Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Лебедев, Общая схема максимумов сумм независимых случайных величин и ее приложения, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 4, 544–550

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2516>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 05:54:58

УДК 519.214.4

ОБЩАЯ СХЕМА МАКСИМУМОВ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

А. В. Лебедев

Вводится общая схема максимумов сумм независимых случайных величин. Доказана теорема о сходимости максимумов по вероятности. Рассмотрены ее приложения для больших скачков случайных блужданий и экстремумов полей дробового шума в случае правильно меняющихся хвостов. Получены невырожденные предельные законы.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. Простейшая схема максимумов сумм имеет вид

$$\zeta_{m,n} = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n \xi_{i,j}, \quad (1)$$

где случайные величины $\xi_{i,j}$, $i \geq 1$, $j \geq 1$, независимы и одинаково распределены.

Асимптотическое поведение величин $\zeta_{m,n}$ при $m, n \rightarrow \infty$ впервые изучалось в [1]. Некоторые новые результаты типа невырожденных предельных законов были получены в [2]. Модель (1) может описывать, например, время выполнения однотипных работ, проводимых параллельно, если каждая из них делится на множество фаз [3], а также некоторые нормы матриц из независимых случайных элементов [2] и др.

Далее будет построена общая схема, допускающая случайные и пересекающиеся множества индексов слагаемых сумм при произвольном числе этих сумм, по которым берется максимум. Будет доказана одна предельная теорема для случая неотрицательных слагаемых и показано, как она может быть применена к изучению больших скачков случайных блужданий [4] и экстремумов полей дробового шума [5] с правильно меняющимися хвостами амплитуд.

2. Описание модели и основные результаты. Пусть задан случайный процесс $\Upsilon = \{\Upsilon(t), t \in T\}$, значениями которого являются конечные классы конечных подмножеств $\mathbf{N}$, а параметрическое множество T содержит бесконечно много элементов.

Во избежание проблем в определении процесса с нечисловыми значениями заметим, что множество конечных классов конечных подмножеств $\mathbf{N}$ счетно, так что можно установить взаимно однозначное соответствие между $\Upsilon(t)$ и некоторым случайным процессом $\Upsilon^*(t)$ со значениями в $\mathbf{N}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 03-01-00724 и № 04-01-00700, и программы "Ведущие научные школы", грант № НШ 1758.2003.1.

Пусть задано семейство $\Xi = \{\xi_{i,t}, i \in \mathbf{N}, t \in T\}$ неотрицательных случайных величин, независимых и одинаково распределенных при любом фиксированном значении параметра t .

Полагаем, что Υ и Ξ независимы.

Для любых $A \subset \mathbf{N}, t \in T$ обозначим максимум набора случайных величин $\{\xi_{i,t}, i \in A\}$ через $M_t(A)$, r -й максимум (т.е. число, стоящее r -м с конца в вариационном ряду) через $M_t^{(r)}$, сумму через $S_t(A)$.

Пусть $U(t) = \bigcup_{A \in \Upsilon(t)} A$.

Введем случайные процессы, порожденные Υ и Ξ :

$$\begin{aligned}\zeta(t) &= \sup_{A \in \Upsilon(t)} S_t(A), & \kappa(t) &= \sup_{A \in \Upsilon(t)} |A|, & \nu(t) &= |U(t)|, \\ \mu_1(t) &= M_t(U(t)), & \mu_r(t) &= M_t^{(r)}(U(t)),\end{aligned}$$

где через $|A|$ обозначается число элементов множества A .

Предполагается, что $\nu(t) < \infty$ почти наверное (п.н.) при всех $t \in T$, откуда следует конечность п.н. всех процессов, введенных выше.

Нас интересует предельное поведение $\zeta(t)$ при $t \rightarrow \infty$.

Если $T = \mathbf{N}$ или $T = \mathbb{R}_+$, используем стандартное понятие предела действительной функции $f(t)$ при $t \rightarrow \infty$. В других случаях (например, когда процесс параметризован ограниченными измеримыми областями в конечномерном пространстве) понятие такого предела вводится дополнительно.

Пусть существует случайный процесс $\rho(t)$ со значениями в $\mathbb{Z}_+$, измеримый относительно Υ , такой, что $\rho(t) \geq 1$ при $\nu(t) \geq 1$, $\rho(t) \leq \nu(t)$ п.н. при всех $t \in T$.

