Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Кудрявцев, Поперечники классов функций конечной гладкости в пространствах Соболева, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 4, 535–539

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2514>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 14:11:57

УДК 517.5

ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОЙ ГЛАДКОСТИ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

С. Н. Кудрявцев

В заметке описана слабая асимптотика поведения колмогоровского, гельфандовского, линейного, александровского и энтропийного поперечников единичного шара пространства $W_p^l H^\omega(I^d)$ в пространстве $W_q^m(I^d)$.

Библиография: 20 названий.

1. Постановка задачи об оптимальных методах и средствах аппроксимации компактных классов функций принадлежит А. Н. Колмогорову. Она привела к определению и изучению различных поперечников, оценивающих точность приближения классов средствами разных типов. Наиболее близкими к теме настоящей заметки являются исследования слабой асимптотики поперечников в L_q -пространствах классов гладких функций на d -мерном кубе I^d или торе T^d , задаваемых соответствующим ограничением либо на L_p -норму старших производных, либо на модуль непрерывности в L_p старших производных. Некоторое представление о развитии этих исследований можно составить на основе работ [1]–[20]. Естественным является стремление описать асимптотику поперечников классов функций конечной гладкости в пространствах Соболева, чему и посвящена заметка.

2. В этом пункте введем обозначения, относящиеся к функциональным классам и пространствам, рассматриваемым в настоящей работе.

Для $d \in \mathbb{N}$ в пространстве $\mathbb{R}^d$ фиксируем норму

$$\|x\| = \max_{j=1, \dots, d} |x_j|, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

и через I^d обозначим куб

$$I^d = \{x \in \mathbb{R}^d : 0 < x_j < 1, j = 1, \dots, d\}.$$

Как обычно, через $\mathbb{Z}_+^d$ будем обозначать множество

$$\{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{Z}^d : \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, d\},$$

через $\mathbb{Z}_{+l}^d$, $l \in \mathbb{Z}_+$, обозначим множество

$$\{\lambda \in \mathbb{Z}_+^d : |\lambda| \leq l\}, \quad \text{где } |\lambda| = \sum_{j=1}^d \lambda_j,$$

а через $\mathbb{Z}_{+l}^d$ — множество

$$\{\lambda \in \mathbb{Z}_+^d : |\lambda| = l\}.$$

Для измеримого по Лебегу множества $D \subset \mathbb{R}^d$ при $1 \leq p \leq \infty$ через $L_p(D)$, как обычно, обозначается пространство всех вещественных измеримых на D функций f , для которых определена норма

$$\|f\|_{L_p(D)} = \begin{cases} \left(\int_D |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{x \in D} |f(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Для области $D \subset \mathbb{R}^d$ при $1 \leq p \leq \infty$, $l \in \mathbb{Z}_+$ через $W_p^l(D)$ обозначается пространство всех функций $f \in L_p(D)$, для которых для каждого $\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d$ обобщенная производная

$$\mathcal{D}^\lambda f = \frac{\mathcal{D}^{|\lambda|} f}{\mathcal{D}x_1^{\lambda_1} \dots \mathcal{D}x_d^{\lambda_d}}$$

принадлежит $L_p(D)$ с нормой

$$\|f\|_{W_p^l(D)} = \max_{\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d} \|\mathcal{D}^\lambda f\|_{L_p(D)}.$$

Для области $D \subset \mathbb{R}^d$ и вектора $h \in \mathbb{R}^d$, как обычно, через D_h обозначим множество

$$D_h = \{x \in D : x + th \in D \quad \forall t \in [0, 1]\}.$$

Для функции f , заданной в области $D \subset \mathbb{R}^d$, определим в D_h ее разность $\Delta_h f$ с шагом $h \in \mathbb{R}^d$ равенством

$$(\Delta_h f)(x) = f(x + h) - f(x), \quad x \in D_h.$$

Пусть ω — модуль непрерывности, т.е. непрерывная вещественная функция на $[0, \infty)$ такая, что

$$0 = \omega(0) \leq \omega(\delta) \leq \omega(\delta + \sigma) \leq \omega(\delta) + \omega(\sigma) \quad \text{при } \delta, \sigma \in [0, \infty).$$

Тогда для области $D \subset \mathbb{R}^d$, $l \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq p \leq \infty$ и ω через $W_p^l H^\omega(D)$ обозначим пространство всех функций $f \in W_p^l(D)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{W_p^l H^\omega(D)} = \max \left(\|f\|_{W_p^l(D)}, \max_{\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d} \sup_{h \in \mathbb{R}^d} \text{vrai} \left(\frac{1}{\omega(\|h\|)} \right) \|\Delta_h \mathcal{D}^\lambda f\|_{L_p(D_h)} \right).$$

Для банахова пространства X через $B(X)$ будем обозначать единичный шар

$$B(X) = \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}.$$

Нас будут интересовать поперечники шара $B(W_p^l H^\omega(I^d))$ в пространстве $W_q^m(I^d)$.

