Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Ф. Меньших, О законах сохранения и преобразованиях
Беклунда, связанных с уравнением Борна–Инфельда, *Ма-
тем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 4, 551–565

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2517>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подра-
зумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 12:21:50

УДК 517.95

О ЗАКОНАХ СОХРАНЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ БЕКЛУНДА, СВЯЗАННЫХ С УРАВНЕНИЕМ БОРНА–ИНФЕЛЬДА

О. Ф. Меньших

Для уравнения Борна–Инфельда в гиперболической области его решений получены законы сохранения первого порядка, зависящие от двух произвольных функций. Показано, что каждый закон сохранения связан с некоторым преобразованием Беклунда, которое преобразует уравнение Борна–Инфельда в некоторое родственное уравнение.

Библиография: 16 названий.

Введение. Пусть заданы два квазилинейных уравнения в частных производных второго порядка вида

$$U_{tt} + 2B(P, \lambda)U_{tx} + C(P, \lambda)U_{xx} = 0, \quad (1)$$

$$\varphi_{tt} + 2B_1(P_1, \lambda_1) + C_1(P_1, \lambda_1)\varphi_{xx} = 0, \quad (2)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} U_{tt} &= \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, & U_{tx} &= \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x}, & \varphi_{tt} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, & \varphi_{xx} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \\ P &= U_x, & \lambda &= U_t, & P_1 &= \varphi_x, & \lambda_1 &= \varphi_t, \\ U_x &= \frac{\partial U}{\partial x}, & U_t &= \frac{\partial U}{\partial t}, & \varphi_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}, & \varphi_t &= \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \end{aligned}$$

Будем рассматривать решения уравнений (1) и (2) в гиперболических областях

$$B^2 - C > 0, \quad B_1^2 - C_1 > 0. \quad (3)$$

Предположим, что коэффициенты уравнений (1) и (2) имеют непрерывные частные производные по своим аргументам, причем

$$\frac{\partial(B, C)}{\partial(P, \lambda)} \neq 0, \quad \frac{\partial(B_1, C_1)}{\partial(P_1, \lambda_1)} \neq 0$$

в некоторых областях D , D_1 переменных P , λ и P_1 , λ_1 .

Найдем дополнительные условия, наложенные на коэффициенты уравнений (1), (2), при выполнении которых любое решение уравнения (1) в гиперболической области (3)

можно преобразовать в некоторое решение уравнения (2) также в гиперболической области по формулам

$$\varphi_t = R_1(U_t, U_x), \quad \varphi_x = R_2(U_t, U_x), \quad (4)$$

причем будем предполагать, что

$$\frac{\partial(R_1, R_2)}{\partial(U_t, U_x)} \neq 0, \quad \frac{\partial R_1}{\partial U_t} \neq 0. \quad (5)$$

Преобразования, которые определяются формулами (3), являются частным случаем преобразований Беклунда [1], [2]. В дальнейшем основное внимание будем уделять преобразованиям уравнения Борна–Инфельда [3]–[6]

$$(1 + U_x^2)U_{tt} - 2U_x U_t U_{xt} + (U_t^2 - 1)U_{xx} = 0 \quad (6)$$

и его законам сохранения первого порядка вида

$$\frac{\partial \varphi(U_t, U_x)}{\partial t} + \frac{\partial \psi(U_t, U_x)}{\partial x} = 0, \quad (7)$$

где $\varphi(P, \lambda)$, $\psi(P, \lambda)$ – дифференцируемые функции такие, что закон сохранения (7) не является тривиальным.

1. Формулировка результатов. Предварительно введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Квазилинейные уравнения вида (1)

$$U_{tt} + 2B(U_t, U_x)U_{tx} + C(U_t, U_x)U_{xx} = 0,$$

коэффициенты которых в гиперболической области (3) удовлетворяют дополнительным условиям [6]

$$\frac{\partial C}{\partial P} - 2C \frac{\partial B}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial P} + \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial \lambda} - 2B \frac{\partial B}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{(B, C)}{(P, \lambda)} \neq 0, \quad (8)$$

будем называть *A-гиперболическими уравнениями*.

Сформулируем некоторые свойства A-гиперболических уравнений, важные для формулировки результатов данной статьи. Введем две новые функции $r(P, \lambda)$, $s(P, \lambda)$ по формулам

$$s = B + \sqrt{B^2 - C}, \quad r = B - \sqrt{B^2 - C}; \quad (9)$$

$r(P, \lambda)$ и $s(P, \lambda)$ являются инвариантами Римана [6]. В силу (3) будем предполагать, что выполняется условие

$$s - r > 0. \quad (10)$$

СВОЙСТВО 1 [6]. *Функции $r(P, \lambda)$, $s(P, \lambda)$ удовлетворяют следующим уравнениям:*

$$r_P - rr_\lambda = 0, \quad s_P - ss_\lambda = 0, \quad (11)$$

где

$$r_P = \frac{\partial r}{\partial P}, \quad s_\lambda = \frac{\partial s}{\partial \lambda} \quad \text{и т. д.}$$

СВОЙСТВО 2 [6]. Коэффициенты $B(P, \lambda)$, $C(P, \lambda)$ любого A -гиперболического уравнения (1) определяются по формулам

$$2B = s + r, \quad C = sr, \quad (12)$$

где s и r определяются из неявных уравнений

$$\lambda + Ps = G_1(s), \quad \lambda + Pr = G_2(r), \quad (13)$$

причем $G_1(s)$, $G_2(r)$ – две произвольные функции, имеющие следующие ограничения:

$$G_2(s) - G_1(r) - (s - r)G_1'(r) \neq 0, \quad G_2(s) - G_1(r) - (s - r)G_2'(s) \neq 0,$$

или

$$G_2(s) \neq as + b, \quad G_1(r) \neq ar + s, \quad (14)$$

что эквивалентно $(a, b) \in \mathbb{R}$.