Обозначим через $\pi(t)$ вероятность того, что для множества B , равновероятно выбранного среди всех подмножеств $U(t)$, состоящих из $\rho(t)$ элементов, имеет место

$$\sup_{A \in \Upsilon(t)} |A \cap B| > 1.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия

$$(\kappa(t) - 1) \frac{\mu_{\rho(t)}(t)}{\mu_1(t)} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad (2)$$

$$\pi(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Тогда

$$\frac{\zeta(t)}{\mu_1(t)} \xrightarrow{\mathbf{P}} 1, \quad t \rightarrow \infty. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что по определению $\zeta(t) \geq \mu_1(t)$ и, следовательно, нужно получить лишь оценку для $\zeta(t)$ сверху.

При каждом $t \in T$ подмножество $I(t)$ индексов $\rho(t)$ наибольших случайных величин в наборе $\{\xi_{i,t}, i \in U(t)\}$ оказывается выбранным равновероятно среди всех множеств такого размера в силу независимости Υ и Ξ . Таким образом, по (3) вероятность того,

что хоть в одной сумме $S_t(A)$ окажется более одного слагаемого из $\rho(t)$ наибольших, стремится к нулю.

На множестве $\{\omega : \sup_{A \in \mathcal{T}(t)} |A \cap I(t)| \leq 1\}$, вероятность которого стремится к единице, имеет место равномерная оценка $S_t(A) \leq \mu_1(t) + (\kappa(t) - 1)\mu_{\rho(t)}(t)$, откуда следует

$$\zeta(t) \leq \mu_1(t) + (\kappa(t) - 1)\mu_{\rho(t)}(t).$$

В силу (2) отсюда получаем (4).

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $\kappa(t) \xrightarrow{P} 1$ при $t \rightarrow \infty$, то (2) выполняется при любом $\rho(t)$.

Это очевидно, поскольку $\mu_{\rho(t)}(t) \leq \mu_1(t)$.

Необходимо прояснить вопрос, когда еще условия теоремы 1 могут выполняться одновременно. Для этого понадобятся следующие утверждения о свойствах порядковых статистик в случае правильно меняющихся хвостов распределений.

3. Некоторые свойства порядковых статистик. Пусть $X_n, n \geq 1$, независимы и имеют распределение $F(x)$ с правильно меняющимся хвостом $\bar{F}(x) \sim x^{-\alpha} L(x)$, $x \rightarrow \infty, \alpha > 0, L(x)$ — медленно меняющаяся функция [6, с. 317]. Обозначим максимум $X_1, \dots, X_n$ через $\tilde{X}_n$ и r -й максимум через $\tilde{X}_n^{(r)}$.

Введем функцию $u(y) > 0, y \geq 0$, такую, что

$$y\bar{F}(u(y)) \rightarrow 1, \quad y \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Можно взять, например, $u(y) = \sup\{x > 1 : y\bar{F}(x) \geq 1\}$; тогда в силу правильного изменения хвоста будет выполняться (5).

Из определения (5) следует, что $u(y') \sim u(y'')$ при $y' \sim y'' \rightarrow \infty$ и

$$u(y) \sim y^{1/\alpha + o(1)}, \quad y \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Заметим, что для максимумов случайных величин $X_n, n \geq 1$, имеет место невырожденный предельный закон [6, с. 319], [7, с. 28]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\tilde{X}_n}{u(n)} \leq x\right) = \Phi_\alpha(x), \quad (7)$$

где $\Phi_\alpha(x) = \exp\{-x^{-\alpha}\}, x > 0$ (распределение Фреше).