3. В этом пункте напомним определение поперечников (см. [13]), с которыми мы имеем дело в статье.

Пусть C – подмножество банахова пространства X и $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда n -поперечником по Колмогорову множества C в пространстве X называется величина

$$d_n(C, X) = \inf_{M \in \mathcal{M}_n(X)} \sup_{x \in C} \inf_{y \in M} \|x - y\|_X,$$

где $\mathcal{M}_n(X)$ – совокупность всех плоскостей M в X , у которых $\dim M \leq n$.

n -поперечником по Гельфанду множества C в пространстве X называется величина

$$d^n(C, X) = \inf_{M \in \mathcal{M}^n(X)} \sup_{x \in C \cap M} \|x\|_X,$$

где $\mathcal{M}^n(X)$ – множество всех замкнутых линейных подпространств M в X , у которых $\text{codim } M \leq n$.

Линейным n -поперечником множества C в пространстве X называется величина

$$\lambda_n(C, X) = \inf_{A \in \mathcal{L}_n(X)} \sup_{x \in C} \|x - Ax\|_X,$$

где $\mathcal{L}_n(X)$ – множество всех непрерывных аффинных отображений $A: X \rightarrow X$, у которых $\text{rank } A \leq n$.

n -поперечником по Александрову множества C в пространстве X называется величина

$$a_n(C, X) = \inf_{\phi \in \mathcal{A}_n(C, X)} \sup_{x \in C} \|x - \phi(x)\|_X,$$

где $\mathcal{A}_n(C, X)$ – множество всех непрерывных отображений $\phi: C \rightarrow X$, для которых существует компакт $K_\phi \subset X$ такой, что $\text{Im } \phi \subset K_\phi$ и $\dim K_\phi \leq n$.

Наконец, энтропийным n -поперечником множества C в пространстве X будем называть величину

$$\varepsilon_n(C, X) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \exists x^1, \dots, x^{2^n} \in X : C \subset \bigcup_{j=1}^{2^n} (x^j + \varepsilon B(X)) \right\}.$$

Напомним, что, как обычно, через ℓ_p^n при $1 \leq p \leq \infty$, $n \in \mathbb{N}$, обозначается линейное пространство $\mathbb{R}^n$ с фиксированной в нем нормой

$$\|x\|_{\ell_p^n} = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \max_{j=1, \dots, n} |x_j|, & p = \infty, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

4. В начале этого пункта отметим, что в процессе исследований была выработана единая схема доказательства теорем об асимптотике поперечников, в которой поперечники классов гладких функций в пространствах с интегральной нормой оцениваются через соответствующие поперечники ℓ_p -шаров в ℓ_q -пространствах. В основе этой схемы при выводе верхних оценок лежит представление на классе C тождественного оператора в виде суммы ряда в пространстве $X = L_q$:

$$x = \sum_{j=0}^{\infty} V_j x, \quad x \in C \subset X,$$

из непрерывных операторов V_j со свойствами: V_j отображает X в подпространство X_j размерности $R_j < \infty$, для которого существует изоморфизм $\mathcal{I}_j: X_j \rightarrow \mathbb{R}^{R_j}$, при котором нормы $\|x\|_{L_q}$ и $\|\mathcal{I}_j x\|_{\ell_q^{R_j}}$ связаны подходящим соотношением, а образ $V_j(C)$ лежит в L_p -шаре соответствующего радиуса. Подобная схема получения оценок поперечников применена и для шара $B(W_p^l H^\omega(I^d))$ в пространстве $W_q^m(I^d)$. Однако в этом случае пришлось использовать иные, нежели в [20], средства приближения, причем построенные автором системы подпространств X_j и операторов V_j в работах других авторов не обнаружены. Кроме того, в рассматриваемой ситуации, в отличие от упомянутой выше, при оценке сверху требуется еще и неравенство Бернштейна для подпространств X_j .

Теперь дадим описание слабой асимптотики поперечников шара $B(W_p^l H^\omega(I^d))$ в пространстве $W_q^m(I^d)$.

ТЕОРЕМА. Пусть $l, m \in \mathbb{Z}_+$, $m \leq l$, $d \in \mathbb{N}$, $1 \leq p, q \leq \infty$ и ω – произвольный модуль непрерывности, причем при $p < q$ существует константа $c(l, m, d, p, q, \omega) > 0$ такая, что при $\delta \in [0, 1]$ соблюдается условие

