Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Парусников, Многогранники Клейна для трех экстремальных кубических форм, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 4, 566–583

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2518>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 18:05:39

УДК 511.36+514.172.45

МНОГОГРАННИКИ КЛЕЙНА ДЛЯ ТРЕХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ КУБИЧЕСКИХ ФОРМ

В. И. Парусников

Давенпортом и Свиннертоном-Дайером были найдены первые 19 экстремальных тернарных кубических форм g_i , имеющих тот же смысл, что и известные формы Маркова в бинарном квадратичном случае. Многогранники Клейна для форм $g_1 - g_4$ были недавно вычислены Брюно и Парусниковым. Они же для кратных корневых векторов вычислили “подходящие дроби”, полученные по разным матричным обобщениям алгоритма цепных дробей, и изучили их расположение относительно многогранников Клейна. В настоящей статье вычислены многогранники Клейна форм $g_5 - g_7$ и сопряженной формы g_7^* . Найдены их периоды и фундаментальные области. Вычислены разложения кратных корневых векторов этих форм по матричным алгоритмам Эйлера, Якоби, Пуанкаре, Бруна, Парусникова, Брюно. По расположению “подходящих дробей” относительно многогранников Клейна оценивалось качество алгоритма. С этой точки зрения алгоритмы Эйлера и Пуанкаре оказались наихудшими, а алгоритм Брюно наилучшим. Но ни один из этих алгоритмов не обобщает все свойства цепной дроби.

Библиография: 21 название.

1. Введение. Наилучшие рациональные приближения p/q к числу α суть подходящие дроби p_k/q_k цепной дроби числа α [1]. Клейн [2]–[4] предложил такую интерпретацию цепных дробей (см. также [5, гл. III, п. 19]). Пусть на плоскости координат p, q проведены прямые $\mathcal{L}_1 = \{p, q : p = \alpha q\}$ и $\mathcal{L}_2 = \{p, q : q = 0\}$. Они образуют смежные углы $\theta_1 = \{p, q : p \geq \alpha q, q \geq 0\}$ и $\theta_2 = \{p, q : p \leq \alpha q, q \geq 0\}$. Обозначим K_j выпуклую оболочку целых точек $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ без нуля, попавших в θ_j . Границы ∂K_j множеств K_j суть выпуклые ломаные линии, вершинам (p, q) которых отвечают подходящие дроби p/q цепной дроби числа α .

Через ${}^T M$ обозначим транспонирование матрицы M , а $(M)_{k,l}$ – элемент ее l -го столбца k -й строки. Линейные формы будем записывать как произведение LX матриц: вектор-строки $L = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{R}^n$ на вектор-столбец $X = {}^T(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

В [3], [4] Клейн предложил также и трехмерную конструкцию для изучения наилучших приближений. Три пересекающиеся в нуле плоскости $\mathcal{L}_j = \{X : L_j X = 0\}$ делят $\mathbb{R}^3$ на 8 октантов $\theta_\Sigma = \{X : \sigma_j L_j X \geq 0, j = 1, 2, 3\}$ ($\Sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ – набор знаков $\sigma_j = \pm 1$). Замыкание K_Σ выпуклой оболочки целых точек $X \in \theta_\Sigma, X \neq 0$, ограничено

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 03-01-00027, № 02-01-01067, № 05-01-00050, и программы ОММ РАН.

выпуклой двумерной многогранной поверхностью ∂K_Σ , состоящей из вершин, ребер и граней. Ее вершины дают в некотором смысле наилучшие рациональные приближения линейных форм $L_j X$.

Для кубической однородной разложимой формы $g(X) = L_1 X \cdot L_2 X \cdot L_3 X$ обозначим через Δ определитель матрицы, составленной из L_1, L_2, L_3 . Давенпорт [6]–[8] доказал, что следующая величина:

$$\mu(g) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|\Delta|} \min_{X \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}} |g(X)| \quad (1)$$

не превосходит $1/7$ и $\mu(g) = 1/7$ только для формы g_1 , у которой $L_j = (1, \lambda_j, \lambda_j^2)$, где λ_j суть корни уравнения $\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$, и для эквивалентных форм. Если их исключить из рассмотрения, то $\mu(g) \leq 1/9$ и $\mu(g) = 1/9$ лишь для формы g_2 с $L_j = (1, \lambda_j, \lambda_j^2)$, где теперь λ_j – корни уравнения $\lambda^3 - 3\lambda - 1 = 0$, и для эквивалентных форм. Свиннертон-Дайер [9] отыскал первые 19 форм g_i с наибольшими значениями μ .

В статьях [10]–[13] для форм $g_1 - g_4$ были вычислены многогранники Клейна и разложения векторов L_3 по матричным алгоритмам Эйлера, Якоби, Пуанкаре, Бруна, Брюно, Парусникова. Изучалось расположение их “подходящих дробей” относительно многогранников Клейна. В препринтах [14]–[16] это же было сделано для форм $g_5 - g_7$. Методом Эрмита форму g_1 изучал Шарв [17], а ее многогранники Клейна вычисляла Коркина [18].

В настоящей статье вычисляются многогранники Клейна форм $g_5 - g_7$ и разложения их кратных векторов L_3 по матричным алгоритмам. По расположению “подходящих дробей” относительно многогранников Клейна оценивалось качество алгоритма. С этой точки зрения алгоритмы Эйлера и Пуанкаре оказались наихудшими, а алгоритм Брюно наилучшим. Но ни один из этих алгоритмов не обобщает все свойства цепной дроби. Подробные таблицы, иллюстрирующие предлагаемый материал приведены в препринтах [14]–[16].

2. Многогранники Клейна. О выпуклых многогранниках и конусах см. [19], [20]. Напомним определения, данные в [12]. Рассмотрим два n -мерных вещественных пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}_*^n$ с координатами $x_1, \dots, x_n$ и $u_1, \dots, u_n$ соответственно. Произведение $UX = x_1 u_1 + \dots + u_n x_n$ матриц $U = (u_1, \dots, u_n)$ и $X = {}^T(x_1, \dots, x_n)$ задает операцию *спаривания пространств*. Базисы $L_1, \dots, L_n \in \mathbb{R}_*^n$ и $M_1, \dots, M_n \in \mathbb{R}^n$ назовем *сопряженными*, если $L_k M_j = \delta_{k,j}$, $k, j = 1, \dots, n$, где $\delta_{k,j}$ – символ Кронекера. Отвечающие векторам L_j гиперплоскости $\mathcal{L}_j = \{X : L_j X = 0\}$ делят пространство $\mathbb{R}^n$ на выпуклые конусы. Каждому из 2^n наборов знаков $\Sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, $\sigma_j = \pm 1$, соответствует конус $\theta_\Sigma = \{X : \sigma_j L_j X \geq 0, j = 1, \dots, n\}$ (вместо $+1$ и -1 мы будем писать $+$ и $-$). Аналогично в $\mathbb{R}_*^n$ определяются *двойственные конусы* $\theta_\Sigma^* = \{U : \sigma_j U M_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}$.

Многогранником Клейна K_Σ назовем выпуклую оболочку множества ненулевых целых точек $X \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ конуса θ_Σ . Аналогичное подмножество K_Σ^* конуса θ_Σ^* назовем *многогранником Клейна, двойственным* K_Σ^* . Ограничивающие многогранники $(n-1)$ -мерные поверхности ∂K_Σ и ∂K_Σ^* состоят из граней $\Gamma_s^{(d)}$ разных размерностей d , $0 \leq d < n-1$: вершин ($d=0$), ребер ($d=1$), ..., гиперграней ($d=n-1$). В [12] приведен алгоритм, которым во многих случаях удается вычислить все целые точки поверхностей многогранников Клейна.