ЛЕММА 1. Пусть $r_n \sim n^\gamma, \gamma \in (0, 1)$. Тогда

$$\frac{\tilde{X}_n^{(r_n)}}{u(n^{1-\gamma})} \xrightarrow{P} 1, \quad n \rightarrow \infty. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $c_n = u(n^{1-\gamma})$. Пусть $x > 0$ и

$$S_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{I}(X_k > xc_n),$$

где $\mathbb{I}(A)$ – индикатор события A . Каждое слагаемое в S_n равно единице с вероятностью $p_n = \overline{F}(xc_n) \sim x^{-\alpha}/n^{1-\gamma}$, $n \rightarrow \infty$, независимо от других. Положим $Q_n = S_n/r_n$; тогда

$$MQ_n = n \frac{p_n}{r_n} \rightarrow x^{-\alpha}, \quad DQ_n = n \frac{p_n(1-p_n)}{r_n^2} \rightarrow 0,$$

откуда следует $Q_n \xrightarrow{P} x^{-\alpha}$, $n \rightarrow \infty$. Воспользуемся соотношением [7, с. 45]

$$P(\tilde{X}_n^{(r_n)} \leq xc_n) = P(S_n < r_n) = P(Q_n < 1).$$

Рассмотрев случаи $x > 1$ и $x < 1$, получаем утверждение леммы 1.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $0 < \delta < \gamma/\alpha$. Тогда

$$n^\delta \frac{\tilde{X}_n^{(r_n)}}{\tilde{X}_n} \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$n^\delta \frac{\tilde{X}_n^{(r_n)}}{\tilde{X}_n} = n^\delta \left(\frac{\tilde{X}_n^{(r_n)}/u(n^{1-\gamma})}{\tilde{X}_n/u(n)} \right) \frac{u(n^{1-\gamma})}{u(n)} \xrightarrow{P} 0$$

с учетом (6)–(8).

Далее всюду будем предполагать, что все случайные величины из Ξ имеют одинаковое распределение F , удовлетворяющее условиям

$$F(-0) = 0, \quad \overline{F}(x) \sim x^{-\alpha} L(x), \quad x \rightarrow \infty.$$

Тогда пары $(\mu_{\rho(t)}(t), \mu_1(t))$ при условиях $\rho(t) = r_n$, $\nu(t) = n$ распределены так же, как $(\tilde{X}_n^{(r_n)}, \tilde{X}_n)$, что открывает возможность применения теоремы 1.

4. Пример: большие скачки случайных блужданий. Пусть заданы последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин η_n и натуральных чисел l_n , $n \geq 1$. Определим

$$Z_n = \max_{0 \leq k \leq n} \sum_{i=k+1}^{k+l_n} \eta_i. \quad (9)$$

Асимптотическое поведение таких величин (статистик Эрдёша–Реньи) при $n \rightarrow \infty$, $l_n \rightarrow \infty$, изучалось, например, в [4]. Получены невырожденные предельные законы при $l_n \sim \ln n$ и т.п. Отмечены приложения модели в математической генетике (анализ ДНК).

В [4] предполагалось, что для слагаемых выполнено правостороннее условие Крамера, т.е. $Me^{h\eta_1} < \infty$ для некоторого $h > 0$. Мы рассматриваем случай правильно меняющихся хвостов, когда это условие не выполняется.

Приведем задачу к виду, подходящему для применения теоремы 1. В качестве параметра возьмем n , соответственно $T = \mathbf{N}$. Определим Ξ через $\xi_{i,n} \equiv \eta_i$. Пусть $\Upsilon(n)$ состоит из множеств $A_{i,n} = \{i, \dots, i + l_n - 1\}$, $1 \leq i \leq n + 1$. Тогда $\zeta(n) = Z_n$, $\nu(n) = n + l_n$, $\kappa(n) = l_n$, $\mu_1(n) = \max_{1 \leq i \leq n+l_n} \eta_i$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $l_n = O(n^\delta)$, $0 < \delta < 1/(1 + 2\alpha)$. Тогда при любых $x > 0$ верно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{Z_n}{u(n)} \leq x\right) = \Phi_\alpha(x),$$

где $u(y)$ удовлетворяет (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\rho(n) = [n^\gamma]$, $\gamma = \alpha/(1 + 2\alpha)$. Из комбинаторных соображений

$$\pi(n) \leq \frac{\rho(n)(\rho(n) - 1)l_n}{n + l_n - 1} \sim n^{2\gamma + \delta - 1} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

так что (3) выполнено. Поскольку $\kappa(n) = O(n^\delta)$, $0 < \delta < \gamma/\alpha$, по следствию 2 также верно (2).