$$\int_0^1 t^{l-m-d/p+d/q-1} \omega(\delta t) dt \leq c\omega(\delta).$$

Тогда для $C = B(W_p^l H^\omega(I^d))$, $X = W_q^m(I^d)$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} d_n(C, X) &\asymp \begin{cases} n^{-(l-m)/d+(1/p-1/q)+\omega(n^{-1/d})} & \text{при } q \leq p \text{ или } p < q \leq 2, \\ n^{-(l-m)/d+(1/p-1/2)+\omega(n^{-1/d})} & \text{при } q > \max(2, p), \\ l - m - \frac{d}{p} - \left(\frac{d}{2} - \frac{d}{p}\right)_+ > 0, \end{cases} \\ d^n(C, X) &\asymp \begin{cases} n^{-(l-m)/d+(1/p-1/q)+\omega(n^{-1/d})} & \text{при } q \leq p \text{ или } 2 \leq p < q, \\ n^{-(l-m)/d+(1/2-1/q)+\omega(n^{-1/d})} & \text{при } p < \min(2, q), \\ l - m - \frac{d}{q'} - \left(\frac{d}{2} - \frac{d}{q'}\right)_+ > 0, \end{cases} \\ \lambda_n(C, X) &\asymp \begin{cases} n^{-(l-m)/d+(1/p-1/q)+\omega(n^{-1/d})} & \text{при } q \leq p \text{ или } p < q \leq 2 \\ & \text{или } 2 \leq p < q, \\ n^{-(l-m)/d+1/2-1/q+(1/p+1/q-1)+\omega(n^{-1/d})} & \text{при } p < 2 < q, \\ l - m - d - \left(\frac{d}{p'} - \frac{d}{q}\right)_+ > 0, \end{cases} \\ a_n(C, X) &\asymp n^{-(l-m)/d}\omega(n^{-1/d}) \quad \text{при } q \leq p \text{ или } 1 < p < q, \quad l - m - \frac{d}{p} + \frac{d}{q} > 0, \\ \varepsilon_n(C, X) &\asymp n^{-(l-m)/d}\omega(n^{-1/d}) \quad \text{при } l - m - d > 0. \end{aligned}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Kolmogoroff A. Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse // Ann. Math. 1936. V. 37. P. 107–111.
- [2] Стечкин С. Б. О наилучших приближениях заданных классов функций любыми полиномами // УМН. 1954. Т. 9. № 1. С. 133–134.
- [3] Колмогоров А. Н. Оценки минимального числа элементов – сетей в различных функциональных пространствах и их применение к вопросу о представимости функций нескольких переменных суперпозициями функций меньшего числа переменных // УМН. 1955. Т. 10. № 1. С. 192–193.
- [4] Тихомиров В. М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория приближений // УМН. 1960. Т. 15. № 3. С. 81–120.
- [5] Бабенко К. И. Приближение тригонометрическими полиномами в некоторых классах периодических функций нескольких переменных // Докл. АН СССР. 1960. Т. 132. № 2. С. 982–985.
- [6] Митягин Б. С. Приближения функций в пространствах L^p и C на торе // Матем. сб. 1962. Т. 58(100). № 4. С. 397–414.
- [7] Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Кусочно-полиномиальные приближения функций классов W_p^α // Матем. сб. 1967. Т. 73. № 3. С. 331–355.
- [8] Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближения. Дисс. ... д. ф.-м. н. М.: МГУ, 1969.
- [9] Маковоз Ю. И. Об одном приеме оценки снизу поперечников множеств в банаховом пространстве // Матем. сб. 1972. Т. 87. № 1. С. 136–146.
- [10] Исмагилов Р. С. Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами // УМН. 1974. Т. 29. № 3. С. 161–178.
- [11] Майоров В. Е. Дискретизация задачи о поперечниках // УМН. 1975. Т. 30. № 6. С. 179–180.
- [12] Стесин М. И. Александровские поперечники конечномерных множеств и классов гладких функций // Докл. АН СССР. 1975. Т. 220. № 6. С. 1278–1281.
- [13] Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближения. М.: Изд-во МГУ, 1976.
- [14] Капин Б. С. Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1977. V. 41. № 2. P. 334–351.
- [15] Майоров В. Е. О линейных поперечниках соболевских классов // Докл. АН СССР. 1978. V. 243. № 5. P. 1127–1130.
- [16] Höllig K. Diameters of classes of smooth functions // Quantitative Approximation. New York: Springer, 1980. P. 163–176.
- [17] Темляков В. Н. Приближение периодических функций нескольких переменных тригонометрическими полиномами и поперечники некоторых классов функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985. Т. 49. № 5. С. 986–1030.
- [18] Динь Зунг. Приближение гладких функций многих переменных средствами гармонического анализа. Дисс. ... д. ф.-м. н. М.: МГУ, 1985.
- [19] Галеев Э. М. Поперечники по Колмогорову классов периодических функций одной и нескольких переменных // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 2. С. 418–429.
- [20] Кудрявцев С. Н. Поперечники классов гладких функций // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59. № 4. С. 81–104.

Вычислительный центр РАН, г. Москва
E-mail: a_kudr@ccas.ru

Поступило
 14.12.2001
 Исправленный вариант
 03.02.2004