Пусть целые точки $X_1, \dots, X_n$ лежат в гиперплоскости $\mathcal{L}$, содержащей грань $\Gamma_s^{(n-1)}$, и пусть векторы $X_j - X_1$, $i = 2, \dots, n$, образуют целочисленный базис гиперплоскости $\mathcal{L}$, т.е. у составленной из этих векторов $(n-1) \times n$ -матрицы наибольший общий делитель всех миноров порядка $n-1$ равен 1. Величину $\rho(\Gamma_s^{(n-1)}) \stackrel{\text{def}}{=} |\det(X_1 X_2 \dots X_n)|$ назовем *расстоянием гиперграни* $\Gamma_s^{(n-1)}$. *Относительным минимумом* назовем точку $X_0 \in \mathbb{Z}^n \cap \theta_\Sigma$, для которой в октанте θ_Σ нет ненулевых целых точек X со свойством

$$|L_j X| < |L_j X_0|, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2)$$

3. Формы $g_5 - g_7$. Зафиксируем индекс i экстремальной формы g_i Свиннертона-Дайера [9] (этот индекс иногда будет опускаться). Форма g_i задается трехмерной решеткой. Образующие решетки суть векторы $L_{i,j} = (1, \alpha_{i,j}, \beta_{i,j})$, $j = 1, 2, 3$, с компонентами – алгебраически сопряженными числами из сопряженных вполне вещественных кубических полей $\mathbb{Q}(\lambda_{i,j})$: числа $\lambda_{i,j} \in \mathbb{R}$ – корни неприводимого уравнения

$$f_i = f_i(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda^3 + f_{i,1}\lambda^2 + f_{i,2}\lambda + f_{i,3} = 0, \quad f_{i,j} \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Для начальных экстремальных форм алгебраические поля $\mathbb{Q}(\lambda_{i,j})$ *нормальны* (совпадают со своими сопряженными $\mathbb{Q}(\lambda_{i,1}) = \mathbb{Q}(\lambda_{i,2}) = \mathbb{Q}(\lambda_{i,3}) = K_i$). Многогранники Клейна таких форм устроены сходно; проиллюстрируем их особенности на примере трех форм $g_5 - g_7$.

Занумеруем корни полиномов (3) в порядке возрастания:

$$\begin{aligned} f_5 &= \lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0, & (\lambda_{5,1}, \lambda_{5,2}, \lambda_{5,3}) &\approx (-2.6511, .2739, 1.3772), \\ f_6 &= \lambda^3 + 4\lambda^2 - 25\lambda - 1 = 0, & (\lambda_{6,1}, \lambda_{6,2}, \lambda_{6,3}) &\approx (-7.3726, -.0397, 3.4123), \\ f_7 &= \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 1 = 0, & (\lambda_{7,1}, \lambda_{7,2}, \lambda_{7,3}) &\approx (-.8019, .5550, 2.2470). \end{aligned} \quad (4)$$

Векторы, задающие экстремальные формы, равны

$$L_{i,j} = \begin{cases} (1, \lambda_{5,j}, -2 + 2\lambda_{5,j} + \lambda_{5,j}^2), & i = 5, \\ \left(1, \frac{-5 + 3\lambda_{6,j} + 2\lambda_{6,j}^2}{21}, \frac{-13 + 12\lambda_{6,j} + \lambda_{6,j}^2}{21}\right), & i = 6, \\ (1, \lambda_{7,j}^2, -2\lambda_{7,j} + \lambda_{7,j}^2), & i = 7, \end{cases} \quad j = 1, 2, 3. \quad (5)$$

Составим из вектор-строк $L_{i,j}$, $j = 1, 2, 3$, матрицы L_i . Базисы, сопряженные к базисам $L_{i,j}$, $j = 1, 2, 3$, задаются вектор-столбцами – столбцами $\tilde{L}_{i,j}$, $j = 1, 2, 3$, матриц L_i^{-1} :

$$\begin{aligned} L_{i,j} &= e_j L_i, & \tilde{L}_{i,j} &= L_i^{-1} e_j, & j &= 1, 2, 3, \\ e_1 &\stackrel{\text{def}}{=} (1, 0, 0), & e_2 &\stackrel{\text{def}}{=} (0, 1, 0), & e_3 &\stackrel{\text{def}}{=} (0, 0, 1). \end{aligned} \quad (6)$$

Определим $\lambda_{i,j}$ для всех $j \in \mathbb{Z}$, положив $\lambda_{i,j} = \lambda_{i,k}$ для j , сравнимых с $k \in \{1, 2, 3\}$ по модулю 3. Введем $s_{i,j}$ и ряд матриц: матрицу перестановок J , *присоединенную матрицу* $A_{i,0}$, задающие модуль и решетку матрицы B_i и A_i , диагональную матрицу Λ_i ,

матрицу Вандермонда W_i , ганкелевы матрицы $S_{i,j}$ и симметричную матрицу V_i :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{i,0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -f_{i,3} \\ 1 & 0 & -f_{i,2} \\ 0 & 1 & -f_{i,1} \end{pmatrix},$$

$$B_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_6 = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 21 & -5 & -13 \\ 0 & 3 & 12 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$A_i = B_i^{-1} A_{i,0} B_i, \quad \Lambda_i = \text{diag}\{\lambda_{i,k}\}_{k=1}^3, \quad (W_i)_{k,l} = \lambda_{i,k}^l, \quad (V_i)_{k,l} = \lambda_{i,k+l},$$

$$s_{i,j} = \sum_{k=1}^3 \lambda_{i,k}^j, \quad (S_{i,j})_{k,l} = s_{i,j+k+l}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad k, l = 1, 2, 3.$$

Отметим следующие свойства этих матриц: $L_i = W_i B_i$, $L_i A_i = \Lambda_i L_i$, $A_i L_i^{-1} = L_i^{-1} \Lambda_i$, $W_i A_{i,0} = \Lambda_i W_i$, $S_{i,j} = {}^t W_i \Lambda_i^k W_i = S_{i,j-1} A_{i,0}$, откуда следует рекуррентная формула Ньютона

$$s_{i,j} = - \sum_{k=1}^3 f_{i,k} s_{i,j-k}, \quad j \geq 3, \quad s_{i,0} = 3, \quad s_{i,1} = -f_{i,1}, \quad s_{i,2} = f_{i,1}^2 - 2f_{i,2}.$$

Компоненты столбца $\tilde{L}_{i,j}$ матрицы $L_i^{-1} = B_i^{-1} S_{i,0}^{-1} W_i$ лежат в том же поле $\mathbb{Q}(\lambda_{i,j})$, где и компоненты строки $L_{i,j}$. В наших случаях

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{5,j} &= {}^t(7 - \lambda_{5,j} - \lambda_{5,j}^2, 3 - \lambda_{5,j}^2, -5 + 3\lambda_{5,j} + 2\lambda_{5,j}^2)/13, \\ \tilde{L}_{6,j} &= {}^t(217 - 21\lambda_{6,j} - 7\lambda_{6,j}^2, -86 + 18\lambda_{6,j} + 5\lambda_{6,j}^2, -52 + 27\lambda_{6,j} + 4\lambda_{6,j}^2)/273, \quad (8) \\ \tilde{L}_{7,j} &= {}^t(10 + 4\lambda_{7,j} - 4\lambda_{7,j}^2, -2 + \lambda_{7,j}^2, -2 - 6\lambda_{7,j} + 3\lambda_{7,j}^2)/14. \end{aligned}$$

