Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. П. Куфарев, Н. Г. Никулина, Об интегрировании по уровням функций класса ACL, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 4, 540–543

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2515>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 09:06:51

УДК 517.518

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ПО УРОВНЯМ ФУНКЦИЙ КЛАССА ACL

Б. П. Куфарев, Н. Г. Никулина

Классическая формула повторного интегрирования распространяется на множества уровня ACL -функций.

Библиография: 9 названий.

Обозначим через ACL_p множество всех непрерывных в области $G \subset \mathbb{R}^n$ функций $r(x)$ класса $L^1_{p,loc}$ в области G . Пусть H – хаусдорфова $(n-1)$ -мера и $E_t = \{x \in E \mid r(x) = t\}$ при $E \subset G$.

Для абсолютно непрерывных (по Кронроду [1]) на замкнутом прямоугольном параллелепипеде (брусе) $I \subset G$ функций $r(x)$ формула

$$\int_I |\nabla r(x)| dx = \int_{r(I)} H(I_t) dt =: V(r, I)$$

доказана еще в начале 50-х годов российскими математиками, см. [1], [2]. Потом она появилась у де Джорджи [3] в предположении, что $r(x)$ дифференцируема, и была обобщена Г. Федерером [4] на случай липшицевых отображений $r(x)$ многообразия размерности n в m -мерное многообразие, $n \geq m$. О дальнейшем распространении ее см. [5].

ЛЕММА. Формула (1) верна для $r(x) \in ACL_1(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функция $r(x)$ принадлежит соболевскому классу $W^1_{1,loc}(G)$, существует, как известно, последовательность функций $r_l \in C^\infty(G)$ такая, что r_l равномерно сходятся к r на каждом компакте $K \subset G$ и $\nabla r_l \rightarrow \nabla r$ в $L_1(K)$ при $l \rightarrow \infty$, $l = 1, 2, \dots$. Но для r_l на любом замкнутом брусе $I \subset G$ вариация

$$V(r_l, I) = \int_I |\nabla r_l| dx,$$

см. (1), и так как n -мерная вариация $V(r, I)$ является функционалом, полунепрерывным снизу относительно равномерной сходимости (см. [2, § 19 и § 22]), то

$$V(r, I) \leq \liminf_l V(r_l, I) = \lim_l \int_I |\nabla r_l| dx = \int_I |\nabla r| dx, \quad (*)$$

т.е. n -мерная вариация функции r ограничена на каждом замкнутом брусе $I \subset G$.

Докажем, что из (*) следует абсолютная непрерывность вариации $V(r, A)$ как функции множества $A \subset B$, где B – произвольная фиксированная ограниченная область с замыканием $\overline{B} \subset G$. Действительно, $\forall \varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что если $e \subset B$ и $\text{mes}_n e < \delta$, то

$$\int_e |\nabla r| dx < \varepsilon.$$

Пусть $A \subset B$ – ограниченное борелевское множество с мерой меньше δ . Покроем A счетной системой входящих в B и взаимно непересекающихся полуоткрытых брусков $\{I_j\}$, $j = 1, 2, \dots$, с суммой объемов меньше δ (границы брусков параллельны координатным плоскостям). Тогда в силу полной аддитивности n -мерной вариации на классе борелевских множеств и в силу (*)

$$V(r, A) \leq V\left(r, \bigcup_I I_j\right) = \sum_j V(r, I_j) \leq \sum_j \int_{I_j} |\nabla r| dx < \varepsilon.$$

Учитывая доказанную таким образом абсолютную непрерывность вариации V и ограниченность ее на B , на основании теоремы 32 из [1] (см. также [2, с. 107–110]) имеем

$$V(r, I) = \int_I |\nabla r(x)| dx, \quad (1)$$

т.е. на самом деле в (*) мы имеем равенство.

Из леммы следует

ТЕОРЕМА 1. Пусть множество $M \subset G$ измеримо по Лебегу и функция $r \in \text{ACL}_1(G)$. Тогда

$$\int_M |\nabla r(x)| dx = \int_{r(G)} H_t(M) dt. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{K}$ – кольцо подмножеств множества G , которые являются объединениями конечного числа полуоткрытых брусков. В силу известных свойств хаусдорфовой меры H (см. [6, с. 70–86], или [7, с. 111–112]) функция

$$\mu(M) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{r(G)} H_t(M) dt$$

есть мера (в смысле [8, § 7]) на σ -алгебре $S(\mathcal{K})$ борелевских подмножеств $M \subset G$, порожденной кольцом $\mathcal{K}$. Но μ совпадает на $\mathcal{K}$ с мерой

$$\lambda(M) = \int_M |\nabla r| dx,$$

поскольку из (1) следует совпадение μ и λ на полуоткрытых брусках, входящих в G . Так как мера λ является σ -конечной, она совпадает с μ на $S(\mathcal{K})$ (см. [8, § 13]). Но всякое измеримое по Лебегу множество $M \subset G$ представимо в виде $M = M_0 \cup A$, $A \subset A_0$, где $M_0, A_0 \in S(\mathcal{K})$ и $\text{mes}_n A_0 = 0$ ([8, § 13]). Поэтому равенство (2) распространяется на все лебеговские подмножества области G .