Таким образом, по теореме 1 имеем $\zeta(n)/\mu_1(n) \xrightarrow{P} 1$. С учетом (7) отсюда следует утверждение теоремы 2, поскольку $u(n + l_n) \sim u(n)$, $n \rightarrow \infty$.

Заметим, что произвольный сдвиг (в том числе, центрирование) η_n не влияет на предельный результат. Действительно, пусть $\eta_n^* = \eta_n + a$; тогда $Z_n^* = Z_n + al_n$, но $l_n = o(u(n))$, $n \rightarrow \infty$, так что теорема 2 сохраняет силу.

5. Пример: экстремумы полей дробового шума. Покажем, как можно применить полученные результаты к исследованию супремумов дробового шума в случае конечного радиуса влияния и правильно меняющихся хвостов распределений амплитуд [5]. Напомним эту модель (в других обозначениях), попутно обобщая ее.

Рассмотрим евклидово пространство $E = \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, и пусть $\Sigma = \{\sigma_k\}$ – стационарное пуассоновское точечное поле в E интенсивности $\lambda > 0$. Определим случайное поле

$$\psi(s) = \bigoplus_k h_k(s - \sigma_k), \quad s \in E, \quad (10)$$

где h_k – независимые одинаково распределенные измеримые вполне сепарабельные неотрицательные случайные функции на E , не зависящие от Σ , и $\oplus$ – коммутативная и ассоциативная бинарная операция такая, что $\max\{x, y\} \leq x \oplus y \leq x + y$ для любых $x, y \geq 0$.

Величины $h_k(0)$ назовем *амплитудами*, а их распределение обозначим через F_0 . Предположим, что функции влияния удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $h_k(s) \leq h_k(0)$ при всех $s \in E$;
- 2) $h_k(s) = 0$ при $\|s\| > 1$.

Имеется в виду, что 1), 2) выполняются п.н. для всех k .

Сделанные предположения обеспечивают существование поля дробового шума $\psi(s)$ в смысле абсолютной сходимости (10) п.н., поскольку в каждой точке число слагаемых конечно п.н.

Определим теперь для произвольной ограниченной измеримой области G супремум поля $\psi(s)$ по ней:

$$\varphi(G) = \sup_{s \in G} \psi(s).$$

Поле $\psi(s)$ оказывается вполне сепарабельным по построению, так что $\varphi(G)$ является случайной величиной.

Нашей задачей будет применить к $\varphi(G)$ теорему 1 (при $G \rightarrow \infty$), построив некоторые $\Upsilon = \{\Upsilon(G)\}$ и $\Xi = \{\xi_{n,G}\}$.

Положим $\xi_{n,G} \equiv h_n(0)$. Пусть $\Upsilon(G)$ состоит из всех множеств вида $A_s = \{k : \|s - \sigma_k\| \leq 1\}$, $s \in G$, среди которых число различных конечно п.н. Тогда $U(G) = \{k : \sigma_k \in G_1\}$, где G_1 есть объединение области G с ее единичной окрестностью. Получаем $\varphi(G) \leq \zeta(G)$.

Обозначим меру Лебега области G через $\langle G \rangle$ (во избежание путаницы с ранее введенным обозначением числа элементов множества). Далее предполагаем, что G растет таким образом, что $\langle G_1 \rangle / \langle G \rangle \rightarrow 1$ и $\langle G \rangle \rightarrow \infty$. Для этого достаточно, например, чтобы $G \rightarrow \infty$ в смысле Ван Хова [5], [8, с. 30].

ЛЕММА 2. Для выполнения (3) в данной модели достаточно, чтобы

$$M\rho^2(G) = o(\langle G \rangle), \quad G \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем равновероятно множество B из $\rho(G)$ элементов $U(G)$. Пусть $C = \{\sigma_k : k \in B\}$. В силу пуассоновости точечного поля Σ точки C независимо и равномерно распределены в G_1 при известных фиксированных $\rho(G), \nu(G)$. Обозначим

$$\pi_{r,m}(G) = P\left(\sup_{A \in \Upsilon(G)} |A \cap B| > 1 \mid \rho(G) = r, \nu(G) = m\right).$$

Для того чтобы в единичную окрестность некоторой точки $s \in G$ попадало хотя бы две точки C , необходимо, чтобы расстояние между этими точками было не более 2. Следовательно,

$$\pi_{r,m}(G) \leq \frac{r(r-1)}{2} \frac{V_2}{\langle G_1 \rangle},$$

где V_2 – объем шара радиуса 2 в $\mathbb{R}^d$. Поскольку $\pi(G) = M\rho_{\rho(G), \nu(G)}(G)$, отсюда следует утверждение леммы 2.