Одни корни уравнения (3) представляются как полиномы $\lambda_j = \phi_k(\lambda_{j-k})$ от других корней, или $V = W\Phi$, где $\Phi = W^{-1}V = S_0^{-1} {}^t W V$ – матрица коэффициентов полиномов. Коэффициенты матрицы ${}^t W V$ могут быть выписаны

$${}^t W V = \begin{pmatrix} -f_1 & -f_1 & -f_1 \\ f_2 & f_2 & f_1^2 - 2f_2 \\ (-f_1 f_2 + 3f_3 - \sqrt{D})/2 & (-f_1 f_2 + 3f_3 + \sqrt{D})/2 & -f_1^3 + 3f_1 f_2 - 3f_3 \end{pmatrix}.$$

(Представление для $({}^t W V)_{3,1}$ и $({}^t W V)_{3,2}$ получается, если заметить, что их сумма – симметричный многочлен от корней f_i , а разность

$$({}^t W V)_{3,2} - ({}^t W V)_{3,1} = (\lambda_{3,1} - \lambda_{3,2})(\lambda_{3,2} - \lambda_{3,3})(\lambda_{3,3} - \lambda_{3,1})$$

с учетом порядка нумерации корней равна корню из дискриминанта D_i .) Так как матрица S_0^{-1} рациональна, поле K_i нормально в точности тогда, когда дискриминант D_i

уравнения (3) – квадрат рационального числа. Учитывая, что $D_5 = 13^2$, $D_6 = 273^2$, $D_7 = 7^2$, получаем полиномы, дающие представление корней $\phi_{i,j}(\lambda_{i,k}) = \lambda_{i,j+k}$:

$$\begin{aligned} \phi_{5,1}(\lambda) &= 2 - 2\lambda - \lambda^2, & \phi_{5,2}(\lambda) &= -3 + \lambda + \lambda^2, & \phi_{5,3}(\lambda) &= \lambda, \\ 3\phi_{6,1}(\lambda) &= 10 - 6\lambda - \lambda^2, & 3\phi_{6,2}(\lambda) &= -22 + 3\lambda + \lambda^2, & \phi_{6,3}(\lambda) &= \lambda, \\ \phi_{7,1}(\lambda) &= 2 + \lambda - \lambda^2, & \phi_{7,2}(\lambda) &= -2\lambda + \lambda^2, & \phi_{7,3}(\lambda) &= \lambda. \end{aligned} \quad (9)$$

По тройкам алгебраических чисел (5) определим пары *разложимых* кубических форм $g_i(X)$, $g_i^*(X)$, $X \in \mathbb{R}^3$, которые назовем *сопряженными* друг другу:

$$\begin{aligned} g_i(X) &= L_{i,1}X L_{i,2}X L_{i,3}X = \prod_{j=1}^3 e_j L_i X, \\ g_i^*(X) &= {}^T \tilde{L}_{i,1} X {}^T \tilde{L}_{i,2} X {}^T \tilde{L}_{i,3} X = \prod_{j=1}^3 {}^T X L_i^{-1} e_j = \prod_{j=1}^3 e_j {}^T L_i^{-1} X. \end{aligned} \quad (10)$$

Коэффициенты форм – рациональные числа (они не меняются при перестановках корней $\lambda_{i,j}$). Введем нормированные формы $\tilde{g}_i = c_i g_i$, $\tilde{g}_i^* = c_i^* g_i^*$, $c_i, c_i^* \in \mathbb{Z}$, принимающие в целых точках $X \in Z^3$ взаимно простые в совокупности целые значения. Однородные кубические формы от $X = {}^T(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ можно записать как линейные формы относительно 10-мерных векторов Y с компонентами – мономами:

$$\begin{aligned} Y &\stackrel{\text{def}}{=} {}^T(x_1^3, x_1^2 x_2, x_1^2 x_3, x_1 x_2^2, x_1 x_2 x_3, x_1 x_3^2, x_2^3, x_2^2 x_3, x_2 x_3^2, x_3^3), \\ \tilde{g}_5(X) &= 1g_5(X) = (1, -1, 1, -4, -5, -4, -1, 3, 10, 1)Y, \\ \tilde{g}_5^*(X) &= 169g_5^*(X) = (5, -4, 3, -5, 1, -2, -1, -1, 4, -1)Y, \\ \tilde{g}_6(X) &= 7g_6(X) = (7, 35, -7, 28, 7, -28, -9, -31, -12, 19)Y, \\ \tilde{g}_6^*(X) &= 1183g_6^*(X) = (-7, 42, -35, 7, 49, -28, -9, -23, 4, 9)Y, \\ \tilde{g}_7(X) &= 1g_7(X) = (1, 6, 2, 5, 8, -1, 1, 1, -9, -1)Y, \\ \tilde{g}_7^*(X) &= 392g_7^*(X) = (-8, 24, -8, -10, 16, 2, 1, -1, -9, 1)Y. \end{aligned} \quad (11)$$

Спектром формы назовем значения, принимаемые формой в целых точках $\mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$. После умножения на некоторое рациональное число спектр разложимой формы будет лежать в $\mathbb{Z}$, поэтому он дискретен. *Эквивалентными* будем считать формы

$$h_k(X) = \prod_{j=1}^3 L_{k,j} X, \quad L_{k,j} \in \mathbb{R}_*^3 \setminus \{0\}, \quad k = 1, 2,$$

если определяющие формы векторы $L_{k,j}$ переводятся друг в друга заменой переменных $Y = CX$ с *унимодулярной* матрицей C (целочисленной с определителем ± 1). То есть $L_{1,j}C = d_{s(j)}L_{2,s(j)}$, $j = 1, 2, 3$, где $d_j \neq 0$, а s – перестановка индексов $\{1, 2, 3\}$, принадлежащая группе Галуа уравнения (3). Так как $h_2(X) = h_1(CX) / \prod_{j=1}^3 d_j$, спектры

эквивалентных форм $h_1(CX)$ и $h_2(X)$ пропорциональны, а определяемые формами многогранники Клейна переводятся отображением C друг в друга:

$$C: K_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}^{(1)} \rightarrow K_{\text{sign}(d_1)\sigma_{t(1)}, \text{sign}(d_2)\sigma_{t(2)}, \text{sign}(d_3)\sigma_{t(3)}}^{(2)}$$

(здесь $t = s^{-1}$ – перестановка, обратная перестановке s). Тем же свойством обладают относительные минимумы: целочисленные точки X октанта, удовлетворяющие (2), перейдут в целые точки соответствующего октанта, удовлетворяющие аналогичным условиям.

Чтобы преобразование осуществляло автоморфизм совокупности многогранников Клейна разложимой формы, необходимо (не достаточно) выполнение ряда свойств.

1. Коэффициенты $(M)_{j,k}$ матрицы преобразования суть рациональные числа: целые точки – вершины многогранников – переводятся M в целые точки.

2. Преобразование сохраняет объемы, $\det M = \pm 1$: объемы как опирающейся на грань пирамиды Π с вершиной в нуле, так и ее образов $M^k\Pi$, $k \in \mathbb{Z}$, с точностью до множителя $1/3!$ целые.

3. Наконец, октанты переходят в октанты, т.е. три задающие октанты плоскости $\{X : e_j LX = 0\}$ переходят друг в друга. Следовательно, M в композиции MU с некоторой перестановкой U октантов переводит задающие октанты векторы $e_j L$ в пропорциональные. Векторы $e_j L$ – собственные векторы A , поэтому матрица MU выражается через A (как квадратичный полином $p(A)$).