СВОЙСТВО 3 [6]. Для уравнения Борна–Инфельда

$$G_1(r) = \pm\sqrt{1 - r^2}, \quad G_2(s) = \pm\sqrt{1 - s^2}. \quad (15)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для этого уравнения прямые

$$\lambda + Ps = \pm\sqrt{1 - s^2}, \quad \lambda + Pr = \pm\sqrt{1 - r^2} \quad (16)$$

при постоянных s , r являются характеристиками уравнения Борна–Инфельда (6) на плоскости годографа P , λ . Они являются касательными к гиперболе

$$1 + P^2 - \lambda^2 = 0. \quad (17)$$

Эти прямые могут касаться обеих ветвей гиперболы (17); этим и определяются знаки в формулах (16) [8].

СВОЙСТВО 4 [6]. Любое A -гиперболическое уравнение (1) в гиперболической области (3) приводится к системе уравнений в частных производных первого порядка, записанной в инвариантах Римана

$$\frac{\partial r}{\partial t} + s \frac{\partial r}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial t} + r \frac{\partial s}{\partial x} = 0. \quad (18)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для систем, эквивалентных (18), Н. Н. Яненко [8] обнаружил важное свойство: при некоторых ограничениях на начальные данные Коши для них не происходит градиентной катастрофы [9], типичной для квазилинейных уравнений гиперболического типа.

СВОЙСТВО 5. Для уравнения Борна–Инфельда инварианты Римана определяются формулами

$$r = \frac{-P\lambda - \sqrt{1 + P^2 - \lambda^2}}{1 + P^2}, \quad s = \frac{P\lambda + \sqrt{1 + P^2 - \lambda^2}}{1 + P^2}, \quad (19)$$

причем, если выполняется условие

$$|\lambda| = \left| \frac{\partial U}{\partial t} \right| < 1, \quad (20)$$

то

$$s > 0, \quad r < 0. \quad (21)$$

Формулы (19) следуют из (9) и (6). Условия (20) и (21) вытекают из соотношения для коэффициента $C(P, \lambda)$ данного уравнения

$$C(P, \lambda) = \frac{\lambda^2 - 1}{1 + P^2} = sr.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Уравнение Борна–Инфельда является одномерным аналогом (по координатам) нелинейной системы электродинамики Борна–Инфельда [4]; условие (20) имеет важный физический смысл: скорость движения мировой поверхности не должна превышать скорости света, равной в этой модели 1.

Сформулируем теперь основные результаты данной статьи.

ТЕОРЕМА 1. Для того, чтобы существовало преобразование Беклунда (4), (5), которое связывает решения уравнений (1) и (2), необходимо и достаточно, чтобы на коэффициенты уравнений (1) и (2) были наложены следующие условия:

$$B(U_x, U_t) = B_1(\varphi_x, \varphi_t), \quad C(U_x, U_t) = C_1(\varphi_x, \varphi_t), \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial B_1}{\partial P_1} \frac{\partial B}{\partial \lambda} \right| - \left| \frac{\partial B}{\partial P} \frac{\partial B_1}{\partial \lambda_1} \right| + 2B \left| \frac{\partial B}{\partial C} \frac{\partial B_1}{\partial C_1} \right| = 0, \\ & \left| \frac{\partial B_1}{\partial P_1} \frac{\partial B}{\partial P} \right| + C \left| \frac{\partial B}{\partial C} \frac{\partial B_1}{\partial C_1} \right| = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Таким образом, если выполняются условия (22), (23), наложенные на коэффициенты уравнений (1), (2), то преобразование Беклунда (4) локально определяется решением уравнений (22) относительно φ_x, φ_t .

ТЕОРЕМА 2. Для любых двух различных A -гиперболических уравнений (1), (2) существует локальное преобразование Беклунда (4), (5), которое определяется параметрическими формулами

$$\begin{cases} U_x = \frac{G_2(s) - G_1(r)}{s - r}, \\ U_t = \frac{sG_1(r) - rG_2(s)}{s - r}, \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} \varphi_x = \frac{T_2(s) - T_1(r)}{s - r}, \\ \varphi_t = \frac{sT_1(r) - rT_2(s)}{s - r}. \end{cases} \quad (25)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из формул (9) и (22) следует, что инварианты Римана r , s являются инвариантами преобразований Беклунда, заданных в виде (4), а также в форме (24), (25).

