$ в правой части уравнения (2.6). Как было доказано в п. 2, $z_n(t, x) \in W_{2,0}^{1,2}(Q_T)$, причем справедлива оценка (2.12). В силу этой оценки и компактности вложения $W_{2,0}^{1,2}(Q_T)$ в $C(0, T; L_2(\Omega))$ найдется функция $z^*(t, x) \in W_{2,0}^{1,2}(Q_T)$ и подпоследовательность $n_k \rightarrow \infty$ такие, что

$$z_{n_k}(t, x) \rightarrow z^*(t, x), \quad k \rightarrow \infty, \quad (4.1)$$

в пространстве $C(0, T; L_2(\Omega))$.

Но тогда в силу условий нашей теоремы

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{G(x, T)} \int_0^T z_{n_k}(t, x)(\rho\chi)_t dt - \frac{1}{G(x, T)} \int_0^T z^*(t, x)(\rho\chi)_t dt \right\|^2 \\ & \leq \frac{1}{g_0^2(T)} \int_0^T \int_{\Omega} |z_{n_k}(t, x) - z^*(t, x)|^2 (\rho\chi)_t^2 dx dt \\ & \leq c_1 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\Omega} |z_{n_k}(t, x) - z^*(t, x)|^2 dx, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $c_1 = \text{const} > 0$ зависит от T, Ω и констант из условий (А)–(Е), (2.1).

Правая часть неравенства (4.2) стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$ в силу (4.1), а это с учетом определения оператора A означает, что данный оператор вполне непрерывен в $L_2(\Omega)$. Теорема 4.1 доказана.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть выполнены условия (А)–(Е), (3.1). Предположим дополнительно, что

$$|\rho_x(t, x)| \leq K_\rho^*, \quad (t, x) \in Q_T. \quad (4.3)$$

Тогда оператор B , определенный формулой (3.7), является вполне непрерывным оператором в $L_2(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку, как показано в теореме 3.1, функция $w(t, x) \equiv z_t(t, x)$ является обобщенным решением задачи (3.13)–(3.15), то в силу [8, с. 164–166] имеем оценку

$$\|w\|_{W_2^1(Q_T)} \leq c_2 \|f\|^2, \quad (4.4)$$

где $c_2 = \text{const} > 0$ зависит от T, Ω и констант из условий (А)–(Е), (3.1).

Положим

$$J(x) = \int_0^T \rho(t, x) \chi(t) z_t(t, x) dx \equiv \int_0^T \rho(t, x) \chi(t) w(t, x) dx.$$

В силу условий нашей теоремы и (4.4) имеем оценку

$$\|J_x\|^2 \leq 2K_\chi^2(T) \int_{Q_T} [\rho_x^2 w^2 + \rho^2 w_x^2] dx dt \leq c_3 \|f\|^2. \quad (4.5)$$

Из оценки (4.5), компактности вложения $W_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ с учетом определения оператора B вытекает, что указанный оператор вполне непрерывен в $L_2(\Omega)$. Теорема 4.2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Из доказанных теорем 4.1 и 4.2 с учетом лемм 2.2 и 3.1 следует, что при условиях, наложенных в этих теоремах, обратная задача (1.1)–(1.4) эквивалентна операторным уравнениям второго рода с вполне непрерывными операторами (уравнения (2.16) и (3.8) соответственно). Следовательно, в условиях теорем 4.1 и 4.2 из единственности решения обратной задачи (1.1)–(1.4) будет следовать существование ее решения.

Автор благодарит профессора А.И. Прилепко и участников руководимого им семинара за полезное обсуждение результатов работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Прилепко А.И., Костин А.Б. О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным переопределением // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 4. С. 49–68.
- [2] Прилепко А.И., Костин А.Б. Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении. II // Сиб. матем. ж. 1993. Т. 34. № 5. С. 147–162.
- [3] Прилепко А.И., Тихонов И.В. Восстановление неоднородного слагаемого в абстрактном эволюционном уравнении // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 2. С. 167–188.
- [4] Тихонов И.В., Эйдельман Ю.С. Вопросы корректности прямых и обратных задач для эволюционного уравнения специального вида // Матем. заметки. 1994. Т. 56. № 2. С. 99–113.
- [5] Прилепко А.И., Тихонов И.В. Принцип позитивности решения в линейной обратной задаче и его применение к коэффициентной задаче теплопроводности // Докл. РАН. 1999. Т. 364. № 1. С. 21–23.
- [6] Zegnal A. Un résultat d'existence pour problème inverse parabolique quasi lineaire // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. 2001. V. 332. P. 909–912.
- [7] Прилепко А.И., Ткаченко Д.С. Свойства решений параболического уравнения и единственность решения обратной задачи об источнике с интегральным переопределением // ЖВМиМФ. 2003. Т. 43. № 4. С. 562–570.
- [8] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
- [9] Алхутов Ю.А., Мамедов И.Т. Первая краевая задача для нелинейных параболических уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами // Матем. сб. 1986. Т. 173. № 12. С. 477–500.
- [10] Камынин В.Л. Об однозначной разрешимости обратной задачи для параболических уравнений с условием финального переопределения // Матем. заметки. 2003. Т. 73. № 2. С. 217–227.
- [11] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.

Московский государственный инженерно-физический институт
E-mail: image@consultant.ru

Поступило
04.06.2003
Исправленный вариант
07.06.2004