Свойства 2, 3 означают в точности, что формы (10) инвариантны относительно M .

Покажем, что матрице U могут отвечать не любые перестановки, а только элементы группы Галуа алгебраического поля K_i . Пусть, например, матрица U оставляет на месте один из векторов $(e_1 L)$ и меняет местами два других $(e_2 L, e_3 L)$; $J^{(23)}$ – матрица перестановки векторов e_2 и e_3 . Предположим при этом, что матрица M имеет рациональные коэффициенты. Так как

$$\begin{aligned} M &= p(A)U = L^{-1}p(\Lambda)J^{(23)}L = B^{-1}W^{-1}p(\Lambda)WW^{-1}J^{(23)}WB \\ &= B^{-1}p(A_0)W^{-1}J^{(23)}WB, \end{aligned}$$

то $BMB^{-1} = p(A_0)W^{-1}J^{(23)}W$. Для присоединенной матрицы A_0 верно $A_0^{j-1}Te_k = A_0^{k-1}Te_j$, $j, k = 1, 2, 3$, поэтому справедливо

$$\left(\sum_{j=1}^3 p_j A_0^{j-1}\right)Q = \left(\sum_{j=1}^3 q_j A_0^{j-1}\right)P, \quad P = {}^T(p_1, p_2, p_3), \quad Q = {}^T(q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3. \quad (12)$$

Возьмем в (12) за P набор коэффициентов многочлена p , а за Q – первый столбец матрицы $W^{-1}J^{(23)}W$: $Q = {}^T(s_0, s_1, s_2)$. Тогда слева получим первый столбец F рациональной матрицы BMB^{-1} , а в правой части – ненулевую целочисленную матрицу $G = \sum_{j=0}^2 s_j A_0^j$. Определитель матрицы G не равен 0 (иначе бы многочлен $\sum_{j=0}^2 s_j \lambda^j$ делил неприводимый характеристический многочлен $f(\lambda)$ матрицы A_0), а сама матрица обратима. Поэтому рациональны коэффициенты вектора $P = G^{-1}F$ (числа p_j) и, следовательно, коэффициенты матрицы $p(A_0)$. Итак, рациональность M эквивалентна

рациональности $p(A_0)^{-1} B M B^{-1} = W^{-1} J^{(23)} W$. Получено противоречие, поскольку, например, коэффициент

$$(W^{-1} J^{(23)} W)_{2,2} = \lambda_{i,1}^2 + 2\lambda_{i,2}\lambda_{i,3} = -2f_{i,2} - 2f_{i,1}\lambda_{i,1} - \lambda_{i,1}^2$$

иррационален.

Покажем, что случай, когда U – циклическая перестановка базисных векторов, возможен. Положим $U_i \stackrel{\text{def}}{=} L_i^{-1} J L_i$. Рациональность элементов матрицы

$$U_i = B_i^{-1} S_{i,0}^{-1} {}^T W_i J W_i B_i$$

эквивалентна рациональности

$${}^T W_i J W_i = \begin{pmatrix} 3 & -f_{i,1} & f_{i,1}^2 - 2f_{i,2} \\ -f_{i,1} & f_{i,2} & (-f_{i,1}f_{i,2} + 3f_{i,3} + \sqrt{D_i})/2 \\ f_{i,1}^2 - 2f_{i,2} & (-f_{i,1}f_{i,2} + 3f_{i,3} - \sqrt{D_i})/2 & -2f_{i,1}f_{i,3} + f_{i,2}^2 \end{pmatrix}$$

и снова означает, что поле $\mathbb{Q}(\lambda_{i,j})$ нормально. Тождество $U_i \phi_{i,j}(A_i) = \phi_{i,j+1}(A_i) U_i$, эквивалентное соотношению $J \phi_{i,j}(\Lambda_i) J^{-1} = \phi_{i,j+1}(\Lambda_i)$, показывает, что матрица U_i не коммутирует с полиномами от A_i и поэтому не выражается через A_i .

Из (3), (4) следует, что $\det(\phi_{i,j}(A_i)) = f_{i,3} = \pm 1$, и отображения $\phi_{i,j}(A_i)$, $j = 1, 2, 3$, – автоморфизмы разложимых форм. Выпишем матрицы автоморфизмов A_i , $\phi_{i,1}(A_i)$, U_i :

$$\begin{aligned} A_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, & \phi_{5,1}(A_5) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, & U_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \\ A_6 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}, & \phi_{6,1}(A_6) &= \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ -2 & -1 & -1 \\ -3 & -3 & -4 \end{pmatrix}, & U_6 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \\ A_7 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, & \phi_{7,1}(A_7) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, & U_7 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. Сопряженные многогранники пятой и шестой форм. Пусть форма g эквивалентна форме

$$\widehat{g}(X) = \prod_{j=1}^3 e_j \widehat{L} X,$$

а строки $e_j \widehat{L}$ матрицы $\widehat{L}$ являются собственными векторами симметричной матрицы $\widehat{A}$, $\widehat{A} = \widehat{L}^{-1} \widehat{A} \widehat{L}$. Последнее условие равносильно тому, что матрица $M = \widehat{L} {}^T \widehat{L}$ диагональна. Тогда форма $\widehat{g}(X)$ эквивалентна своей сопряженной форме

$$\widehat{g}(X) = \prod_{j=1}^3 e_j \widehat{L} {}^T \widehat{L}^{-1} X = \prod_{j=1}^3 e_j (M)_{j,j} {}^T \widehat{L}^{-1} X = \det M \widehat{g}^*(X).$$

Тем же свойством обладает и форма g . Так как $\widehat{g}(CX) = g(X)$, то $\widehat{g}^*({}^TC^{-1}X) = g^*(X)$ и $g(X) = \widehat{g}(CX) = \det M \widehat{g}^*(CX) = \det M \widetilde{g}^*({}^TCX)$.

Для формы g_5 возьмем $\widehat{L}_5 = W \widehat{B}_5$ с

$$\widehat{B}_5 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

тогда получим

$$\widehat{A}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C_5 = \widehat{B}_5^{-1} B_5, \quad {}^TC_5 C_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

и $\det M = \det^2 \widehat{L}_5 = (\det W_5 \det \widehat{B}_5)^2 = D_5 = 13^2$. Итак, формы g_5 и g_5^* эквивалентны:

$$g_5(X) = 169g_5^*(x_1 - x_3, x_2, -x_1 + 2x_3).$$

Для шестой экстремальной формы целочисленной симметричной матрицы с характеристическим уравнением $f_6(\lambda) = 0$ не существует, и приходится действовать иначе, чем для пятой формы.