Функции $G_1(r)$, $G_2(s)$ определяются конкретными коэффициентами уравнения (1); аналогично, функции $T_1(r)$, $T_2(s)$ определяются коэффициентами уравнения (2). Если какое-либо уравнение (1) является A -гиперболическим, то можно определить вид указанных функций [6].

Пусть задано конкретное A -гиперболическое уравнение (1). Связь законов сохранения вида (7) с преобразованиями Беклунда (4), (5) для данного уравнения следует из следующего результата.

ТЕОРЕМА 3. Для данного конкретного A -гиперболического уравнения (1) совокупность допустимых преобразований Беклунда в терминах инвариантов Римана определяется формулами

$$\begin{aligned}\varphi_t &= R_1(U_x, U_t) = \psi_1(r, s) = \frac{sT_1(r) - rT_2(s)}{s - r}, \\ \varphi_x &= R_2(U_x, U_t) = \psi_2(r, s) = \frac{T_2(s) - T_1(r)}{s - r},\end{aligned}\quad (26)$$

причем все законы сохранения первого порядка вида (7) можно записать так:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{T_2(s) - T_1(r)}{s - r} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{rT_2(s) - sT_1(r)}{s - r} \right] = 0, \quad (27)$$

где инварианты Римана s , r определяются коэффициентами уравнения (1), а $T_1(r)$ и $T_2(s)$ – произвольные функции, удовлетворяющие ограничениям, аналогичным (14).

Таким образом, совокупность локальных преобразований Беклунда и допустимых законов сохранения вида (7) зависит от двух произвольных функций.

Выбор функций $T_1(r)$, $T_2(s)$, т.е. выбор конкретного закона сохранения, порождает для A -гиперболического уравнения (1) локальное преобразование Беклунда, т.е. любое гиперболическое решение уравнения (1) преобразуется в гиперболическое решение уравнения (2), которое можно построить. Например, все законы сохранения вида (7) для уравнения Борна–Инфельда (6) будут определяться формулами (27), где инварианты Римана определяются формулами (19). Выбор конкретных функций $T_1(r)$ и $T_2(s)$ позволяет определить уравнение (2) относительно $\varphi(x, y)$ (см. ниже).

Справедлива

ТЕОРЕМА 4. Уравнение Борна–Инфельда допускает автопреобразование Беклунда [1], которое определяется формулами

$$\varphi_t = \frac{U_x}{\sqrt{1 + U_x^2 - U_t^2}}, \quad \varphi_x = \frac{U_t}{\sqrt{1 + U_x^2 - U_t^2}}, \quad (28)$$

т.е. функция $\varphi(t, x)$ снова удовлетворяет уравнению Борна–Инфельда.

Уравнение Борна–Инфельда может быть получено как уравнение Эйлера из функционала [3]

$$J[U] = \int_D \int (\sqrt{1 + U_x^2 - U_t^2} - 1) dx dy. \quad (29)$$

Функционал имеет важный геометрический смысл: формула (29) определяет двумерные минимальные поверхности, заданные в виде графика функции $U = U(x, t)$ в псевдоевклидовом пространстве с метрикой

$$(ds)^2 = (dt)^2 - (dx)^2 - (dU)^2.$$

Относительно точечных преобразований уравнения Борна–Инфельда справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5 [10] (см. также [11]). *Уравнение Борна–Инфельда (6) допускает семи-мерную алгебру Ли точечных преобразований со следующими базисными операторами:*

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, & X_2 &= \frac{\partial}{\partial x}, & X_3 &= \frac{\partial}{\partial U}, & X_4 &= t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + U \frac{\partial}{\partial U}, \\ X_5 &= t \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial t}, & X_6 &= U \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial U}, & X_7 &= U \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial U}. \end{aligned} \quad (30)$$

Нетрудно установить непосредственной проверкой, что функционал (29) остается инвариантным относительно точечных преобразований, связанных с операторами X_1, X_2, X_3, X_5 из (30). Эти точечные преобразования будут следующими [10]:

$$X_1: t_1 = t + a, \quad x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad u_1 = u, \quad J_1 = x, \quad J_2 = y, \quad J_3 = u, \quad (31)$$

$$X_2: x_1 = t + a, \quad t_1 = t, \quad y_1 = y, \quad u_1 = u, \quad J_1 = t, \quad J_2 = y, \quad J_3 = u, \quad (32)$$

$$X_3: u_1 = u + a, \quad t_1 = t, \quad x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad J_1 = t, \quad J_2 = x, \quad J_3 = u, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} X_5: t_1 &= \operatorname{ch} \alpha t + \operatorname{sh} \alpha x, \quad x_1 = \operatorname{sh} \alpha t + \operatorname{ch} \alpha x, \quad y_1 = y, \quad u_1 = u, \\ J_1 &= x^2 - t^2, \quad J_2 = y, \quad J_3 = u. \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь a, α – параметры, $J_i, i = 1, 2, 3$, – инварианты соответствующих преобразований.