Пусть амплитуды дробового шума имеют распределение $F_0 = F$.

ТЕОРЕМА 3. При любых $\alpha > 0$, $x > 0$ верно

$$\lim_{G \rightarrow \infty} P\left(\frac{\varphi(G)}{u(\lambda(G))} \leq x\right) = \Phi_\alpha(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\rho(G) = [\nu(G)^\gamma]$, $0 < \gamma < 1/2$; тогда

$$M\rho^2(G) \leq (\lambda(G))^{2\gamma} = o(\langle G \rangle),$$

и по лемме 2 выполнено (3).

Используем тот факт, что $\nu(G) \sim \lambda(G_1) \sim \lambda(G)$ п.н. при $G \rightarrow \infty$.

Заметим, что согласно теореме 1 из [9] в данном случае п.н. верно

$$\kappa(G) \sim \frac{\ln \langle G \rangle}{\ln \ln \langle G \rangle}, \quad G \rightarrow \infty,$$

так что $\kappa(G) = o(\langle G \rangle^\varepsilon) = o(\nu(G)^\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$, откуда по следствию 2 получаем (2).

Таким образом, по теореме 1 имеем

$$\frac{\zeta(G)}{\mu_1(G)} \xrightarrow{P} 1, \quad G \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Заметим, что $\mu_1(G)$ распределено так же, как и $\tilde{X}_{\nu(G)}$, так что с помощью (7) и асимптотики $u(\nu(G)) \sim u(\lambda(G))$ п.н. получаем

$$\lim_{G \rightarrow \infty} P\left(\frac{\mu_1(G)}{u(\lambda(G))} \leq x\right) = \Phi_\alpha(x),$$

откуда с учетом (11) следует

$$\lim_{G \rightarrow \infty} P\left(\frac{\zeta(G)}{u(\lambda(G))} \leq x\right) = \Phi_\alpha(x). \quad (12)$$

Обозначим $\varphi_0(G) = \sup\{h_k(0) : \sigma_k \in G\}$; тогда $\varphi(G) \geq \varphi_0(G)$, причем согласно стохастической оценке (5) из [5] для $\varphi_0(G)$ так же выполнено

$$\lim_{G \rightarrow \infty} P\left(\frac{\varphi_0(G)}{u(\lambda(G))} \leq x\right) = \Phi_\alpha(x). \quad (13)$$

Из (12) и (13) получаем утверждение теоремы 3.

Ранее в [5] был получен аналогичный результат для более частного случая, с использованием других методов.

Автор благодарен А. М. Зубкову за плодотворную идею и А. В. Булинскому за полезное обсуждение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ивченко Г. И. Вариационный ряд для схемы суммирования независимых величин // Теор. вероятностей и ее примен. 1973. Т. 18. № 3. С. 557–570.
- [2] Лебедев А. В. Предельные теоремы о максимумах независимых случайных сумм // Теор. вероятностей и ее примен. 1999. Т. 44. № 3. С. 631–633.
- [3] Kang S., Serfozo R. F. Extreme values of phase-type and mixed random variables with parallel-processing examples // J. Appl. Probab. 1999. V. 36. № 1. P. 194–210.
- [4] Питербарг В. И., Козлов А. М. О больших скачках случайного блуждания с условием Крамера // Теор. вероятностей и ее примен. 2002. Т. 47. № 4. С. 803–814.
- [5] Лебедев А. В. Максимумы субэкспоненциальных полей дробового шума с конечным радиусом влияния // Матем. заметки. 2003. Т. 73. № 2. С. 258–262.
- [6] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984.
- [7] Лидбеттер М., Линдгрэн Г., Ротсен Х. Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989.
- [8] Рюэль Д. Статистическая механика. М.: Мир, 1971.
- [9] Лебедев А. В. Экстремумы полей дробового шума // Фундамент. и прикл. матем. 2001. Т. 7. № 4. С. 1081–1090.