Для эквивалентности форм $h_1 = g(X)$ и $h_2 = g^*(X)$ достаточно, чтобы матрица $M = LC {}^TL$ была диагональной или переставленной диагональной матрицей $M = \text{diag}\{m_j\}_{j=1}^3 J^l$, $l \in \{0, 1, 2\}$, т.е.

$$M = \sum_{k=0}^2 p_k \Lambda^k U^l, \quad p_k \in \mathbb{R}.$$

Следовательно,

$$C = {}^T L M L = {}^T B {}^T W M W B = {}^T B S_0 \left(\sum_{k=0}^2 p_k A_0^k \right) U^l B.$$

Задача свелась к нахождению трех чисел p_k таких, что определитель матрицы

$${}^T B \sum_{k=0}^2 p_k S_k U^l B$$

равен ± 1 , а все ее элементы – целые числа. Первое свойство дает кубическое относительно p_k уравнение

$$\begin{aligned} \pm 1 &= D \det B^2 \prod_{j=1}^3 \sum_{k=0}^2 p_k \lambda_j^k \\ &= D \det B^2 \{ p_0^3 - f_1 p_0^2 p_1 + (f_1^2 - 2f_2) p_0^2 p_2 + f_2 p_0 p_1^2 \\ &\quad + (3f_3 - f_1 f_2) p_0 p_1 p_2 - f_3 p_1^3 + (f_2^2 - f_1 f_3) p_0 p_2^2 + f_1 f_3 p_1^2 p_2 - f_2 f_3 p_1 p_2^2 + f_3^2 p_3^3 \} \end{aligned} \quad (13)$$

($D = \det S_0$ – дискриминант уравнения $f(\lambda) = 0$). Из второго условия следует, что элементы матрицы $\sum_{k=0}^2 p_k A_0^k$ – рациональные числа со знаменателями, делящими произведение квадрата знаменателя b определителя матрицы B^{-1} на $(3-l)$ -ю степень знаменателя определителя матрицы U и на D – общий знаменатель элементов S_0^{-1} .

Возьмем для формы g_6 матрицу

$$C = C_6 = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

получим $M = {}^T L_6^{-1} C_6 L_6^{-1} = \text{diag}\{(76 + 12\lambda_{6,j} - 3\lambda_{6,j}^2)/13\}_{j=1}^3$, $\det M = 169$. Отсюда находим $g_6(CX) = 169g^*(X)$ или

$$\tilde{g}_6(6x_1 - x_2 - 4x_3, -x_1 + 2x_2, -4x_1 + 3x_3) = \tilde{g}_6^*(x_1, x_2, x_3).$$

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 1. *Для пятой и шестой экстремальных форм многогранники Клейна эквивалентны сопряженным многогранникам Клейна.*

5. Группы отображений и фундаментальные области. Изучим теперь структуру поверхностей ∂K_i . Для пятой и шестой форм рассмотрим группы G_i^+ , $i = 5, 6$, преобразований вида

$$A_i^{2j} \phi_{i,1}(A_i)^{2k} U_i^l X_0, \quad j, k \in \mathbb{Z}, \quad l = 0, 1, 2. \quad (14)$$

Мы видели, что многогранники $K_{i,+++}$ относительно них инвариантны. Укажем фундаментальные области H_i относительно действия данных групп. Вычислим методом [12] поверхности $\partial K_{i,+++}$. Для формы g_5 с каждой вершиной X , $\tilde{g}_5(X) = 1$, многогранника Клейна сопряжены шесть точек: по три точки со значением формы $\tilde{g}_5$, равными 1 и 5. Для формы g_6 точкам X поверхности многогранника Клейна, значения формы $\tilde{g}_6(X)$ в которых равно 7, сопряжены точки со значениями формы в них 9 и 33. Если $\tilde{g}_6(X) = 9$, то в сопряженной X точке Y значения $\tilde{g}_6(Y)$ равны 9, 19 или 33. Если $\tilde{g}_6(X) = 19$, то в сопряженной точке $\tilde{g}_6(Y) = 9$. Наконец, если $\tilde{g}_6(X) = 33$, то в сопряженных точках форма $\tilde{g}_6(Y)$ равна 7 или 9. Введем для некоторых найденных точек обозначения

$$\begin{aligned} P_{5,1} &= (1, 0, 0), & P_{5,2} &= (2, -2, 1), & P_{5,3} &= (3, 1, 1), & P_{5,4} &= (4, 1, -2), \\ P_{6,1} &= (1, 0, 0), & P_{6,2} &= (1, 12, -3), & P_{6,3} &= (22, 3, 15), & P_{6,4} &= (43, -15, -12). \end{aligned}$$

Отображениями $A_i, \phi_{i,1}(A_i), U_i$ они переводятся друг в друга:

$$\begin{aligned} P_{i,2} &= A_i^2 P_{i,1}, & P_{i,3} &= \phi_{i,1}(A_i)^2 P_{i,1}, \\ P_{i,4} &= \phi_{i,2}(A_i)^2 P_{i,1}, & P_{i,4} &= U_i P_{i,3} = U_i^2 P_{i,2}. \end{aligned}$$

Обозначим $\Gamma_{5,j}^{(2)}$ треугольные части граней поверхностей $\partial K_{5,+++}$:

$$\Gamma_{5,1}^{(2)} = \{(1, 0, 0), (2, -2, 1), (3, -3, 1)/3\}, \quad \rho = 1,$$

$$\Gamma_{5,2}^{(2)} = \{(1, 0, 0), (2, -2, 1), (7, -1, 4)/3\}, \quad \rho = 1,$$

и через $\Gamma_{6,j}^{(2)}$ обозначим трех- и четырехугольные грани (части граней) поверхности $\partial K_{6,+++}$:

$$\Gamma_{6,1}^{(2)} = \{(1, 0, 0), (4, -1, 0), (13, -5, -3), (8, -3, -2)\}, \quad \rho = 1,$$

$$\Gamma_{6,2}^{(2)} = \{(8, -3, -2), (78, -31, -19), (122, -48, -30)/3\}, \quad \rho = 2,$$

$$\Gamma_{6,3}^{(2)} = \{(13, -5, -3), (8, -3, -2), (78, -31, -19), (58, -23, -14)\}, \quad \rho = 3,$$

$$\Gamma_{6,4}^{(2)} = \{(4, -1, 0), (13, -5, -3), (58, -23, -14)\}, \quad \rho = 2,$$

$$\Gamma_{6,5}^{(2)} = \{(4, -1, 0), (58, -23, -14), (88, -33, -18)/3\}, \quad \rho = 1,$$

$$\Gamma_{6,6}^{(2)} = \{(78, -31, -19), (505, -201, -123), (58, -23, -14)\}, \quad \rho = 3.$$

(В скобках приведены расстояния граней, частями которых являются области.)

Поверхность многогранника Клейна кубической разложимой формы удобно рассматривать в *логарифмических координатах* $l_j = l_j(X) = \ln |L_j X|$, $j = 1, 2, 3$. Там она представляется как двумерная периодическая поверхность, параллельная плоскости $l_1 + l_2 + l_3 = 0$. Ее группа автоморфизмов превращается в группу движений, сохраняющую указанную плоскость. В естественных координатах $l'_3 = l_1 + l_2 + l_3$, $l'_1 = l_1 - l'_3/3$, $l'_2 = l_2 - l'_3/3$, некоторые свойства симметрии поверхности многогранника Клейна теряют наглядность, поэтому удобнее взять координаты n_i , связанные с l_i ортогональными преобразованиями. Для расположенных вне плоскостей $\mathcal{L}_j$, $j = 1, 2, 3$, точек X положим

$$n_1 = \frac{l_1 + l_2 + l_3}{\sqrt{3}}, \quad n_2 = \frac{-l_1 + 2l_2 - l_3}{\sqrt{6}}, \quad n_3 = \frac{l_1 - l_3}{\sqrt{2}}.$$

На рис. 1–4 в координатах n_2, n_3 показаны поверхности многогранников Клейна $\partial K_{i,+++}$ и относительные минимумы для форм g_5, g_6, g_7 и g_7^* соответственно. Целочисленные точки поверхностей (вершины и точки на ребрах и гранях) на рисунках закрашены, а точки относительных минимумов – нет. Над точками надписаны значения, принимаемые в них целочисленными формами $\tilde{g}_i, \tilde{g}_i^*$, а рядом с некоторыми точками – их координаты. Границы областей $\Gamma_{i,j}^{(2)}$, из которых составлены фундаментальные области, проведены жирными линиями. Отображения U_5, U_6 выглядят как повороты плоскости n_2, n_3 вокруг начала координат на угол $2\pi/3$ по часовой стрелке, а отображения A_i^2 и $\phi_{i,1}(A_i)^2$ действуют как сдвиги на векторы $\overline{P_{i,1}P_{i,2}}$ и $\overline{P_{i,1}P_{i,3}}$ соответственно. Многогранные области $H_5 = \Gamma_{5,1}^{(2)} \cup \Gamma_{6,2}^{(2)}$, $H_6 = \bigcup_{j=1}^6 \Gamma_{6,j}^{(2)}$ будут фундаментальными областями относительно групп (14). Осталось показать, что данные группы исчерпывают все автоморфизмы соответствующих поверхностей многогранников Клейна $\partial K_{i,+++}$.