В соответствии с известной теоремой Нетер [1], [12] уравнение Борна–Инфельда (6) должно иметь четыре закона сохранения, связанные с операторами X_1, X_2, X_3, X_5 . Справедлива

ТЕОРЕМА 6. *Уравнение Борна–Инфельда (6) допускает следующие законы сохранения, вытекающие из теоремы Нетер:*

$$K_1: \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial \Pi}{\partial \chi} = 0, \quad (35)$$

$$E = \frac{1 + P^2 - \sqrt{1 + P^2 - \lambda^2}}{\sqrt{1 + P^2 - \lambda^2}}, \quad G = -\frac{P\lambda}{\sqrt{1 + P^2 - \lambda^2}}, \quad (36)$$

$$K_2: \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{P\lambda}{\sqrt{1 + P^2 - \lambda^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1 - \lambda^2}{\sqrt{1 + P^2 - \lambda^2}} \right) = 0, \quad (37)$$

$$K_3: \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{1 + P^2 - \lambda^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P}{\sqrt{1 + P^2 - \lambda^2}} \right) = 0, \quad (38)$$

$$\begin{aligned} K_4: \frac{\partial}{\partial t} \left[x(\sqrt{1 + P^2 - \lambda^2} - 1) + \lambda(x - \lambda + tP) \frac{\lambda}{\sqrt{1 + P^2 - \lambda^2}} \right] \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left[t(\sqrt{1 + P^2 - \lambda^2} - 1) - (x\lambda + tP) \frac{P}{\sqrt{1 + P^2 - \lambda^2}} \right] = 0. \end{aligned} \quad (39)$$

В приведенных формулах (35)–(39) законы сохранения K_i поставлены в соответствие операторам X_i , $i = 1, 2, 3, 4$, (31)–(34). В формулах (35), (36) E – удельная энергия, G – импульс вдоль оси x поля Борна–Инфельда [3]. Ниже будет показано, что законы сохранения (35), (37), (38) получаются из общей формулы (27) при специальном выборе функций $T_1(r)$ и $T_2(s)$. Закону сохранения энергии (35), (36) соответствуют

$$T_1(r) = -(1+r), \quad T_2(s) = 1-s. \quad (40)$$

Закону сохранения импульса (37) соответствуют

$$T_1(r) = -r, \quad T_2(s) = s. \quad (41)$$

Для закона сохранения (38) необходимо взять

$$T_1(r) = \sqrt{1-r^2}, \quad T_2(s) = \sqrt{1-s^2}. \quad (42)$$

Наконец, закон сохранения (39) относится к более общему классу законов, чем законы сохранения, описываемые формулой (27).

2. Краткое доказательство полученных результатов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Составив условие совместности системы (4), придем к уравнению относительно функции $U(x, t)$

$$\frac{\partial R_2}{\partial \lambda} U_{tt} + \left(\frac{\partial R_2}{\partial P} - \frac{\partial R_1}{\partial \lambda} \right) U_{tx} - \frac{\partial R_1}{\partial P} U_{xx} = 0. \quad (43)$$

Поскольку уравнение (43) должно совпадать с уравнением (1), получим систему уравнений относительно функций $R_1(P, \lambda)$ и $R_2(P, \lambda)$

$$\frac{\partial R_1}{\partial P} + C \frac{\partial R_2}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial R_2}{\partial P} - \frac{\partial R_1}{\partial \lambda} = 2B \frac{\partial R_2}{\partial \lambda}. \quad (44)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Особый случай, когда все коэффициенты уравнения (43) обращаются в нуль, не представляет интереса, так как тогда преобразование (4) будет тривиальным:

$$\varphi_t = kU_t, \quad \varphi = kU_x, \quad k = \text{const}.$$

С другой стороны, дифференцируя левые части (4) по t и x и подставляя полученные значения φ_{tt} , φ_{tx} , φ_{xx} в уравнение (2), приходим к новому уравнению относительно $U(x, t)$

$$\frac{\partial R_1}{\partial \lambda} U_{tt} + \left(\frac{\partial R_1}{\partial P} + 2B \frac{\partial R_1}{\partial \lambda} + C_1 \frac{\partial R_2}{\partial \lambda} \right) U_{tx} + \left(2B_1 \frac{\partial R_1}{\partial P} + C_1 \frac{\partial R_2}{\partial P} \right) U_{xx} = 0. \quad (45)$$

Здесь обращение в нуль коэффициентов уравнения (45) исключается условием (5).

Сопоставляя (45) с (1), получим еще два уравнения относительно R_1 , R_2

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_1}{\partial P} + 2(B_1 - B) \frac{\partial R_1}{\partial \lambda} + C_1 \frac{\partial R_2}{\partial \lambda} &= 0, \\ 2B_1 \frac{\partial R_1}{\partial P} + C_1 \frac{\partial R_2}{\partial P} - C \frac{\partial R_1}{\partial \lambda} &= 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Систему (46) с учетом уравнений (44) можно привести к виду

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_2}{\partial \lambda}(C_1 - C) + 2\frac{\partial R_1}{\partial \lambda}(B_1 - B) &= 0, \\ \frac{\partial R_2}{\partial P}(C_1 - C) + 2\frac{\partial R_1}{\partial P}(B_1 - B) &= 0.\end{aligned}\quad (47)$$

Поскольку $\partial(R_1, R_2)/\partial(P, \lambda) \neq 0$ в силу (5), из (47) следуют соотношения (22).