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция Φ неотрицательна и измерима по Лебегу в области G , а функция $r \in \text{ACL}_1(G)$. Тогда

$$\int_G \Phi(x) |\nabla r(x)| dx = \int_{r(G)} dt \int_t^G \Phi(x) dH^x, \quad (3)$$

где интегрирование по G_t понимается как интегрирование функции $\Phi(x)$, определенной на пространстве G_t с мерой H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $\Phi(x)$ – простая функция, т.е. существуют l взаимно непересекающихся измеримых множеств $M_1, \dots, M_l$ и l действительных чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ таких, что

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^l \alpha_k \chi_{M_k}(x),$$

где χ_{M_k} – характеристическая функция множества $M_k \subset G$. Тогда на G_t

$$\Phi(x) = \Phi \cdot \chi_{G_t}(x) = \sum_{k=1}^l \alpha_k \chi_{M_t^k}(x).$$

Следовательно,

$$\int_G \Phi |\nabla r| dx = \sum_{k=1}^l \alpha_k \int_{M_k} |\nabla r| dx = \int_{r(G)} \sum_{k=1}^l \alpha_k \int_t^G \chi_{M_t^k} dH^x dt = \int_{r(G)} dt \int_t^G \Phi dH^x.$$

Если теперь $\Phi(x)$ – произвольная неотрицательная измеримая функция, существует, как известно, возрастающая последовательность $(\Phi_i)_{i=1,2,\dots}$ неотрицательных простых функций, сходящаяся к Φ в области G , [8, с. 88]. Согласно известной теореме Леви–Лебега об интегрировании монотонно возрастающих последовательностей неотрицательных измеримых функций [8, § 27]

$$\int_G \Phi |\nabla r| dx = \lim_i \int_G \Phi_i |\nabla r| dx = \lim_i \int_{r(G)} dt \int_t^G \Phi_i dH^x.$$

Доказательство теоремы 2 теперь заканчивается применением указанной теоремы Леви–Лебега сначала к функциям

$$\mathcal{F}_i(t) = \int_t^G \Phi_i(x) dH^x,$$

а потом к функциям Φ_i .

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $r \in \text{ACL}_1(G)$ и пусть $\Phi(x)$ определена в области G , измерима по Борелю и зависит только от $r(x)$, т.е. $\Phi(x) = f \circ r(x)$. Для того, чтобы функция $\Phi \cdot |\nabla r|$ была суммируемой на G , необходимо и достаточно, чтобы функция $f(t) \cdot H(G_t)$ была суммируемой на $r(G)$. При этом

$$\int_G \Phi |\nabla r| dx = \int_{r(G)} f(t) H(G_t) dt. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $f(t) \cdot H(G_t)$ суммируема на $r(G)$, то $|f(t)| \times H(G_t)$ также суммируемая на $r(G)$ функция. В силу теоремы 2

$$\int_G |\Phi(x)| \cdot |\nabla r(x)| dx = \int_{r(G)} |f(t)| \cdot H(G_t) dt,$$

откуда и следует суммируемость $\Phi |\nabla r|$ на G . Аналогично доказывается обратное утверждение.

ЗАМЕЧАНИЕ. Формула (4) является обобщением известной формулы, сводящей кратные интегралы, в которых фигурируют только функции от радиуса t (определенные в $\mathbb{R}^n$), к однократным интегралам (см. [9, с. 40]). В этом последнем случае $G = \mathbb{R}^n$, G_t — сфера радиуса t и

$$H(G_t) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)} n t^{n-1};$$

в знаменателе стоит гамма-функция Эйлера.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кронрод А. С. О функциях двух переменных // УМН. 1950. Т. 5. № 1. С. 24–134.
- [2] Витушкин А. Г. О многомерных вариациях. М.: ГИТТЛ, 1955.
- [3] Di Giorgi E. Su una teoria generale della misura $(r - 1)$ -dimensionale in un spazio ad r dimensioni // Ann. Math. Pura Appl. Der. (4). 1954. V. 36. P. 191–213.
- [4] Federer H. Curvature measure // Trans. Amer. Math. Soc. 1959. V. 93. № 3. P. 418–491.
- [5] Fleming W. H., Rishel R. An integral formula for total gradient variation // Arch. Math. 1960. V. 11. № 3. P. 218–222.
- [6] Сакс С. Теория интеграла. М.: ИЛ, 1949.
- [7] Буземан Г. Выпуклые поверхности. М.: Наука, 1964.
- [8] Халмош П. Теория меры. М.: ИЛ, 1953.
- [9] Шварц Л. Математические методы для физических наук. М.: Мир, 1965.