Рис. 1. Многогранник Клейна формы g_5

Для любого автоморфизма h формы g_5 композиция h' автоморфизма h с некоторым преобразованием вида (14) оставляет на месте грань $\Gamma_{5,2}^{(2)}$. Учитывая, какие значения принимает форма g_5 в целых точках опирающегося на $\Gamma_{5,2}^{(2)}$ конуса, получаем, что h' переводит ее вершины $P_{5,1}$ и $P_{5,2}$ друг в друга, а вершину треугольника $P_{5,5} = (7, -1, 4)/3$ и целочисленную точку $P_{5,6} = (2, -1, 1)$ этой грани оставляет на месте. Поскольку площади треугольных частей граней с вершинами в точках $P_{5,1}, P_{5,5}, P_{5,6}$ и $P_{5,2}, P_{5,5}, P_{5,6}$ различны (их отношение равно 3), единственное такое отображение – тождественное. Для многогранника шестой формы аналогичный вывод можно сделать, взяв точки

$$P_{6,5} = (13, -5, -4), \quad P_{6,6} = (24, -9, -5), \quad P_{6,7} = (51, -20, -12).$$

Точка $P_{6,5}$ – это вершина треугольной грани $\Gamma_{6,4}^{(2)}$ расстояния 2 многогранника, причем значение $\tilde{g}_6(P_{6,5}) = 19$ не равно значениям формы g_6 в других вершинах грани. Две

Рис. 2. Многогранник Клейна формы $\tilde{g}_6$

другие точки суть расположенные под этой гранью точки относительного минимума формы, значения формы $\tilde{g}_6$ в которых различны и равны 121 и 117.

Осталось заметить, что многогранники Клейна разных полостей переводятся друг в друга преобразованиями $A_i, \phi_{i,1}, -E$. Таким образом, установлено следующее свойство многогранников Клейна пятой и шестой экстремальных форм.

ТЕОРЕМА 2. Для форм g_5, g_6 группы автоморфизмов их многогранников Клейна имеют две образующих бесконечного порядка A_i и $\phi_{i,1}(A_i)$ и две образующих U_i и $-E$ порядков 3 и 2 соответственно:

$$A_i^j \phi_{i,1}(A_i)^k U_i^l X_0, \quad j, k \in \mathbb{Z}, \quad l = 0, 1, 2, \quad i = 5, 6.$$

Фундаментальная область H_5 совокупности поверхностей многогранников Клейна $\bigcup_{\Sigma} \partial K_{5,\Sigma}$ состоит из треугольников $\Gamma_{5,1}^{(2)}, \Gamma_{5,2}^{(2)}$ расстояния 1, а фундаментальная область H_6 поверхностей многогранников Клейна $\bigcup_{\Sigma} \partial K_{6,\Sigma}$ состоит из тре-

Рис. 3. Многогранник Клейна формы $\tilde{g}_7$

угольника $\Gamma_{6,4}^{(2)}$ и двух четырехугольников $\Gamma_{6,1}^{(2)}, \Gamma_{6,3}^{(2)}$ расстояния 1, двух треугольников $\Gamma_{6,2}^{(2)}, \Gamma_{6,5}^{(2)}$ расстояния 2 и треугольника $\Gamma_{6,6}^{(2)}$ расстояния 3.

Кольцо с единицей

$$O = \left\{ \sum_{k=0}^2 p_k A_0^k, p_k \in \mathbb{Z} \right\}$$

одновременно является $\mathbb{Z}$ -модулем, т.е. O это порядок поля $GL(3, \mathbb{Q})$. Для матрицы $B \in GL(3, \mathbb{Q})$, если матрица $A = B^{-1}A_0B$ не унимодулярна, сопряженный с O порядок

$$O_B = B^{-1}OB = \left\{ \sum_{k=0}^2 p_k A^k, p_k \in \mathbb{Z} \right\}$$

состоит не только из унимодулярных матриц. Содержащиеся в порядке O_B множества матриц с определителем ± 1 (множество SO_B) и множества унимодулярных матриц $(O_{B,1})$ – коммутативные группы по умножению. Группа SO_B , а следовательно,

Рис. 4. Многогранник Клейна формы $\tilde{g}_7^*$

и $O_{B,1}$, как ее подгруппа конечного индекса, – свободные группы с двумя образующими (см. [21, гл. II, § 2]).

Для седьмой экстремальной формы можно проверить, что индекс подгруппы $O_{B_7,1}$ в группе O_{B_7} равен 7. Точнее, матрицы $A_7^j \phi_{7,1}(A_7)^k$ унимодулярны, если показатели степеней j, k удовлетворяют условию $2j + k \equiv 0 \pmod{7}$. Отсюда следует, что матрицы $A_7^j \phi_{7,1}(A_7)^k U_7^l$ унимодулярны, если для $j, k \in \mathbb{Z}, l \in \{0, 1, 2\}$ выполнено $2j + k(3l + 1) - 2l \equiv 0 \pmod{7}$. Образующими в последней группе будут матрицы

$$F_1 = A_7^2 \phi_{7,1}(A_7)^3 = 3E + 2A_7 - 2A_7^2, \quad F_2 = A_7^3 \phi_{7,1}(A_7) = E - 2A_7^2, \quad R = A_7^2 U_7^2.$$

Для формы g_7 введем обозначения некоторых областей $\Gamma_{7,j}^{(2)}$ – граней или частей граней многогранников $\partial K_{7,+++}, \partial K_{7,+++}^*$:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{7,1}^{(2)} &= \{(1, 0, 0), (2, 1, 1)/3, (1, 0, 1)\}, & \rho &= 1, \\
\Gamma_{7,2}^{(2)} &= \{(1, 0, 0), (1, 0, 1), (30, -9, 31)/3, (4, -1, 2)\}, & \rho &= 1, \\
\Gamma_{7,3}^{(2)} &= \{(6, -1, -1), (1, 0, 0), (4, -1, 2)\}, & \rho &= 3, \\
\Gamma_{7,1}^{(2)*} &= \{(1, 1, 0), (1, 1, 2), (2, 1, 1), (3, 1, -2)\}, & \rho &= 1, \\
\Gamma_{7,2}^{(2)*} &= \{(2, 1, 1), (3, 2, 6), (10, 6, 16)/3\}, & \rho &= 2, \\
\Gamma_{7,3}^{(2)*} &= \{(2, 1, 1), (1, 1, 2), (3, 2, 6)\}, & \rho &= 1,
\end{aligned}$$

являющихся выпуклыми оболочками приведенных точек. Здесь полные грани суть $\Gamma_{7,1}^{(2)*}, \Gamma_{7,3}^{(2)*}$, а области $\Gamma_{7,2}^{(2)}, \Gamma_{7,2}^{(2)*}$ имеют вершинами не целые точки. Определим также множества $H_7 = \bigcup_{j=1}^3 \Gamma_{7,j}^{(2)}$, $H_7^* = \bigcup_{j=1}^3 \Gamma_{7,j}^{(2)*}$.