Поскольку по предположению $\partial(B_1, C_1)/\partial(\varphi_x, \varphi_t) \neq 0$, то локально из (22) получим формулы (4). Из системы неявных уравнений (22) можно также найти производные

$$\frac{\partial R_1}{\partial P}, \quad \frac{\partial R_1}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial R_2}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial R_2}{\partial P}.$$

Подставляя эти производные в (44), приходим к условиям (23). Таким образом, необходимость условий (22) и (23) установлена. Проведя рассуждения в обратном порядке, можно убедиться, что эти условия будут и достаточными для совместности системы (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть теперь уравнения (1) и (2) являются A -гиперболическими и для коэффициентов $B(P, \lambda)$, $C(P, \lambda)$, $B_1(P_1, \lambda_1)$, $C_1(P_1, \lambda_1)$ выполняются условия (8). Подставляя следствие (8)

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial P} &= 2C\frac{\partial B}{\partial \lambda}, & \frac{\partial B}{\partial P} &= 2B\frac{\partial B}{\partial \lambda} - \frac{1}{2}\frac{\partial C}{\partial \lambda}, \\ \frac{\partial C_1}{\partial P_1} &= 2C_1\frac{\partial B_1}{\partial \lambda_1}, & \frac{\partial B_1}{\partial P_1} &= 2B_1\frac{\partial B_1}{\partial \lambda_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial C_1}{\partial \lambda_1}\end{aligned}$$

в (23), можно непосредственно убедиться, что получится тождество в силу (22). Таким образом, для A -гиперболических уравнений (1), (2) условия (23) тождественно удовлетворяются.

Пусть имеем два конкретных A -гиперболических уравнений (1) и (2). Для уравнения (1) тогда имеем формулы (13), в которых $G_1(s)$, $G_2(r)$ будут вполне определенными функциями. Решая (13) относительно $\lambda = U_t$ и $P = U_x$, получим формулы (24). Поступая аналогично с уравнением (2), получим формулы (25), где $T_1(r)$ и $T_2(s)$ также будут известными функциями.

Исключая инварианты Римана r , s из (24) и (25), приходим к формулам (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Формулы (26) следуют из формул (4) и (25). Составляя условие совместности системы (25), получим общий закон сохранения (27). Установим вид функций $T_1(r)$ и $T_2(s)$, для которых закон сохранения (27) будет тривиальным. Для этого продифференцируем (27). После простых вычислений получим

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial s}{\partial t} + r\frac{\partial s}{\partial x}\right)[(s-r)T_2'(s) + T_1(s) - T_2(s)] \\ + \left(\frac{\partial r}{\partial t} + s\frac{\partial r}{\partial x}\right)[T_2(s) - T_1(r) - (s-r)T_1'(r)] = 0.\end{aligned}\quad (48)$$

Закон сохранения (23) будет тривиальным, если уравнение (48) будет удовлетворяться не в силу соотношений (18), а в силу соотношений

$$\begin{aligned}(s-r)T_2'(s) + T_1(s) - T_2(s) &= 0, \\ T_2(s) - T_1(r) - (s-r)T_1'(r) &= 0.\end{aligned}\quad (49)$$

Общее решение системы (49) определяется формулами

$$T_1(r) = ar + b, \quad T_2(s) = as + b, \quad (a, b) \in \mathbb{R}. \quad (50)$$

Подставляя (50) в (4), получим $\varphi_t = R_1 = b$, $\varphi_x = R_2 = a$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Как уже отмечалось, преобразование Беклунда (4) является локальным; в формулах (26) необходимо выразить U_x и U_t через инварианты Римана r , s . В общем случае такое представление возможно только локально, что уже было отмечено для уравнения Борна–Инфельда (см. [6]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Одно решение уравнения Борна–Инфельда

$$U = U(x, t), \quad P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \lambda = \frac{\partial U}{\partial t}$$

будет переходить в другое

$$\varphi = \varphi(x, t), \quad P_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \lambda_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

если будут выполняться условия, вытекающие из (22) и (6),

$$\frac{P\lambda}{1+P^2} = \frac{P_1\lambda_1}{1+P_1^2}, \quad \frac{1-\lambda^2}{1+P^2} = \frac{1-\lambda_1^2}{1+P_1^2}. \quad (51)$$

Из первого уравнения (51) найдем

$$\lambda_1 = \frac{P\lambda}{1+P^2} \frac{1+P_1^2}{P_1} \quad (52)$$

и, подставляя (52) во второе уравнение (51), получим уравнение четвертой степени относительно P_1

$$(P_1^2 - P^2)[(1+P^2 - \lambda^2)P_1^2 - \lambda^2] = 0. \quad (53)$$

Одно из нетривиальных решений системы (52) и (53) будет следующим:

$$P_1 = \frac{\lambda}{\sqrt{1+P^2-\lambda^2}}, \quad \lambda_1 = \frac{P}{\sqrt{1+P^2-\lambda^2}}, \quad (54)$$

что совпадает с формулами (28). Если решить систему (28) относительно U_x , U_t , то можно убедиться, что получим формулы

$$U_t = \frac{\varphi_x}{\sqrt{1+\varphi_x^2-\varphi_t^2}}, \quad U_x = \frac{\varphi_t}{\sqrt{1+\varphi_x^2-\varphi_t^2}}, \quad (55)$$

т.е. действительно одно решение уравнения Борна–Инфельда (6) будет переходить в другое решение, так как составляя условия совместности уравнений (28) и (55), получим, что функции и удовлетворяют уравнению Борна–Инфельда (6).