Все точки поверхности $\partial K_{7,+++}$ могут быть получены из точек множества H_7 при помощи автоморфизмов многогранника, составляющих группу

$$G_7^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{F_1^{2i} F_2^{2j} R^l, j, k \in \mathbb{Z}, l = 0, 1, 2\}.$$

Чтобы показать, что группа автоморфизмов исчерпывается группой G_7^+ , установим, что множество H_7 будет фундаментальной областью поверхности многогранника. Для этого достаточно показать, что во множестве H_7 нет подобластей, переводящихся друг в друга не вошедшими в группу G_7^+ автоморфизмами многогранника Клейна. Но сформулированное свойство следует из того, что всякий автоморфизм множества H_7 должен переводить в себя единственную грань $\Gamma_{7,1}$ расстояния 3, а расположенные за этой гранью точки относительных минимумов – в аналогичные точки за этой же гранью. В единственных содержащихся там точках относительных минимумов $(5, -1, 1)$, $(6, -1, 0)$ форма $\tilde{g}_7$ принимает значения 29 и 13, а в вершине $(6, -1, -1)$ – значение 8. Поскольку все три перечисленных значения формы $\tilde{g}_7$ различны, рассматриваемый автоморфизм H_7 – это тождественное преобразование.

Группа автоморфизмов совокупности поверхностей всех восьми многогранников Клейна $\bigcup_{\Sigma} \partial K_{7,\Sigma}$ получается из G_7^+ добавлением преобразований F_1 и $-E$. Сопряженный многогранник Клейна имеет сопряженную группу автоморфизмов, а фундаментальной областью его поверхности будет множество H_7^* . Итак, доказана

ТЕОРЕМА 3. *Для формы g_7 (соответственно g_7^*) группа автоморфизмов G_7 (соответственно G_7^*) имеет две образующих бесконечного порядка F_1, F_2 (${}^T F_1, {}^T F_2$) и две образующих R и $-E$ (${}^T R$ и $-E$) порядков 3 и 2 соответственно. Фундаментальная область H_7 совокупности поверхностей многогранников Клейна $\bigcup_{\Sigma} \partial K_{7,\Sigma}$ состоит из двух треугольников $\Gamma_{7,1}^{(2)}, \Gamma_{7,3}^{(2)}$ расстояний 1 и 3 и четырехугольника $\Gamma_{7,2}^{(2)}$ расстояния 1, а фундаментальная область H_7^* совокупности поверхностей многогранников Клейна $\bigcup_{\Sigma} \partial K_{7,\Sigma}^*$ состоит из двух треугольников $\Gamma_{7,2}^{(2)*}, \Gamma_{7,3}^{(2)*}$ расстояний 2 и 3 и четырехугольника $\Gamma_{7,1}^{(2)}$ расстояния 1.*

На рис. 3, 4 изображены поверхности многогранники Клейна форм g_7, g_7^* . Как и раньше, выделены фундаментальные области. Также для некоторой точки $P_{7,1} = (1, 0, 0) \in$

$\partial K_{7,+++}$ $P'_{7,1} \in \partial K_{7,+++}^*$ на рис. 3 отмечены ее образы $P_{7,j}$, впервые попадающие на тот же многогранник $\partial K_{7,+++}$ под действием степеней базисных отображений

$$P_{7,2} = F_1^2 P_{7,1}, \quad P_{7,3} = F_2^2 P_{7,1}, \quad P_{7,4} = R P_{7,1}, \quad P_{7,5} = R^2 P_{7,1}.$$

Аналогично на рис. 4 отмечены

$$P'_{7,1} = (1, 1, 2), \quad P'_{7,2} = {}^T F_1^2 P'_{7,1} = {}^T U P'_{7,1}, \quad P'_3 = {}^T F_2^2 P'_{7,1}, \quad P_4 = {}^T U^2 P'_{7,1}.$$

В таблице 1 представлены значения форм $\tilde{g}_7, \tilde{g}_7^*$ во взаимно сопряженных точках.

Таблица 1

Форма	Значение формы в точке	Расположение точки	Сопряженная форма	Значения сопряженной формы в сопряженных точках
$\tilde{g}_7$	1	вершина	$\tilde{g}_7^*$	1, 1, 7, 8, 8, 8, 13
	7	на грани		1
	8	на грани		1
	13	на грани		1
$\tilde{g}_7^*$	1	вершина	$\tilde{g}_7$	1, 1, 1, 1, 1, 1, 7, 7, 8, 8, 8, 13, 13, 13
	7	вершина		1, 1, 1
	8	вершина		1
	8	на ребре		1, 1
	13	на грани		1

6. Разложения по матричным алгоритмам. Исследовался вопрос, насколько улавливают структуру поверхностей многогранников Клейна различные многомерные матричные обобщения разложения в цепную дробь. Вычислялись разложения кратного вектора формы по алгоритмам Эйлера, Якоби (четыре варианта), Пуанкаре, Бруна, Брюно, Парусникова (см. [11], [13]). При этом в [11], [13] алгоритм Брюно описан неверно. Правильное описание его шага такое: для тройки чисел $\alpha \geq \beta \geq \gamma \geq 0$ вычисляются $a = [\alpha/\beta]$, $b = [\beta/\gamma]$, $c = [(\alpha - a\beta)/\gamma]$ ($[\cdot]$ – целая часть), делаются преобразования $\alpha' = \alpha - a\beta - c\gamma$, $\beta' = \beta - b\gamma$, $\gamma' = \gamma$, после чего числа α', β', γ' упорядочиваются. Также использовался ускоренный алгоритм Бруна, отличающийся тем, что последовательные шаги, где нет переупорядочения компонент векторов, включаются в шаг с упорядочением: шаг – это получение и упорядочение чисел $\alpha' = \alpha - [\alpha/\beta]\beta$, $\beta' = \beta$, $\gamma' = \gamma$.

Рассматривался начальный вектор V (вектор-столбец) с положительными компонентами. Для его подходящих дробей (определение см. ниже) X вычислялись значения форм $g_i(X)$. Дополнительным индексом k пометим *остаток* V_k цепной дроби – вектор, возникающий на k -м шаге матричного алгоритма; положим $V_{-1} = V$. Остатки связаны соотношениями $V_k = Q_k L_{k-1}$, где унимодулярные матрицы Q_k определяются конкретным алгоритмом. *Периодичность* алгоритма – это пропорциональность двух разных по номеру остатков, а *длина периода* – это разность первых таких номеров шагов.

Введем пять матриц перестановок. Матрицу $\tilde{Q}_0 = \tilde{Q}_0(V)$ возьмем такой, чтобы компоненты $\tilde{Q}_0 V$ убывали, и положим

$$Q^{(123)} = E, \quad Q^{(132)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^{(213)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q^{(312)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для всех алгоритмов, кроме Якоби, положим $Q_0 = \tilde{Q}_0$, а для четырех вариантов алгоритмов Якоби положим $Q_0 = Q^{(\kappa)} \tilde{Q}_0$, $\kappa = 123, 132, 213, 312$. Подходящими дробями назовем векторы $N_k {}^T e_j$, $j = 1, 2, 3$, $k = 0, 1, \dots$, где $N_k = (Q_k \dots Q_1 Q_0)^{-1}$.