Приведем формулировку теоремы Нетер [1], [12].

ТЕОРЕМА НЕТЕР. Пусть задана совокупность преобразований

$$\begin{cases} x_k^* = \Phi_k(x, U, P_1, P_2, \dots, P_k, \varepsilon) \sim x_k + \varepsilon \varphi_k, \\ U^* = \Psi(x, U, P_1, P_2, \dots, P_k, \varepsilon) \sim U + \varepsilon \psi. \end{cases} \quad (56)$$

Тогда из инвариантности функционала

$$J[U] = \int_G F(x, U, P_1, P_2, \dots, P_n) dx \quad (57)$$

относительно преобразований (56) следует, что

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\bar{\psi} \frac{\partial F}{\partial P_k} + \varphi_k F \right] = 0, \quad (58)$$

где

$$\bar{\psi} = \psi - \sum_{k=1}^n \varphi_k P_k.$$

Здесь $\varphi_k = \varphi_k(x, U, P_1, P_2, \dots, P_n)$ и $\psi = \psi(x, U, P_1, P_2, \dots, P_n)$ определяются формулами (56) и U – произвольная экстремальная поверхность функционала.

В формулах (56)–(58) введены обозначения

$$P_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

ε – параметр точечного преобразования; $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Для функционала (29)

$$F = \sqrt{1 + P_0^2} - \lambda^2 - 1, \quad P_1 = P, \quad P_2 = \lambda. \quad (59)$$

Рассмотрим вывод закона сохранения (35) – закона сохранения энергии, который связан с независимостью функционала (29) от времени.

В этом случае в соответствии с преобразованиями (31) и (56)

$$x_1 = x, \quad x_2 = t, \quad \psi_1 = 0, \quad \psi_2 = 1, \quad \psi = 0, \quad \bar{\psi} = -\lambda$$

и закон сохранения энергии можно записать так:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\lambda \frac{\partial F}{\partial P} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(-\lambda \frac{\partial F}{\partial \lambda} + F \right) = 0,$$

откуда с учетом (59) придем к формулам (35), (36).

Остальные законы сохранения выводятся аналогично.

Докажем, что закону сохранения энергии соответствуют функции $T_1(r)$ и $T_2(s)$, определяемые формулами (40). Действительно, подставим (40) в (27):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{2}{s-r} - 1 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{s+r}{s-r} \right) = 0. \quad (60)$$

Подставляя в (60) инварианты Римана для уравнения Борна–Инфельда, определяемые формулами (19), получим закон сохранения энергии (35), (36).

Интересно отметить: удельная энергия E поля Борна–Инфельда (6) и импульс поля вдоль оси x выражаются через инварианты Римана [6]:

$$E = \frac{2}{s-r} - 1, \quad G = \frac{s+r}{s-r}.$$

В заключение этого раздела заметим, что для того, чтобы закон сохранения (38) можно было переписать в терминах r , s с помощью формулы (27) с учетом (42) необходимо использовать не совсем очевидные тождества:

$$\begin{aligned} \frac{s\sqrt{1-r^2} + r\sqrt{1-s^2}}{1-sr + \sqrt{1-r^2}\sqrt{1-s^2}} &\equiv \frac{\sqrt{1-r^2} - \sqrt{1-s^2}}{s-r}, \\ \frac{\sqrt{1-r^2} + \sqrt{1-s^2}}{1-sr + \sqrt{1-r^2}\sqrt{1-s^2}} &\equiv \frac{s\sqrt{1-r^2} - r\sqrt{1-s^2}}{s-r}. \end{aligned}$$

3. Дальнейшие примеры.

ПРИМЕР 1. Пусть

$$T_1(r) = \frac{r^2 - 1}{2}, \quad T_2(s) = \frac{s^2 - 1}{2}.$$

Закон сохранения (27) запишется так:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{s+r}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{sr+1}{2} \right) = 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{U_x U_t}{1 + U_x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \frac{U_x^2 + U_t^2}{1 + U_x^2} \right) = 0.$$

Преобразование Беклунда (4) примет вид

$$\varphi_x = -\frac{U_x U_t}{1 + U_x^2}, \quad \varphi_t = -\frac{1}{2} \frac{U_x^2 + U_t^2}{1 + U_x^2}. \quad (61)$$

Уравнение относительно функции $\varphi(t, x)$ получим из следующих соображений. Перепишем формулы (61) так:

$$\varphi_x = -\frac{U_x U_t}{1 + U_x^2}, \quad -(1 + 2\varphi_t) = \frac{U_t^2 - 1}{1 + U_x^2}$$

или

$$\varphi_x = B(P, \lambda), \quad -(1 + 2\varphi_t) = C(P, \lambda),$$

где $B(P, \lambda)$, $C(P, \lambda)$ – коэффициенты уравнения Борна–Инфельда.