В качестве начальных векторов взяты векторы $V = {}^T L_{i,3}$ и $\tilde{L}_{i,3}$, отвечающие наибольшим корням $\lambda_{i,3}$ уравнений (3). Предпочтение этим векторам было отдано потому, что для первых экстремальных форм $g_i(X)$, $g_i^*(X)$, $i \leq 6$, у них не было отрицательных компонент и первые шаги матричных алгоритмов не требовали модификации. Ниже приведены результаты разложений не для всех матричных алгоритмов, а только для которых подходящие дроби не уходят глубоко под поверхности многогранников Клейна (на данном начальном векторе).

Для вектора $L_{5,3} \approx (1, 1.3772, 2.6511)$ ускоренный алгоритм Бруна имеет период $T_1 = 3A_5^2 + 7A_5 - 2E = A_5^2 \phi_{5,1}(A_5)^2$ длины 5, алгоритмы Якоби (123) и (132) – период $T_2 = 8A_5^2 + 19A_5 - 6E = -A_5^2 \phi_{5,1}(A_5)^3$ длины 5, алгоритм Брюно – период $T_3 = 2A_5^2 + 5A_5 - E = A_5 \phi_{5,1}(A_5)^2$ длины 2, а алгоритм Парусникова – период $T_4 = 9931A_5^2 + 23608A_5 - 7211E = -A_6 \phi_{5,1}(A_5)^9$ длины 8. Для вектора ${}^T \tilde{L}_{5,3} \approx (.2866, .0849, .2250)$ алгоритм Бруна имеет период ${}^T T_3$ длины 4, алгоритмы Якоби (213), (132) и (312) – период ${}^T T_2$ длины 5, алгоритм Брюно – период $106 {}^T A_5^2 + 252 {}^T A_5 - 77E = -{}^T A_5^4 \phi_{5,1}({}^T A_5)^5$ длины 7 и алгоритм Парусникова – период ${}^T T_4$ длины 7.

Для вектора $L_{6,3} \approx (1, 1.3583, 1.8853)$ алгоритм Бруна и алгоритмы Якоби (123), (213) и (132) имеют период $T_5 = 17A_6^2 + 126A_6 + 5E = A_6^2 \phi_{6,1}(A_6)^2$. Длины периодов у этих алгоритмов разные: для алгоритма Бруна – 12, а для алгоритмов Якоби – 8 шагов. Алгоритм Брюно имеет наиболее короткий период (в 3 шага) $T_6 = (2A_6^2 + 15A_6 + E)/3 = -A_6 \phi_{6,1}(A_6)$. В разложении вектора ${}^T \tilde{L}_{6,3} \approx (.2338, .1232, .3176)$ период ${}^T T_5$ был найден у алгоритмов Бруна (длины 12), Якоби (213), (132) и (312) (длины 8), Брюно (длины 4).

В разложении вектора $L_{7,3} \approx (1, 5.0489, .5550)$ у алгоритма Бруна был найден период $T_7 = 2A_7^2 - E = -A_7^2 \phi_{7,1}(A_7)$ длины 2. У алгоритма Брюно период не был обнаружен, но все найденные по алгоритму подходящие дроби были точками многогранников Клейна или относительными минимумами. Вместо вектора $\tilde{L}_{7,3} \approx (-.0863, .2178, -.0239)$ брался вектор $V = L_{7,3}^*$ с положительными компонентами – абсолютными значениями компонент $\tilde{L}_{7,3}$. Поскольку у первой и третьей компонент сменили знаки, для исследования периодичности использовалась не матрица A_7 , а связанная с ней матрица $A_7^* = {}^T(Z^{-1}A_7Z)$, где $Z = \text{diag}\{-1, 1, -1\}$ – диагональная матрица замен знаков. Периодичными оказались только алгоритмы Якоби (132) и Брюно. У алгоритма Брюно периодом длины 1 служит матрица $T_7^* = {}^T(Z^{-1}T_7Z) = 2(A_7^*)^2 - E = -(A_7^*)^3 \phi_{7,1}(A_7^*)$, а у алгоритма Якоби (132) – ее квадрат (период длины 7) $T_8 = 16(A_7^*)^2 + 4A_7^* - 7E = (A_7^*)^6 \phi_{7,1}(A_7^*)^2$.

Автор благодарит А. Д. Брюно за постановку задачи и полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Хинчин А. Я. Цепные дроби. М.: Физматгиз, 1961.
- [2] Klein F. Ueber eine geometrische Auffassung der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung // Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math. -Phys. Kl. 1895. № 3. P. 357–359.
- [3] Klein F. Sur une representation géométrique du developpement en fraction continue ordinaire // Nouv. Ann. Math. (3). 1896. V. 15. P. 321–331.
- [4] Klein F. Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie. Bd. I. Einleitung. Vorlesung 1895/1896 herausgegeben von A. Sommerfeld. Göttingen, 1896.
- [5] Koksma J. F. Diophantische Approximationen. Berlin: Springer, 1936.
- [6] Davenport H. On the product of three homogeneous linear forms. I // Proc. London Math. Soc. (2). 1938. V. 44. P. 412–431.
- [7] Davenport H. Note on the product of three homogeneous linear forms // J. London Math. Soc. 1941. V. 16. P. 98–101.
- [8] Davenport H. On the product of three homogeneous linear forms. IV // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1943. V. 39. P. 1–21.
- [9] Swinnerton-Dyer H. P. F. On the product of three homogeneous linear forms // Acta Arith. 1971. V. 18. P. 371–385.
- [10] Брюно А. Д., Парусников В. И. Многогранники Клейна для двух кубических форм Давенпорта // Матем. заметки. 1994. Т. 56. № 4. С. 9–27.
- [11] Брюно А. Д., Парусников В. И. Сравнение разных обобщений цепных дробей // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 3. С. 339–348.
- [12] Parusnikov V. I. Klein polyhedra for complete decomposable forms // Number Theory / ed. K. Györy, A. Pethő and V. T. Sós. Berlin–New York: de Gruyter, 1998. P. 453–463.
- [13] Парусников В. И. Многогранники Клейна для четвертой экстремальной кубической формы // Матем. заметки. 2000. Т. 67. № 1. С. 110–128.
- [14] Парусников В. И. Многогранники Клейна для пятой экстремальной кубической формы. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН № 69. М., 1998.
- [15] Парусников В. И. Многогранники Клейна для шестой экстремальной кубической формы. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН № 69. М., 1999.
- [16] Парусников В. И. Многогранники Клейна для седьмой экстремальной кубической формы. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН № 79. М., 1999.
- [17] Charve L. De la reduction des formes ternaires positives et de leur application aux irrationnelles du troisieme degre // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. Ser. 2. Supplement. 1880. V. 9. P. 1–156.
- [18] Коркина Е. И. Двумерные цепные дроби. Самые простые примеры // Особенности гладких отображений с дополнительными структурами / ред. В. И. Арнольд. Тр. МИАН. Т. 209. М.: Физматлит, 1995. С. 143–166.
- [19] Голдман А., Таккер А. Многогранные выпуклые конусы // Линейные неравенства. М.: ИЛ, 1959. С. 142–161.
- [20] Брюно А. Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979.
- [21] Боревиц З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. М.: Наука, 1972.

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН

E-mail: parus@spp.keldysh.ru

Поступило

15.01.2002

Исправленный вариант

26.11.2004