Учитывая инвариантность этих коэффициентов при преобразованиях Беклунда, получим

$$B_1(P_1, \lambda_1) = \varphi_x, \quad C_1(P_1, \lambda_1) = -(1 + 2\varphi_t),$$

и уравнение относительно $\varphi(t, x)$ будет таким [6]:

$$\varphi_{tt} + 2\varphi_x \varphi_t - (1 + 2\varphi_t)\varphi_{xx} = 0. \quad (62)$$

Уравнение (62) описывает потенциал скоростей в случае одномерного нестационарного движения газа Чаплыгина [9], т.е. фиктивного газа, уравнение состояния которого описывается зависимостью

$$p = a + \frac{b}{\rho},$$

где p – давление, ρ – плотность, a и b – некоторые постоянные.

ПРИМЕР 2. Пусть

$$T_1 = \sqrt{1 + r^2}, \quad T_2(s) = \sqrt{1 + s^2}. \quad (63)$$

Формулы (63) соответствуют следующему закону сохранения для уравнения Борна–Инфельда (6):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\sqrt{1 + s^2} - \sqrt{1 + r^2}}{s - r} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{s\sqrt{1 + r^2} - r\sqrt{1 + s^2}}{s - r} \right) = 0 \quad (64)$$

и преобразование Беклунда в терминах s, r имеет вид

$$\varphi_x = \frac{\sqrt{1 + s^2} - \sqrt{1 + r^2}}{s - r}, \quad \varphi_t = \frac{s\sqrt{1 + r^2} - r\sqrt{1 + s^2}}{s - r}. \quad (65)$$

В формулы (64), (65) необходимо подставить значения инвариантов Римана для уравнения Борна–Инфельда по формулам (19). Опуская несложные вычисления, получим следующее уравнение относительно $\varphi(x, t)$:

$$(\varphi_x^2 - 1)\varphi_{tt} - 2\varphi_x \varphi_t \varphi_{xt} + (\varphi_t^2 - 1)\varphi_{xx} = 0. \quad (66)$$

Уравнение (66) описывает сверхзвуковое стационарное движение газа Чаплыгина [13].

ПРИМЕР 3. Возьмем два А-гиперболических уравнения – уравнение Борна–Инфельда (6) и следующее уравнение:

$$\varphi_x^2 \varphi_{tt} - 2\varphi_x \varphi_t \varphi_{tx} + (\varphi_t^2 - 1)\varphi_{xx} = 0. \quad (67)$$

Уравнение (67) можно получить следующим образом. Используем формулы (13), подставив в них

$$G_1(r) = -1, \quad G_2(s) = +1.$$

В результате придем к соотношениям

$$\varphi_t + r\varphi_x = -1, \quad \varphi_t + s\varphi_x = +1,$$

из которых найдем

$$r = -\frac{1 + \varphi_t}{\varphi_x}, \quad s = \frac{1 - \varphi_t}{\varphi_x}.$$

Учитывая теперь формулы (12)

$$2B_1 = r + s = -2\frac{\varphi_t}{\varphi_x}, \quad C_1 = rs = \frac{\varphi_t^2 - 1}{\varphi_x^2},$$

получим коэффициенты уравнения (67). При получении формул (4) для преобразования Беклунда используем соотношения (22)

$$\frac{U_x U_t}{1 + U_x^2} = \frac{\varphi_t}{\varphi_x}, \quad \frac{U_t^2 - 1}{1 + U_x^2} = \frac{\varphi_t^2 - 1}{\varphi_x^2}. \quad (68)$$

Одно из двух решений системы (68) относительно φ_x , φ_x будет таким:

$$\varphi_t = \frac{U_x U_t}{\sqrt{1 + U_x^2 - U_t^2}}, \quad \varphi_x = \frac{1 + U_x^2}{\sqrt{1 + U_x^2 - U_t^2}}. \quad (69)$$

Для уравнения Борна–Инфельда (6) получим из (69) закон сохранения

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1 + U_x^2}{\sqrt{1 + U_x^2 - U_t^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{U_x U_t}{\sqrt{1 + U_x^2 - U_t^2}} \right) = 0.$$

Если переписать этот закон сохранения в виде (27), то необходимо взять

$$T_1(r) = 1, \quad T_2(s) = -1.$$

4. Пример преобразования Беклунда для A -эллиптических уравнений.

Введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Квазилинейные уравнения

$$U_{xx} + 2B(U_x, U_y)U_{xy} + C(U_x, U_y)U_{yy} = 0, \quad (70)$$

коэффициенты которых удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial C}{\partial q} - 2C \frac{\partial B}{\partial P} = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial q} + \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial P} - 2B \frac{\partial B}{\partial P} = 0, \quad \frac{\partial(B, C)}{\partial(P, q)} \neq 0 \quad (71)$$

в эллиптической области

$$B^2 - C < 0, \quad (72)$$

будем называть A -эллиптическими уравнениями [14], [15]

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Для класса уравнений (70)–(72) более удобны обозначения независимых переменных через x , y . Фактически условия (71) совпадают с прежними условиями (8), если положить

$$x = t, \quad y = x, \quad P = \lambda, \quad q = P.$$

Если уравнение (1) является уравнением смешанного типа, то на разных решениях оно может быть как A -гиперболическим, так и A -эллиптическим уравнением, поэтому теорема 1 справедлива и для A -эллиптических уравнений. Описание класса A -эллиптических уравнений имеется в работах [14], [15]. Здесь приведем только простейший пример.

ПРИМЕР 4. Классическое уравнение минимальных поверхностей

$$(1 + U_y^2)U_{xx} - 2U_xU_yU_{xy} + (1 + U_x^2)U_{yy} = 0 \quad (73)$$

входит в класс A -эллиптических уравнений. Как известно [16], для решения уравнения (73) справедливы формулы Вейерштрасса. Класс A -эллиптических уравнений интересен тем, что для решения любого такого уравнения также справедливы подобные формулы [14], [15].

Рассмотрим следующее уравнение:

$$\varphi_y^2\varphi_{xx} - 2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} + (1 + \varphi_x^2)\varphi_{yy} = 0, \quad (74)$$

входящее в этот класс [15]. Для нахождения преобразования Беклунда, связывающего решения уравнений (73) и (74), используем условия (22). Приравнявая соответствующие коэффициенты уравнений (73) и (74), получаем

$$\frac{U_xU_y}{1 + U_y^2} = \frac{\varphi_x}{\varphi_y}, \quad \frac{1 + U_x^2}{1 + U_y^2} = \frac{1 + \varphi_x^2}{\varphi_y^2}. \quad (75)$$

Одно из решений системы (75) относительно φ_x , φ_y будет таким:

$$\varphi_x = \frac{U_xU_y}{\sqrt{1 + U_x^2 + U_y^2}}, \quad \varphi_y = \frac{1 + U_y^2}{\sqrt{1 + U_x^2 + U_y^2}}. \quad (76)$$

Из (76) следует следующий закон сохранения для уравнения минимальных поверхностей (73):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1 + U_y^2}{\sqrt{1 + U_x^2 + U_y^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{U_xU_y}{\sqrt{1 + U_x^2 + U_y^2}} \right) = 0.$$

Запишем уравнение простейшей минимальной поверхности

$$U = \arctg \frac{y}{x}. \quad (77)$$

Эта поверхность является геликоидом [16]. Подставив (77) в систему (76), после вычислений получим, опуская постоянную, соответствующее решение уравнения (74):

$$\varphi = \frac{y\sqrt{1 + x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (78)$$

В полярных координатах $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ уравнение (78) упростится и будет таким:

$$\varphi = \sin \theta \sqrt{1 + r^2}.$$

Дальнейшее исследование преобразований Беклунда, связанных с A -эллиптическими уравнениями будет изложено в отдельной статье.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1987.
- [2] Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
- [3] Варбашов Б. М., Черников Н. А. Решение и квантование нелинейной двухмерной модели типа Борна–Инфельда // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1966. Т. 50. № 3. С. 1296–1308.
- [4] Born M., Infeld L. Foundations of the new field theory // Proc. Roy. Soc. London Ser. A. 1934. V. 144. P. 425–451.
- [5] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
- [6] Меньших О. Ф. О взаимодействиях финитных уединенных волн для уравнений типа Борна–Инфельда // ТМФ. 1989. Т. 79. № 1. С. 16–29.
- [7] Меньших О. Ф. О точных решениях уравнения Борна–Инфельда // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 8. С. 1410–1416.
- [8] Яненко Н. Н. О разрывах в решениях квазилинейных уравнений // УМН. 1955. Т. 10. № 2. С. 195–202.
- [9] Рожественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.
- [10] Меньших О. Ф., Тимошин М. И. Групповая классификация уравнения Борна–Инфельда с тремя независимыми переменными и некоторые его частные решения // Деп. ВИНТИ 09.09.1998 № 2747-B98. Самара, 1998.
- [11] Фушич В. И., Серов Н. И. О точных решениях уравнения Борна–Инфельда // Докл. АН СССР. 1982. Т. 263. № 3. С. 582–586.
- [12] Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. М.: ГИФМЛ, 1961.
- [13] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математических моделей. М.: Наука, 1977.
- [14] Меньших О. Ф. Об одном обобщении формул Вейерштрасса в теории минимальных поверхностей // Арифметика и геометрия многообразий. Межвузовский сборник научных статей. Самара: Самарский государственный университет, 1992. С. 93–100.
- [15] Меньших О. Ф. Об одном обобщении уравнений минимальных поверхностей // Деп. ВИНТИ 18.03.1987 № 1947-B87. Куйбышев, 1987.
- [16] Дао Чонг Тхи, Фоменко А. Г. Минимальные поверхности и проблема Плато. М.: Наука, 1987.

Самарский государственный аэрокосмический университет
им. акад. С. П. Королева (СГАУ)
E-mail: oleg_menshih@mail.ru

Поступило
27.02.2004